Lista 5

1. Sejam $f, g, p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1$ não lineares, p e q lineares e considere o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) \leq 0,\, p(x) \leq 0,\, q(x) \leq 0\}$. Desenhar o gradiente de f e o conjunto D nas seguintes situações:

   a) x_* é um minimizador local de f em D tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ e um dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições lineares é zero.

   b) x_* é ponto regular (LICQ) tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ mas não é um minimizador local de f em D.

   c) x_* é um minimizador local de f em D tal que $g(x_*) = p(x_*) = 0$, $q(x_*) < 0$ mas não é um ponto regular de D.

2. Considere o conjunto viável D em $\mathbb{R}^2$ definido por $x_2 \geq 0, x_2 \leq x_1^2$.

   a) Determine o conjunto tangente e o núcleo do Jacobiano das restrições ativas em $x_* = (0, 0)$.

   b) x_* é um ponto regular (LICQ) ?

   c) Se a função objetivo é $f(x) = -x_2$, verifique que as condições KKT são satisfeitas em x_*.

   d) Construa uma sequência $\{z_k\}$ de pontos factíveis se aproximando de x_* tal que $f(z_k) < f(x_*)$ para todo k suficientemente grande.

3. Encontre o mínimo da função $f(x) = x_1 x_2$ no círculo unitário $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ilustre tal problema geometricamente. Em seguida, encontre o máximo de $f(x) = x_1 x_2$ sobre o disco unitário: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.

4. Uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ é dita *tangente* em $x_* \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) = 0,\, g(x) \leq 0\}$, se existe $\{x_k\} \subset D$ tal que $x_k \to x_*$ e $\dfrac{x_k - x_*}{\|x_k - x_*\|} \to \dfrac{d}{\|d\|}$. Mostre que se d é tangente em x_* então $\nabla h_i(x_*)^\top d = 0, \forall i$ e $\nabla g_j(x_*)^\top d \leq 0$ para todo j índice de restrição ativa em x_*.

5. Considere o problema de minimizar uma quadrática em uma bola $B(0, \Delta)$:

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_x & \frac{1}{2} x^\top B x + c^\top x \\ \text{s.a} & \|x\|_2^2 \leq \Delta^2. \end{array}$$

   Quais as condições de otimalidade para este problema? Quando a solução é única?

6. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ e $g_j(x) = a_j^T x - b_j$, para $j = 1, 2$.

(a) Mostre que, se num dado ponto x as restrições são ativas, $\{\nabla g_i(x)\}_{j=1}^2$ é L.I., e

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0,$$

com algum $\mu_j < 0$, então existe uma direção factível e de descida d a partir de x.

(b) Se em (a) todos os multiplicadores são não negativos e $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva, podemos afirmar que x é mínimo local?

7. Verifique que as condições KKT para o problema com restrições de caixa:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{s.a} & x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u\}, \end{array}$$

equivalem a condição

$$x - P_D(x - \nabla f(x)) = 0,$$

onde P_D denota a projeção sobre a caixa D.

8. Considere o problema de programação linear com variáveis livres:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x,y} & c^T x + d^T y \\ \text{s.a} & A_1 x + A_2 y = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Introduzindo multiplicadores de Lagrange λ para as igualdades e s para as desigualdades, escreva as condições de otimalidade deste problema.

9. Considere o problema de programação não-linear

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0, \\ & g(x) \leq 0, \end{array} \tag{1}$$

e sua reformulação:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x,s} & f(x) \\ \text{s.a} & h(x) = 0, \\ & g(x) + s = 0, \\ & s \geq 0. \end{array} \tag{2}$$

a) Escreva as condições KKT para (1) e (2) e estabeleça uma correspondência um-a-um entre os pontos KKT destes problemas.

b) Os multiplicadores z correspondentes às restrições de igualdade $g(x) + s = 0$ devem ser livres de sinal. Contudo, mostre que as condições KKT para (2) juntamente com $s \geq 0$, $z \geq 0$, podem ser vistas como condições KKT para (1). Mais ainda, mostre que os multiplicadores z podem ser vistos como multiplicadores de Lagrange para as desigualdades de (1).

c) Suponha que $\bar{x}$ é viável para (1). Mostre que $\bar{x}$ é regular se e somente se $(\bar{x}, \bar{s})$ é regular para (2), com $\bar{s} = -g(\bar{x})$.

d) Repita o item (c) usando a condição de Mangasarian-Fromovitz ao invés da regularidade.

10. Provar a equivalência das duas definições da condição de Mangasarian-Fromovitz vistas em aula.

11. Encontrar todos os valores do parâmetro $\sigma \in \mathbb{R}$ para tais que o ponto $\bar{x} = (\sqrt{3}/2+1, 1/2)^T$ é solução do problema

$$\begin{array}{ll} \min & \sigma x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1 \\ & (x_1-2)^2 + x_2^2 \leq 1. \end{array}$$

12. Sejam $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, q \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Provar que o conjunto de pontos KKT do problema de programação quadrática:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx \\ \text{s.a} & Bx \leq b \end{array}$$

é união de conjuntos poliedrais em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

13. Mostrar que o problema

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1+1)^3 \\ \text{s.a} & 0 \leq x_1 + x_2 \leq x_1^3 + \sigma \end{array}$$

tem soluções para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ e encontrar as soluções (locais e globais).

14. Usando a solução do problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\prod_{i=1}^m x_i \\ \text{s.a} & \displaystyle\sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

provar a desigualdade das médias aritmética e geométrica

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \beta_i \geq \left(\prod_{i=1}^m \beta_i\right)^{1/m}.$$

15. Considere o problema geral de otimização não-linear

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) & \\ \text{s.a} & h_i(x) = 0, & \text{para } i = 1, 2, \ldots, m \\ & g_j(x) \leq 0, & \text{para } j = 1, 2, \ldots, p. \end{array} \tag{P}$$

Suponha que x_* é factível e que existam multiplicadores de Lagrange (λ_*, μ_*) tais que as condições KKT são satisfeitas. Suponha também que

$$d^\top \nabla^2_{xx} \ell(x_*, \lambda_*, \mu_*) d > 0,$$

para toda direção d não-nula tal que

$$\nabla h_i(x_*)^\top d = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\nabla g_j(x_*)^\top d = 0, \quad \text{para todo } j \in \mathcal{I}(x_*), \text{tal que } \mu_j^* > 0,$$

e

$$\nabla g_j(x_*)^\top d \leq 0, \quad \text{para todo } j \in \mathcal{I}(x_*), \text{tal que } \mu_j^* = 0,$$

onde $\mathcal{I}(x_*)$ denota o conjunto de índices das restrições de desigualdade que são ativas em x_*. Mostre que x_* é minimizador local estrito de (P).

16. Se no problema (P) as funções f, g_j são diferenciáveis e convexas e as funções h_i são lineares/afins, mostre que todo ponto viável que satisfaz KKT é minimizador global do problema.

17. Encontre o dual do problema de otimização linear na forma padrão

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

18. Supondo que o primal tem apenas restrições lineares e função objetivo convexa, que sua região factível é vazia e que a região factível do dual é não vazia, mostre que o supremo da função objetivo dual é $+\infty$.

19. Considere o problema definido por $n = 1$, $m = 0$, $p = 1$, $f(x) = 0$, $g(x) = e^x$. Mostre que o primal é infactível mas o dual tem solução finita.

20. Mostre que se $(x^\star, \lambda^\star)$ cumprem as condições KKT para o problema de minimizar $f(x)$ sujeita a $Ax = b$, em que $f(x)$ é uma quadrática estritamente convexa, então $(x^\star, \lambda^\star)$ é ponto sela da função Lagrangiana $\ell(x, \lambda)$, isto é

$$\ell(x^\star, \lambda) \leq \ell(x^\star, \lambda^\star) \leq \ell(x, \lambda^\star), \quad \forall (x, \lambda).$$

21. Sejam $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, com funções componentes $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuas, e $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \geq 0\}$, com $\text{int}(D) \neq \emptyset$. Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, D limitado e defina a sequência $\{x_k\}$ gerada por

$$x_k = \arg \min_{x \in \text{int}(D)} \left(f(x) - t_k \sum_{i=1}^{p} \log(c_i(x)) \right),$$

em que $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ é uma sequência monótona decrescente e $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Prove que (i) $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ e (ii) todo ponto limite de $\{x_k\}$ é solução de

$$\min f(x), \quad \text{s.a} \quad x \in D.$$