Lista 2

1. Sejam $K_1 \subset K_2$ cones em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $K_2^* \subset K_1^*$.

2. Sejam K_1, K_2 cones não-vazios em $\mathbb{R}^n$. Demonstre:
   (a) $K_1 \times K_2$ é um cone e $(K_1 \times K_2)^* = K_1^* \times K_2^*$
   (b) $K_1 \cup K_2$ é um cone e $(K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$
   (c) $K_1 + K_2$ é um cone e $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$

3. Mostre que:
   (a) $V_D(\bar{x})$ é um cone.
   (b) $D_f(\bar{x}) \cup \{0\}$ é um cone.
   (c) Se $D_f(\bar{x}) \neq \emptyset$, então $\overline{D_f(\bar{x})}$ é um cone.

4. Mostre que se $\bar{x} \in D$ é minimizador local de f em D então

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0, \quad \forall d \in V_D(\bar{x}).$$

5. Prove que:
   (a) $V_D(\bar{x}) \subset T_D(\bar{x})$
   (b) $T_D(\bar{x})$ é um cone não-vazio.

6. Demonstre as seguintes inclusões:

$$0 \in V_D(\bar{x}) \subset T_D(\bar{x}) \subset B_D(\bar{x}).$$

7. Mostre que as definições de $B_D(\bar{x})$ vistas em aula coincidem com

$$B_D(\bar{x}) = \{0\} \cup \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x^k\} \subset D \text{ tal que } x^k \to \bar{x}, \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \to \frac{d}{\|d\|} \right\}$$

8. Sejam $C, D \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$B_{C \cup D}(\bar{x}) = B_C(\bar{x}) \cup B_D(\bar{x}), \quad B_{C \cap D}(\bar{x}) \subset B_C(\bar{x}) \cap B_D(\bar{x})$$

9. Sejam $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $C = \mathbb{R}^n \setminus D$ e denotemos por ∂D a fronteira de D. Mostre que se $\bar{x} \in \partial D$ então

$$B_C(\bar{x}) \cup B_D(\bar{x}) = \mathbb{R}^n, \quad B_{\partial D}(\bar{x}) = B_C(\bar{x}) \cap B_D(\bar{x}).$$

10. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio e fechado e $x \notin D$. Denote por $P_D(x)$ o conjunto de projeções de x sobre D. Mostre que

$$x - \bar{x} \in (B_D(\bar{x}))^*, \quad \forall \bar{x} \in P_D(x).$$

11. Seja x_* minimizador local de f em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $x(t)$ uma curva em Ω de classe C^1 *partindo de* x_*, i.e., $x : [0, \epsilon] \to \Omega$ tal que $\epsilon > 0$, $x(0) = x_*$. Mostre que $\nabla f(x_*)^\top x'(0) \geq 0$.