

Atividade Computacional 5

Uma matriz $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, com entradas não-negativas e diagonal nula, é chamada de “Matriz de distâncias Euclidianas” se existe um inteiro positivo d e vetores $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ tais que $D_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

É possível mostrar que D simétrica, com entradas não-negativas e diagonal nula é matriz de distâncias Euclidianas se, e somente se, a matriz $G = -\frac{1}{2}JDJ$ é simétrica e positiva semidefinida, em que $J = I - \frac{1}{n}ee^T$, e denota o vetor de uns de \mathbb{R}^n . Sendo G simétrica e positiva semidefinida, o menor d para o qual $D_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2$, para todo $i, j = 1, \dots, n$ é $d = r = \text{posto}(G)$, e um conjunto correspondente de vetores \mathbf{x}_i são dados pelas colunas de uma matriz

$$X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{r \times n},$$

obtida de $X = \sqrt{\Lambda_r}Q_r^T$, em que $G = Q\Lambda Q^T$ é a decomposição espectral de G : supondo que a matriz diagonal Λ é organizada de modo que sua diagonal contenha os autovalores ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, Λ_r denota a primeira submatriz principal líder $r \times r$ de Λ associada aos r maiores autovalores e Q_r é a matriz obtida das r colunas de Q associadas.

1. Gere um conjunto de 100 pontos aleatórios \mathbf{x}_i em $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, calcule a matriz de distâncias correspondente $D_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2$, para todo $i, j = 1, \dots, n$ e organize os vetores \mathbf{x}_i como colunas de uma matriz X de dimensão 2×100 .
2. Calcule G como descrito acima e obtenha $Y = \sqrt{\Lambda_r}Q_r^T$.
3. Defina $X_c = XJ$ e $Y_c = YJ$. Resolva o problema de otimização

$$\min \{ \|UY_c - X_c\|_F^2 : U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, UU^T = I_2 \}.$$

4. Dada a solução U do problema acima, calcule $Z = UY_c$ e plote em uma figura os pontos \mathbf{x}_i^c representados por \circ e os pontos z_i representados por \times .

Prazo: até 16/06/2025.