Lista 3

1. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ subspaços do $\mathbb{R}^3$, cujas bases são

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

   a) Explique porque $\mathbb{R}^3 = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.
   b) Determine o projetor P sobre $\mathcal{X}$ paralelamente a $\mathcal{Y}$, bem como o projetor Q sobre $\mathcal{Y}$ paralelamente a $\mathcal{X}$.
   c) Determine a projeção de $v = (2, -1, 1)^T$ sobre $\mathcal{Y}$ paralelamente a $\mathcal{X}$.
   d) Verifique que P e Q são idempotentes.
   e) Verifique que $R(P) = \mathcal{X} = N(Q)$ e que $N(P) = \mathcal{Y} = R(Q)$.

2. Encontre o projetor ortogonal de b em $M = span\{u\}$, e determine a projeção de b em $M^{\perp}$, onde $b = (4,\, 8)^T$ e $u = (3,\, 1)^T$.

3. Seja P um projetor ortogonal. Prove que $\|Px\|_2 = \|x\|_2$ se, e somente se, $x \in \text{Im}(P)$.

4. Seja $V = M \oplus N$, e P projetor sobre M paralelamente a N. Mostre que

$$Im(P) = N(I - P) = M \qquad \text{e} \qquad Im(I - P) = N(P) = N.$$

5. Sejam M e N subespaços de um espaço vetorial V, e considere os projetores ortogonais associados P_M e P_N.

   a) Prove que $P_M P_N = 0$ se, e somente se, $M \perp N$.
   b) É verdade que $P_M P_N = 0$ se, e somente se, $P_N P_M = 0$? Por que?

6. Seja $\ell : u + \text{span}\{u - v\}$ uma reta em $\mathbb{R}^n$ que passa por u e v. Suponha $u \neq 0$ e $v \neq \alpha u$. Faça esboços dessa reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e explique como projetar um vetor b ortogonalmente em ℓ.

7. Sejam M e N subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial. Considere P_M e P_N projetores ortogonais em M e N, respectivamente. Prove que $\text{Im}(P_M + P_N) = \text{Im}(P_M) + \text{Im}(P_N) = M + N$.

8. Um espaço afim $v + M \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim(M) = n - 1$ é chamado *hiperplano*. Dados $\beta \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^n$ não nulo, prove que o conjunto $H = \{x \mid u^T x = \beta\}$ é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$.

9. Sejam $u, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $u^T w \neq 0$. Considere também $M = u^{\perp}$, $W = \text{span}\{w\}$.

   a) Prove que $\mathbb{R}^n = M \oplus W$.
   b) Mostre que a projeção oblíqua de $b \in \mathbb{R}^n$ sobre M paralela a W é dada por

$$p = b - (u^T b / u^T w) w.$$

c) Dado $\beta \in \mathbb{R}$, seja H o hiperplano em $\mathbb{R}^n$ definido por $H = \{x \mid u^T x = \beta\}$. Mostre que a projeção oblíqua de $b \in \mathbb{R}^n$ sobre H paralela a W é dada por

$$p = b - \left(\frac{u^T b - \beta}{u^T w}\right) w.$$

10. Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ projetores tais que $PQ = QP$. Provar que PQ é uma projeção cujo núcleo é $N(P) + N(Q)$ e cuja imagem é $Im(P) \cap Im(Q)$.

11. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Prove que $\mathbb{R}^n = Im(A) \oplus N(A)$ se, e somente se, $N(A) = N(A^2)$.

12. Seja P um projetor. Prove que os vetores v e $(1-t)v + tPv$, para quaisquer $v \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, têm a mesma imagem por P.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m \leq n$ e posto$(A) = m$. Achar o projetor ortogonal sobre $Im(A)$ e $Im(A)^\perp$.

14. Seja P um projetor. Mostre que $\|P\|_2 \geq 1$, e a igualdade se cumpre somente se P é um projetor ortogonal.

15. Se P é um projetor ortogonal, mostre que $I - 2P$ é uma matriz unitária. Interprete o efeito dessa matriz sobre um vetor.

16. Proponha um algoritmo que realize a fatoração QR de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m \geq n$ e posto$(A) = n$, que utilize rotações de Givens. Qual o número de flops? Proponha um algoritmo que implemente a fatoração QR usando refletores de Householder. Qual o custo computacional?

17. Sejam $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ pontos em $\mathbb{R}^2$. Mostre que a reta que passa pela origem e melhor ajusta os pontos no sentido de quadrados mínimos possui inclinação dada por
$$m = \sum_i x_i y_i / \sum_i x_i^2.$$

18. Prove que $\hat{x}$ é a solução de quadrados mínimos para o sistema $Ax = b$ se, e somente se, $\|A\hat{x} - b\|_2 = \|P_{N(A^T)}\, b\|_2$, onde $P_{N(A^T)}$ é a projeção ortogonal sobre $N(A^T)$.

19. Prove que se $\epsilon = A\hat{x} - b$, onde $\hat{x}$ é uma solução de quadrados mínimos para $Ax = b$, então $\|\epsilon\|_2^2 = \|b\|_2^2 - \|P_{\mathrm{Im}(A)} b\|_2^2$, onde $P_{\mathrm{Im}(A)}$ é a projeção ortogonal sobre $\mathrm{Im}(A)$. Forneça uma interpretação gráfica para este resultado.

20. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto$(A) = n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Seja x_w a solução do problema de quadrados mínimos
$$\text{minimizar } \|W(Ax - b)\|_2^2 \quad \text{s. a} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
com $W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ invertível e seja x_I a solução do problema de quadrados mínimos padrão, isto é, $W = I$. Mostre que:

    a) $x_w = x_I + (A^T W^2 A)^{-1} A^T (I - W^2)(Ax_I - b)$.
    b) Se $b \in \mathrm{Im}(A)$ então $x_w = x_I$.

21. Sejam A e b tais que

$$A = \begin{pmatrix} R_{n\times n} & w_{n\times 1} \\ 0_{(m-n)\times n} & v_{(m-n)\times 1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} c_{n\times 1} \\ d_{(m-n)\times 1} \end{pmatrix}.$$

Supondo que R é invertível, mostre que

$$\min \ \|Ax - b\|^2 = \|d\|^2 - \left(\frac{v^T d}{\|v\|}\right)^2.$$

22. Prove que $x = A^+ b$ é a solução de norma 2 mínima do problema de quadrados mínimos

$$\text{Minimizar } \|Ax - b\|^2, \ \text{com } x \in \mathbb{R}^n.$$

23. Mostre que se A^+ é a pseudo-inversa de A então AA^+ e $I - AA^+$ são, respectivamente, projetores sobre $\mathrm{Im}(A)$ e $N(A^T)$.

24. Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sejam A^+ a pseudo-inversa de A e $b \in \mathbb{R}^n$. Prove que

$$\{A^+ b + (I - A^+ A)h \mid h \in \mathbb{R}^n\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^T A x = A^T b\}.$$

25. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ tais que $\mathrm{Im(A)} \subset \mathrm{Im}(B)$. Dado $b \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, mostrar que

$$\|(I - AA^+)b\|_2 \geq \|(I - BB^+)b\|_2.$$

Forneça uma interpretação gráfica para este resultado.