Lista 1

1. Dado $c \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica, calcule o gradiente e a Hessiana da função linear/afim $f(x) = c^\top x + \alpha$ e da quadrática $q(x) = x^\top Ax + b^\top x + \beta$.

2. Explique por que minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$ ou minimizar $\alpha f(x)+\zeta$, onde $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}$ são constantes(em relação a x) e $\alpha > 0$.

3. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e A e B conjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que $B \subset A$. Mostre que
$$\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} f(x).$$
Prove também que se $x^\star$ é um minimizador de f em A e $x^\star \in B$, então $x^\star$ é também minimizador de f em B.

4. Mostre que todo minimizador local isolado é estrito. A recíproca é verdadeira?

5. Ilustrando a região viável D e as curvas de nível da função f:
$$f(x) = x_1 + \eta x_2 \qquad D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2\}$$
determine para quais valores de $\eta \in \mathbb{R}$ o problema de minimização admite solução global e para que valores admite apenas solução local.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que $x^\star \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador global de f em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todo x tal que $f(x) = f(x^\star)$ é um minimizador local de f.

7. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial suave e considere os problemas de otimização irrestrita de minimizar $f(x)$ onde
$$f(x) = \|F(x)\|_\infty, \quad f(x) = \max_{1\leq i\leq m} F_i(x).$$
Reformule tais problemas(não-suaves) como problemas suaves de otimização com restrições. É possível fazer o mesmo com $f(x) = \min_{1\leq i\leq m} F_i(x)$?

8. Provar que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e *coerciva*, então f tem minimizador global em $\mathbb{R}^n$.

9. Provar que se f é contínua em $\mathbb{R}^n$ e, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o *conjunto de nível*:
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$$
é limitado, então f tem minimizador global em $\mathbb{R}^n$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função quadrática:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + c,$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica, $q \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) se o problema de minimização irrestrita tem minimizador local, então Q é semidefinida positiva. Além disso, todo minimizador local é global.

(b) se Q é definida positiva, então f é coerciva em $\mathbb{R}^n$. Além disso, mostre que o problema de minimizar f sobre um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio e fechado admite minimizador global. Podemos remover a hipótese de D ser fechado?

11. Mostre que, dada uma constante $c > 0$, se $g(t) = o(t)$, então para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que $|g(t)| < c\,t$.

12. Seja $f(x) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)$. Mostre que $\bar{x} = (0, 0)$ é um ponto estacionário, que a Hessiana de f em $\bar{x}$ é positiva semidefinida, mas que $\bar{x}$ não é minimizador local.

13. Mostre que o minimizador global de $\phi(t) = f(x_k + t\,d_k)$, onde $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x$, com Q simétrica positiva definida, é dado por $t_* = -\dfrac{\nabla f(x_k)^T d_k}{d_k^T Q d_k}$.

14. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mostre que $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é a matriz simétrica mais próxima de A na norma de Frobenius. (Dica: o complemento ortogonal do espaço de matrizes simétricas é o espaço de matrizes anti-simétricas).

15. Encontre todos os valores de $\sigma \in \mathbb{R}$ para os quais o problema de minimizar

$$f(x) = \sigma x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 + x_2,$$

em $\mathbb{R}^2$ tem solução.

16. Mostre que a função $f(x) = (x_2 - x_1)^2 + x_1^5$ tem um único ponto estacionário que não é um maximizador nem um minimizador irrestrito de f.

17. Provar que para todo $\sigma > 1$, o sistema de equações

$$\sigma \cos x_1 \sin x_2 + x_1 e^{x_1^2+x_2^2} = 0, \quad \sigma \sin x_1 \cos x_2 + x_2 e^{x_1^2+x_2^2} = 0,$$

possui solução $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

18. Mostre que se $x^\star \in \mathbb{R}^n$ cumpre as condições suficientes de segunda ordem para o problema de minimização irrestrita, então existem $\varepsilon, \gamma > 0$ tais que

$$f(x) - f(x^\star) \geq \gamma\|x - x^\star\|^2, \quad \forall x \in B(x^\star, \varepsilon).$$

19. Encontre exemplos onde:

   (a) x_* é minimizador local de f em D, mas $\nabla f(x_*) \neq 0$.
   (b) x_* é minimizador local de f em D, $\nabla f(x_*) = 0$ mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é semidefinida positiva.
   (c) D aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, mas x_* não é minimizador local.
   (d) D aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, $\nabla^2 f(x_*)$ é semidefinida positiva, mas x_* não é minimizador local.
   (e) D aberto, x_* é minimizador local estrito mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é definida positiva.