Atividade Computacional 1

1. A matriz de Hilbert A é definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & & 1/(2n-1) \end{bmatrix}.$$

   A matriz de Hilbert é um exemplo de matriz que se torna extremamente mal-condicionada quando n aumenta. Verifique o número de condição de uma matriz de Hilbert A, para $n = 10, 100, 1000$.

2. Resolva o sistema linear onde $Ax = b$ em que A é a matriz de Hilbert de ordem n, o vetor b é última coluna de A, para $n = 10, 20, 40$. Verifique se seu "solver" realmente encontrou a solução

$$x^* = (0, 0, \dots, 0, 0, 1)^T.$$

3. Considere o sistema linear $Ax = b$ definido por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Determine $\kappa_2(A)$. Encontre a solução de $Ax = b$ e compare com a solução do sistema perturbado $A(x + \delta x) = b + \delta b$, onde

$$b + \delta b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que $\dfrac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

4. Implemente o processo de *back-substitution* para resolver um sistema linear com matriz A triangular superior.

$$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)/a_{ii}, \quad \text{para} \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1.$$

5. Utilize o comando `rand` do `Julia`, para gerar uma matriz aleatória B de ordem n. Em seguida, defina A como sendo a parte triangular superior de B através do comando `triu`. Faça $b = A\mathbf{1}$, em que $\mathbf{1}$ é um vetor de uns de dimensão apropriada. Teste a rotina implementada no item anterior.