Lista 4

1. Mostre que subespaços, hiperplanos e semi-espaços em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos.

2. Seja $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e positiva definida e $\beta > 0$. Mostre que o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Qx, x\rangle \leq \beta\}$ é um conjunto convexo.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone. Provar que K é convexo se, e somente se, $K = K + K$.

4. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Provar que $(c_1 + c_2)D = c_1D + c_2D$. Mostre que isso pode ser falso se D não for convexo.

5. Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ convexo, mostre que se $f : D \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, o epígrafo de f em D:
$$E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$$
é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

6. Sejam C e D conjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Prove que $\text{conv}(C + D) = \text{conv}C + \text{conv}D$ e que $\text{conv}(C \times D) = \text{conv}C \times \text{conv}D$.

7. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone. Mostre que $K^* = (\text{conv}K)^*$.

8. Seja $\{a^1, \ldots, a^p\} \subset \mathbb{R}^n$. Prove que
$$\text{cone}\{a^1, \ldots, a^p\} = \text{cone}(\text{conv}\{a^1, \ldots, a^p\}).$$

9. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone não-vazio. Mostre que $(K^*)^* = \overline{\text{conv}K}$. Em particular para K convexo e fechado $(K^*)^* = K$.

10. Sejam $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ e $a \in \mathbb{R}^\ell$. Prove que para o conjunto poliedral
$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = a, Bx \leq b\},$$
temos que
$$R_D = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad = 0, Bd \leq 0\}.$$

11. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio, convexo, fechado e $P_D(x)$ a projeção de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre D. Mostre que
$$\|y - P_D(x)\| \leq \|y - x\|, \quad \forall y \in D.$$

12. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone fechado e $y \in K^*$. Provar que a projeção de y sobre K é única e igual a 0.

13. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone não-vazio convexo fechado. Prove que $\bar{x} = P_K(x)$ se, e somente se

$$\bar{x} \in K, \quad x - \bar{x} \in K^*, \quad \langle \bar{x}, x - \bar{x} \rangle = 0.$$

14. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio convexo fechado. Prove que a função distância

$$\operatorname{dist}(x, D) = \min_{z \in D} \|x - z\|$$

é convexa em $\mathbb{R}^n$.

15. Prove que se $D \subset \mathbb{R}^n$ é não-vazio e convexo, então $\partial D = \partial \bar{D}$.

16. Construa um exemplo para mostrar que no Teorema de Separação Estrita, a hipótese de um dos conjuntos ser compacto não pode ser relaxada.

17. Mostre que se $D \subset \mathbb{R}^n$ é não-vazio e convexo, então para $\bar{x} \in \bar{D}$, temos

$$(N_D(\bar{x}))^* = (T_D(\bar{x})^*)^* = T_D(\bar{x}).$$

18. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone e $x \in \partial K$. Provar que se um hiperplano H separa x e K, então $0 \in H$.

19. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Provar que se $\bar{x}$ é ponto extremo de D então $\bar{x} \in \partial D$.

20. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Provar que D tem pontos extremos se, e somente se, $N(A) = \{0\}$.

21. O lema de Gordan diz que para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}^m$, exatamente um dos sistemas abaixo possui solução:

$$Ax < a, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou

$$A^T y = 0, \quad a^T y \leq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}.$$

Prove o lema de Gordan.

22. Sejam $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$, funções convexas em $\mathbb{R}^n$. Mostre que, para $q \geq 1$, a função

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} (\max\{0, f_i(x)\})^p$$

é convexa em $\mathbb{R}^n$.

23. Sejam $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Provar que a função

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

é côncava em $\mathbb{R}^n_+$.

24. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Mostre que $f : D \to \mathbb{R}$ é quase-convexa em D se, e somente se,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

25. Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa. Mostrar que se o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ contém mais de um ponto, então ele não é convexo.

26. Seja f uma função convexa em $\mathbb{R}_+$ que é limitada superiormente em $\mathbb{R}_+$. Prove que f é não-crescente em $\mathbb{R}_+$.

27. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado não-vazio, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $\bar{x} \in D$. Mostre que $\bar{x}$ é solução de minimizar $f(x)$ em D se, e somente se, $\bar{x}$ é solução de minimizar $f(x) + \beta \text{dist}(x, D)$ em $\mathbb{R}^n$ para algum $\beta > 0$.

28. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, e sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ quaisquer. Mostre que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(\alpha) = f(x + \alpha d)$ é convexa.

29. Seja $f : \mathbb{R}^m \to R$ uma função convexa. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Mostre que $g(x) = f(Ax + b)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$.

30. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to R$ é uma função convexa e ao mesmo tempo côncava, então f é uma função afim.

31. Prove que se f é convexa em D convexo, então todo minimizador local é global.

32. Suponha que f é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto de minimizadores globais de f em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

33. Mostre que $f \in \mathcal{C}^1$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ se e somente se $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

34. Seja $f \in \mathcal{C}^1$ uma função convexa em um convexo D. Mostre que se $x_* \in D$ é tal que

$$\nabla f(x_*)^\top (y - x_*) \geq 0, \quad \forall y \in D,$$

então x_* é minimizador global de f em D.

35. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ não vazio convexo e fechado e $f(x) = \text{dist}(x, D)^2$. Prove que f é convexa e diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e que $\nabla f(x) = 2(x - P_D(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

36. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável e $D \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Definimos a função $F(x) = P_D(x) - \nabla f(P_D(x))$. Mostre que se $x \in \mathbb{R}^n$ é ponto fixo de F, então $P_D(x)$ é minimizador de f em D.

37. Seja f uma função convexa e diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Mostre que para todo $\lambda > 0$, o sistema de equações $\nabla f(x) = -\lambda x$ possui solução única.

38. Seja f uma função fortemente convexa e diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Prove que para o único minimizador $\bar{x}$ de f em $\mathbb{R}^n$, existe $M > 0$ tal que $\|x - \bar{x}\| \leq M \|\nabla f(x)\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

39. Sejam $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e defina $f(x) = \phi(Ax)$. Mostre que

$$\partial f(x) = A^T \partial \phi(Ax) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = A^T z, z \in \partial \phi(Ax)\}.$$

40. Seja $f : \mathbb{R}^n \to R$ uma função convexa. Mostrar que $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ é solução do problema de minimizar $\|d\|$ sujeito a $d \in \partial f(x)$ se, e somente se, $\bar{d} = 0$ ou $-\bar{d}/\|\bar{d}\|$ é a solução do problema de minimizar $f'(x; d)$ sujeito a $\|d\| \leq 1$.