

Atividade Computacional 4

Parte 1

1. Considere o seguinte modelo matemático:

$$y(t) = 1 + t - 2t^2 + t^3, \quad (1)$$

para algum fenômeno físico. Encontre os valores de y para 101 instantes de tempo t no intervalo $[0, 1]$. Plote os pontos (t, y) .

2. Adicione um erro aleatório ao vetor y , isto é, obtenha

$$\tilde{y} = y + \varepsilon,$$

em que ε é um vetor aleatório com componentes da ordem de $\epsilon \approx 10^{-2}$.

3. Plote $(t, \tilde{y})$ e compare com o gráfico anterior.
4. Defina o sistema $Ax = b$, em que A é a matriz de Vandermonde associada ao modelo (1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & t_m^3 \end{bmatrix},$$

e $b = \tilde{y}$. Qual o posto(numérico) de A ?

5. Obtenha uma solução de quadrados mínimos para $Ax = b$. Tal solução é única? Justifique.
6. Seja x^* a solução do item anterior. Compare x^* com os parâmetros do modelo idealizado (1). Quão longe as componentes de x^* estão dos parâmetros daquele modelo?
7. Plote a curva do modelo definido por

$$\hat{y}(t) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + x_4t^3,$$

no mesmo gráfico do item (3).

Parte 2

Uma nutricionista precisa formular uma dieta para um determinado atleta. Ela tem à disposição 10 tipos de complementos que possuem 3 nutrientes, digamos, nutrientes A, B e C, em concentrações diferentes, conforme a tabela abaixo.

Nutriente(s)	Complementos									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	2	1	3	1	1	2	1	1
B	2	1	0	1	10	1	0	1	1	2
C	1	2	0	1	6	1	1	0	2	2

Ela determina que o atleta necessita em sua dieta de ao menos 100 unidades do nutriente A, 50 do B e 30 do C. No entanto, os complementos apresentam outras substâncias que podem causar efeitos colaterais caso um determinado complemento seja consumido em excesso. Suponha que, se x_j é a quantidade consumida do complemento j , então a probabilidade de ocorrer o efeito colateral j é x_j^2/N^2 , para qualquer complemento j , onde N^2 é uma constante de normalização. Suponha ainda que a ocorrência do efeito colateral i não influencia na ocorrência do efeito colateral j (eventos independentes).

1. Determine a quantidade de cada complemento de modo que as quantidades necessárias de nutrientes sejam atendidas e que a probabilidade de ocorrência de um efeito colateral seja minimizada. (*Atenção:* tome cuidado com o comando $\mathbf{x} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$).
2. Encontre agora a solução que satisfaça a demanda de nutrientes e tal que o *número de tipos* de complementos utilizados seja o menor possível.
3. Compare as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_1$ das duas soluções anteriores.
4. **Atenção:** os dados deste problema foram especialmente selecionados para que as respectivas soluções dos sistemas lineares possuam componentes não-negativas. Para dados gerais, qual o problema de otimização deveria ser resolvido ?