

Lista 5

1. Prove ou dê um contra-exemplo.
 - a) $N(A) = N(A^T A)$.
 - b) $R(A^T) = R(A^T A)$.
2. Mostre que os autovalores de $A^T A$ e AA^T são todos não-negativos.
3. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

é não singular.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Qual é a relação entre os autopares de A e A^{-1} ?
5. Sejam (λ_1, v_1) e (λ_2, v_2) autopares de A , tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.
6. Mostre que se A é Hermitiana, então seus autovalores são reais.
7. Sejam (λ_1, v_1) e (λ_2, v_2) autopares de uma matriz Hermitiana A , tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são ortogonais.
8. Sejam A e C matrizes quadradas e $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Prove que $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$.
9. Mostre que se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes similares, então A, B possuem os mesmos autovalores. O que pode-se dizer dos autovetores?
10. Prove ou dê um contra-exemplo:
 - a) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda + \mu \in \sigma(A + B)$.
 - b) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda\mu \in \sigma(AB)$.
 - c) Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz ortogonal, então $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.
 - d) Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui todos os autovalores iguais, então $A = \alpha I$.
11. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores de A , e seja (λ_k, v_k) um autopar de A .
 - a) Se μ não pertence a $\sigma(A)$, mostre que $(A - \mu I)^{-1} v_k = \frac{v_k}{\lambda_k - \mu}$.
 - b) Determine um vetor d de modo que λ_k seja autovalor de $A + v_k d^T$.
12. Dizemos que $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$ é o raio espectral de A , isto é, o maior autovalor em módulo de A . Prove que $\rho(A) \leq \|A\|$, onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma matricial consistente.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ onde $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se,

$$\mathbb{R}^n = N(A - \lambda_1 I) \oplus N(A - \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus N(A - \lambda_s I).$$

14. Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$, prove que A e B possuem um autovetor em comum.
15. Sejam $c, d \in \mathbb{R}^n$ não nulos. Prove que a matriz $A = cd^T$ é diagonalizável se, e somente se, $d^T c \neq 0$.
16. Prove que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável se, e somente se, $\text{mult. geo}_A(\lambda_i) = \text{mult. alg}_A(\lambda_i)$ para todo autovalor λ_i de A .
17. Mostre que traço de A é igual a soma de seus autovalores.

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Defina $r(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$. Mostre que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_1, \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} r(x) = \lambda_n,$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ são os autovalores de A .

19. Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz Hermitiana e $\{(\lambda_1, v_1), \dots, (\lambda_n, v_n)\}$ os autopares de A . Defina

$$q = \sum_{i=1}^n c_i v_i,$$

com $\|q\| = 1$.

- Prove que $\sum_{i=2}^n |c_i|^2 \leq \|v_1 - q\|^2$.
 - Forneça uma expressão para o número $\mu = q^H A q$ em função de c_i e λ_i .
 - Prove que $|\lambda_1 - \mu| \leq \beta \|v_1 - q\|^2$, onde $\beta = \max_{2 \leq i \leq n} |\lambda_1 - \lambda_i|$.
20. Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal tem autovalores reais se e somente se A é simétrica.
21. Prove que os autovalores de uma matriz anti-simétrica são imaginários puros.
22. Mostre que uma matriz triangular T é normal se e somente se T é diagonal.
23. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, positiva-definida então $a_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
24. Se A é uma matriz normal, mostre que (λ, x) é autopar de A se e somente se $(\bar{\lambda}, x)$ é autopar de A^H .
25. Mostre que A é simétrica, positiva-definida se e somente se $A = B^T B$ para alguma B não-singular.
26. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é dita nilpotente de ordem k se $A^k = 0$. Se $A^{k-1}u \neq 0$, mostre que o conjunto $\{u, Au, A^2u, \dots, A^{k-2}u, A^{k-1}u\}$ é linearmente independente.
27. Mostre que se A e B são unitariamente similares (e não-singulares) então $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$.