Lista 4

1. Prove ou dê um contra-exemplo.
   a) $N(A) = N(A^T A)$.
   b) $R(A^T) = R(A^T A)$.

2. Mostre que os autovalores de $A^T A$ e AA^T são todos não-negativos.

3. Mostre que a matriz
$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$
   é não singular.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz invertível. Qual é a relação entre os autopares de A e A^{-1}?

5. Sejam $(\lambda_1, v1)$ e (λ_2, v_2) autopares de A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

6. Mostre que se A é Hermitiana, então seus autovalores são reais.

7. Sejam $(\lambda_1, v1)$ e (λ_2, v_2) autopares de uma matriz Hermitiana A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são ortogonais.

8. Sejam A e C matrizes quadradas e $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Prove que $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$.

9. Mostre que se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes similares, então A, B possuem os mesmos autovalores. O que pode-se dizer dos autovetores ?

10. Prove ou dê um contra-exemplo:
    a) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda + \mu \in \sigma(A + B)$.
    b) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda\mu \in \sigma(AB)$.
    c) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.
    d) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui todos os autovalores iguais, então $A = \alpha I$.

11. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores de A, e seja (λ_k, v_k) um autopar de A.
    a) Se μ não pertence a $\sigma(A)$, mostre que $(A - \mu I)^{-1} v_k = \frac{v_k}{\lambda_k - \mu}$.
    b) Determine um vetor d de modo que λ_k seja autovalor de $A + v_k d^T$.

12. Dizemos que $\rho(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|\lambda_i|\}$ é o raio espectral de A, isto é, o maior autovalor em módulo de A. Prove que $\rho(A) \leq \|A\|$, onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma matricial consistente.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se,
$$\mathbb{R}^n = N(A - \lambda_1 I) \oplus N(A - \lambda_2 I) \oplus \ldots \oplus N(A - \lambda_s I).$$

14. Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$, prove que A e B possuem um autovetor em comum.

15. Sejam $c, d \in \mathbb{R}^n$ não nulos. Prove que a matriz $A = cd^T$ é diagonalizável se, e somente se, $d^T c \neq 0$.

16. Prove que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável se, e somente se, mult. $\text{geo}_A(\lambda_i) =$ mult. $\text{alg}_A(\lambda_i)$ para todo autovalor λ_i de A.

17. Mostre que traço de A é igual a soma de seus autovalores.

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Defina $r(x) = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$. Mostre que
$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_1, \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_n,$$
onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ são os autovalores de A.

19. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz Hermitiana e $\{(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)\}$ os autopares de A. Defina
$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$
com $\|q\| = 1$.

    a) Prove que $\sum_{i=2}^{n} |c_i|^2 \leq \|v_1 - q\|^2$.
    b) Forneça uma expressão para o número $\mu = q^H A q$ em função de c_i e λ_i.
    c) Prove que $|\lambda_1 - \mu| \leq \beta \|v_1 - q\|^2$, onde $\beta = \max_{2\leq i\leq n} |\lambda_1 - \lambda_i|$.

20. Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal tem autovalores reais se e somente se A é simétrica.

21. Prove que os autovalores de uma matriz anti-simétrica são imaginários puros.

22. Mostre que uma matriz triangular T é normal se e somente se T é diagonal.

23. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica, positiva-definida então $a_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

24. Se A é uma matriz normal, mostre que (λ, x) é autopar de A se e somente se $(\bar{\lambda}, x)$ é autopar de A^H.

25. Mostre que A é simétrica, positiva-definida se e somente se $A = B^T B$ para alguma B não-singular.

26. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita nilpotente de ordem k se $A^k = 0$. Se $A^{k-1}u \neq 0$, mostre que o conjunto $\{u, Au, A^2u, \ldots, A^{k-2}u, A^{k-1}u\}$ é linearmente independente.

27. Mostre que se A e B são unitariamente similares(e não-singulares) então $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$.