Revisão

1 Matrizes

Denotamos por $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uma matriz com entradas a_{ij} reais, de m linhas por n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Operações

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

- Adição e substração: $C = A \pm B$

  Se $m = p$ e $n = q$ então $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, com $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- Multiplicação por escalar: $C = \alpha A$

  $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, com $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- Multiplicação: $C = AB$

  Se $n = p$ então $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, e $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$.

  Atenção: Em geral $AB \neq BA$.

- Matriz transposta: $C = A^T$

  $c_{ij} = a_{ji}$, e $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- Matriz Inversa: $C = A^{-1}$

  Se $m = n$ então $CA = AC = I$, com $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e onde I denota a matriz identidade de ordem n.

Operações por bloco

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix},$$

uma matriz decomposta em blocos $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, para $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$, tais que $\sum_{i=1}^{p} n_i = m$ e $\sum_{j=1}^{q} n_j = n$.

Tomando os devidos cuidados, as operações da seção anterior podem ser realizadas por blocos, desde que as dimensões dos blocos sejam compatíveis.

Matrizes especiais

- Linha: $m = 1$
- Coluna: $n = 1$.
- Nula: $a_{ij} = 0$.
- Quadrada: $m = n$.
- Diagonal: $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.
- Identidade: $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ se $i = j$.
- Triangular superior: $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- Triangular inferior: $a_{ij} = 0$ para $j > i$.
- Simétrica: $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$, ou $A = A^T$.
- Anti-simétrica: $m = n$ e $a_{ij} = -a_{ji}$, ou $A = -A^T$.
- Nilpotente: $m = n$ e $A^k = 0$, para algum k inteiro positivo.
- Idempotente: $m = n$ e $A^2 = A$.
- Auto-reflexiva: $m = n$ e $A^2 = I$.
- Ortogonal: $m = n$ e $A^{-1} = A^T$.
- Normal: $m = n$ e $A^T A = AA^T$.

Posto

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O posto coluna(linha) de A é o número de colunas(linhas) linearmente independentes. É possível mostrar que posto linha é igual ao posto coluna e, então, diremos simplesmente posto de A e denotaremos por posto(A).

Dizemos que uma matriz A tem posto completo se posto$(A) = \min\{m, n\}$.

Uma matriz quadrada é não-singular se seu posto é completo.

Subspaços fundamentais

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Núcleo de A: $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
- Imagem de A: $Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}$
- Espaço linha de A: $Im(A^T) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u = A^T y \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^m\}$.
- Núcleo a esquerda de A: $N(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0\}$.

2 Determinantes

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O determinante de A é definido por

$$\det(A) = \sum_{p \in P} \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

onde p é uma permutação do vetor $p_0 = (1, 2, 3, \dots, n)$ e P o conjunto de todas as permutações. A função $\sigma(p)$ é igual a 1, se p pode ser obtido através de um número par de permutações de p_0, e igual a -1 se o número de permutações for ímpar.

Cada parcela da soma acima é chamada de "produto elementar com sinal". Assim, dizemos que o determinante é a soma de todos os produtos elementares com sinal.

Propriedades

Algumas propriedades do determinante:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

3 Autovalores e autovetores

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A, associado ao autovetor $v \neq 0$ quando

$$Av = \lambda v.$$

Decorre desta definição que λ é autovalor de A, se e somente se, λ é raiz do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

4 Sistemas lineares

Chamamos o conjunto de equações:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

de um sistema de equações lineares. Em forma matricial, escrevemos

$$Ax = b, \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Se cada coluna de A é representada por um vetor coluna $a_{*j} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{R}^{m\times 1})$, e cada linha de A é representada por um vetor linha $a_{i*}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$, temos que A pode ser escrita como:

$$A = [a_{*1} \,|\, a_{*2} \,|\, \ldots \,|\, a_{*n}], \quad \text{ou ainda} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1*}^T \\ \hline a_{2*}^T \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m*}^T \end{bmatrix}.$$

Isto permite reescrever o sistema linear (1) de outras duas maneiras:

$$a_{*1}x_1 + \cdots + a_{*n}x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{*i} = b, \quad \text{ou então} \quad \begin{array}{rcl} a_{1*}^T x & = & b_1, \\ a_{2*}^T x & = & b_2, \\ & \vdots & \\ a_{m*}^T x & = & b_m. \end{array}$$

Da primeira fica claro que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, se e somente se, b pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de A. Além disso, a segunda expressão nos diz que, se uma solução x existir, a mesma está na intersecção de m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$.