

Atividade Computacional 1

1. A matriz de Hilbert A é definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & & 1/(2n-1) \end{bmatrix}.$$

A matriz de Hilbert é um exemplo de matriz que se torna extremamente mal-condicionada quando n aumenta. Verifique o número de condição de uma matriz de Hilbert A , para $n = 10, 100, 1000$.

2. Resolva o sistema linear onde $Ax = b$ em que A é a matriz de Hilbert de ordem n , o vetor b é última coluna de A , para $n = 10, 20, 40$. Verifique se seu “solver” realmente encontrou a solução

$$x^* = (0, 0, \dots, 0, 0, 1)^T.$$

3. Considere o sistema linear $Ax = b$ definido por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $\kappa_2(A)$. Encontre a solução de $Ax = b$ e compare com a solução do sistema perturbado $A(x + \delta x) = b + \delta b$, onde

$$b + \delta b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

4. A matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

surge na discretização do problema de valor de contorno: $u'' = f(x)$, $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$, e n é o número de pontos na discretização. Este é um exemplo de matriz tridiagonal (e esparsa). O que ocorre com $\kappa(A)$ a medida que n aumenta?