Lista 3

1. Encontre os minimizadores e maximizadores da função $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ no conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

2. Verique que $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^2$ é uma solução do problema de minimizar x_2 sujeito a $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1$, que $\bar{x}$ não é regular e as condições de otimalidade de Lagrange não são satisfeitas.

3. Provar que a solução do problema de minimizar $x_1^2 + x_2^2$ sujeito a $(x_1 - 1)^3 = x_2^2$ não satisfaz as condições de Lagrange.

4. Mostre que se $h(x) = Ax - b$, e x_* é minimizador local de f em $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) = 0\}$, a hipótese de regularidade (LICQ) não é necessária para provar a existência de multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tais que
$$\nabla f(x_*) + J_h(x_*)^T \lambda = 0.$$

5. Provar que se x_* é minimizador local de f em $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) = 0\}$, onde $f, h \in \mathcal{C}^1$ então existem multiplicadores $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, nem todos nulos, tais que:
$$\lambda_0 \nabla f(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x_*) = 0.$$

6. Mostre que se x_* é minimizador local de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{s.a} & Ax = b, \end{array}$$
com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, então $d_* = 0$ é solução de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{d} & \nabla f(x_*)^\top d \\ \text{s.a} & Ad = 0. \end{array}$$

7. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções continuamente diferenciáveis. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $h(x) = 0$ e seja x_* um mininizador local deste problema. Prove que, ou existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_*) = \lambda \nabla h(x_*)$, ou então $\nabla h(x_*) = 0$.

8. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \leq n$, posto$(A) = m$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^2$. Mostre que se x_* é tal que $Ax_* = b$ e existe $\lambda_* \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(x_*) = A^T \lambda_*$ e $y^T \nabla^2 f(x_*) y > 0$, para todo vetor y não nulo em $\mathcal{N}(A)$, então x_* é minimizador local estrito de f em $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b\}$.

9. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \leq n$ e posto completo. Encontre a solução analítica de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}\|x\|_2^2 \\ \text{s.a} & Ax = b. \end{array}$$
Dê uma interpretação geométrica.

10. Seja $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_k) \neq 0$. Mostre que $d_k = -\dfrac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$ é minimizador de $\nabla f(x_k)^T d$ sujeita a $\|d\| = 1$.

11. Eliminando a variável x_2, resolva o problema de minimizar $f(x) = x_1 + x_2$, sujeita a $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Mostre que a escolha do sinal para a operação de raiz quadrada durante o processo de eliminação é um passo crítico(a escolha errada leva à resposta incorreta).

12. Encontre todos os minimizadores e maximizadores da função $f(x) = x_1^3/3 + x_2$ no conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 2\}$.

13. Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Encontre todos os minimizadores e maximizadores de $f(x) = x^T Q x$ em $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

14. Encontrar os minimizadores de $f(x)$ sujeito a $h(x) = 0$ nos seguintes casos:

    (a) $f(x) = \|x\|^2/2, h(x) = 1 - \mathbf{1}^T x$

    (b) $f(x) = \|x\|^2/2, h(x) = 1 - x^T Q x$, em que $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica.

15. Demonstre as condições necessárias de primeira ordem para o problema de minimizar f sujeita a $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) = 0\}$ usando o seguinte argumento: se x_* é minimizador local regular, então é possível usar o teorema da função implícita para transformar tal problema em um problema irrestrito e as condições de otimalidade do problema irrestrito implicam nas condições necessárias para o problema original.

16. Considere o problema perturbado $P(\varepsilon)$:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = \varepsilon, \end{array}$$

    e seja x_* solução regular de $P(0)$. Denotando $x_* = x(0)$ e usando as condições de otimalidade de $P(\varepsilon)$ e o teorema da função implícita para definir $x(\varepsilon)$, mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(x(0)) = -\lambda_i, \quad \text{para } \ i = 1, 2, \ldots, m.$$