Introdução à otimização contínua

$$(P)\begin{cases} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in D \subset \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

função objetivo

conjunto viável

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \Omega$

(f contínua em Ω)

Def. Dizemos que $\bar{x} \in D$ é um minimizador global de (P) se

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

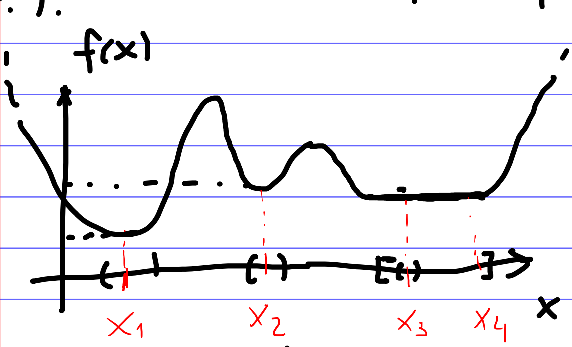
Def. $\bar{x} \in D$ é dito minimizador local de f em D se existe $\varepsilon > 0$ e

$$B(\bar{x}, \varepsilon) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\|_2 \leq \varepsilon \}$$

tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in D \cap B(\bar{x}, \varepsilon).$$

Ex. 1.

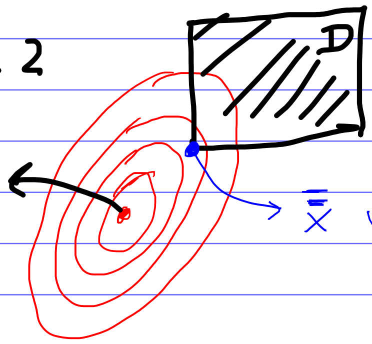


minimizador global de f em $\mathbb{R}$ isolado estrito

minimizador local estrito

min. locais não-isolados não-estritos

Ex. 2



$\bar{x} = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\bar{\bar{x}}$ minim. global restrito

$$\min.\ f(x_1,x_2) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j$$
$$\text{s.a}\quad x \in D$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ positiva definida

$x \in \mathbb{R}^2$

$x^T A x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq x_1 \leq 2 \\ 1 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

OBS.:

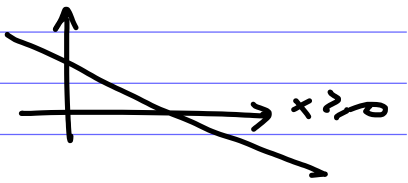
(i) quando $f(\bar{x}) < f(x)$, $\forall x \in D \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ chamamos $\bar{x}$ de min. local estrito.

(ii) se $\bar{x}$ é o único min. local em $B(\bar{x}, \hat{\varepsilon})$, $\bar{x}$ é dito min. local isolado.

Def.: $$\bar{v} = \inf_{x \in D} f(x) \in [-\infty, +\infty)$$

é chamado valor ótimo de (P).

Obs.: $\bar{v} = -\infty$ quando f é ilimitada inferiormente em D.



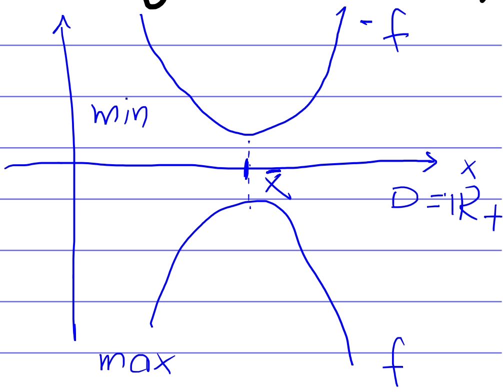
- Quase sempre falaremos de "minimização"

Note que não há perda de generalidade, pois

$$\text{maximizar } f(x) \quad \text{s.a}\quad x \in D$$

equivale a

$$\text{minimizar } -f(x) \quad \text{s.a}\quad x \in D$$



$$\min_{x \in D} -f(x) = -\max_{x \in D} f(x)$$

OBS.:

- $D = \mathbb{R}^n$: problema de minimização irrestrito (sem restrições)
- $D \subsetneq \mathbb{R}^n$: problema de minimização restrito (com restrições)

Existência de soluções

- $\bar{v} = -\infty$: não existe solução (minimizador global)

(e.g. $f(x) = \ln(x)$, $x \in D = \mathbb{R}_{++}$)

- Mesmo com $\bar{v}$ finito, ainda pode não existir solução.

(e.g., $f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$)

$\inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = 0$, mas $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = 0$.

Teorema (Weierstrass): Se D é compacto não-vazio e $f: D \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe minimizador/maximizador global de f em D.

Dem.: $f(D)$ é compacto (pois imagem de compacto por função contínua é compacto)

$$\Rightarrow -\infty < \bar{v} = \inf_{x \in D} f(x).$$

Pela def. de ínfimo, existe $\{x^k\} \subset D$ tal que

$$\bar{v} \leq f(x_k) \leq \bar{v} + \frac{1}{k}. \qquad (I)$$

Como D é compacto, $\{x^k\}$ possui uma subsequência convergente:

$$\lim_{j \to +\infty} x^{k_j} = \bar{x}. \in D$$

Tomando limites em (I) e usando a continuidade de f:

$$\bar{v} \leq \lim_{j \to +\infty} f(x^{k_j}) = f(\bar{x}) \leq \bar{v} + \underbrace{\lim_{j \to +\infty} \frac{1}{k_j}}_{0}$$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{v}$, portanto $\bar{x}$ é minimizador global. ($\in D$)

#

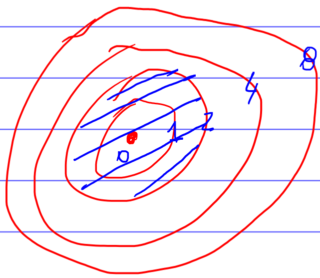
Def. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio.

Se $D \subset \Omega$, dizemos que o conjunto de nível de $f : D \to \mathbb{R}$ contínua é dado por

$$L(c) = \{x \in D \mid f(x) \leq c\}.$$

(de nível c)

Ex. 3



$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x$, $D = \mathbb{R}^n$

$L(2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 2\}$

Corolário 1. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua em D não-vazio. Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L(c)$ é compacto, então f admite mín. global em D.

Dem. Perceba que $x \in D \setminus L(c) \Rightarrow f(x) > c$

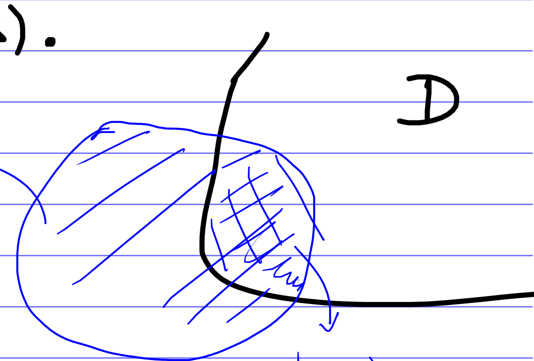
Mas $c \geq f(y)$, $\forall y \in L(c)$.

Logo basta minimizar f sobre $L(c)$.

Mas sendo $L(c)$ compacto, então f admite mín. global em $L(c) \subset D$ (graças ao Teo. Weierstrass).

Ex. 4

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$



D

$L(c)$

Exemplo 5 (projeção ortogonal)

Dados $D \subset \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ chamamos "projeção ortogonal" de y em D uma solução de

$$(\text{Proj}) \quad \min_x \ \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 = \underbrace{\frac{1}{2} x^T I x - y^T x + \frac{1}{2} y^T y}_{f(x)}$$
$$\text{s.a} \quad x \in D.$$

Se D é não-vazio e fechado, então (Proj) tem solução para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

$c = f(x_0) = \frac{1}{2}\|x_0 - y\|_2^2$

$\underbrace{L(c)} = \{x \in D \mid f(x) \leq c\} \to$ compacto

$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}}_{\text{compacto}} \cap \underbrace{D}_{\text{fechado}}$

Def. Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ é coerciva em D quando:

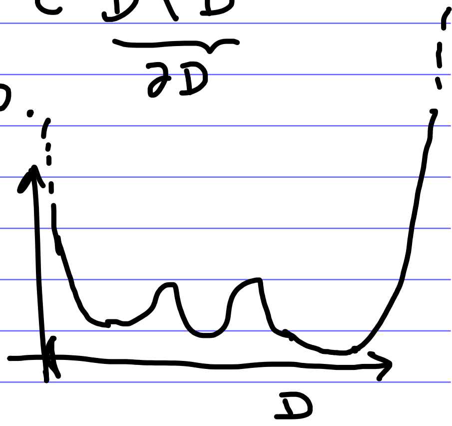
$\bar{D} = cl(D)$ fecho de D

(i) $\forall \{x^k\} \subset D$, $\|x^k\| \to +\infty$

(ii) $\forall \{x^k\} \subset D$, $x^k \to x \in \underbrace{\bar{D} \setminus D}_{\partial D}$

tem-se que $\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = +\infty$.

Ex. 6. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\bar{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\bar{D} \setminus D = \{0\}$



Corolário 2. Seja $D \neq \emptyset$. Se $f: D \to \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, então f admite mín. global em D.

Dem. Sendo $D \neq \emptyset$, tome $x \in D$ e defina $c = f(x)$. Vamos mostrar que $L(c)$ é compacto.

Como estamos em $\mathbb{R}^n$:

compacto $\Leftrightarrow$ fechado e limitado.

(1) Suponha que $L(c)$ não é limitado, então $\exists \{x^k\} \subset L(c)$ tal que $\|x^k\| \to +\infty$.

Sendo f coerciva e contínua,

$$\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = +\infty,$$

logo p/ k suf. grande $f(x^k) > c \Rightarrow x^k \notin L(c)$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

(2) Suponha que $L(c)$ não é fechado, i.e., $\exists \{x^k\} \subset L(c)$ tal que $x^k \to x \in \overline{L(c)} \setminus L(c)$.

Como $L(c) = D \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}}_{\text{fechado (pois } f \text{ contínua)}}$

temos

$$x \in \overline{L(c)} \setminus L(c) \Rightarrow x \in \overline{D} \setminus D.$$

Sendo f coerciva: $\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = +\infty$,

logo p/ k suf. grande $f(x^k) > c$
$\Rightarrow x^k \notin L(c)$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

Portanto $L(c)$ é fechado.

Assim, $L(c)$ é compacto e aplicamos o corolário 1.

#

Resumo:

- problema de otimização contínua
- def. minimizador local e global
- Existência de soluções
  → cond. suficientes

  1) f contínua e D compacto (Teo. de Weierstrass)
  2) $L(c)$ compacto
  3) f contínua e coerciva