

Lista 2

1. Mostre que se $\|\cdot\|$ é uma norma matricial induzida então $\|I\| = 1$. A norma de Frobenius é uma norma induzida?
2. Mostre que se A é não-singular e $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, então o sistema perturbado

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

tem solução única e

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

3. Seja A uma matriz não-singular. Exiba uma matriz δA , tal que

$$\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{1}{\kappa_2(A)},$$

e $A + \delta A$ é singular.

4. Seja A uma matriz não singular de ordem n . Se C e D são matrizes $n \times k$, $k < n$, tais que $(I + D^T A^{-1} C)^{-1}$ existe, verifique a fórmula de *Sherman-Morrison-Woodbury*:

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1}C)^{-1}D^T A^{-1}.$$

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Exiba uma matriz elementar $E = I - uv^T$, tal que $\tilde{A} = EA$ é a matriz A cuja j -ésima linha recebeu a soma das linhas i e j de A .
6. Seja $T_k = I - c_k e_k^T$, onde e_k é o k -ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$ e $c_k = (0, \dots, 0, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n)^T$.
 - (a) Mostre que T_k é não singular e triangular inferior.
 - (b) Encontre T_k^{-1} e mostre que esta também é triangular inferior.
 - (c) Prove que $L_k = T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_k^{-1} = I + c_1 e_1^T + \dots + c_k e_k^T$.

7. Prove que o produto de matrizes triangulares inferiores resulta em uma matriz triangular inferior.
8. Prove que a inversa de uma matriz triangular inferior é também triangular inferior.
9. Encontre os autovalores e autovetores de uma matriz triangular inferior.
10. Se A possui todos os menores principais não nulos, forneça uma expressão para A^{-1} como o produto de matrizes triangulares.
11. Construa um exemplo de matriz não-singular simétrica que não possua fatoração LU. Também construa um exemplo de matriz não-singular simétrica que possua fatoração LU, mas não é definida positiva.

12. Seja A uma matriz simétrica que admite fatoração LU (sem pivoteamento). Mostre que $A = LDL^T$ onde D é uma matriz diagonal.
13. Seja P uma matriz de permutação. Mostre que $P^T = P^{-1}$ e que $\det(P) = \pm 1$.
14. Considere a matriz tridiagonal:

$$T = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Quais as condições para que exista a fatoração LU de T ?
- (b) Encontre a decomposição LU de T .
- (c) Generalize o resultado anterior para matrizes tridiagonais de ordem n .
15. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e todos seus menores principais são positivos então A é definida positiva.
16. Prove que se A é simétrica positiva definida então todos seus autovalores são positivos.
17. Prove que se A é diagonalmente dominante, com elementos positivos na diagonal, então A é definida positiva.
18. Assumindo A não-singular, descreva um procedimento para resolver o sistema matricial $AX = B$, onde A, B, X são matrizes de ordem n .
19. Se A é simétrica positiva definida e C é não singular, mostre que $B = C^T A C$ é também simétrica positiva definida.
20. Se $A = G^T G$, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz generalizada:

$$|x^T A y|^2 \leq (x^T A x)(y^T A y).$$

21. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita positiva semidefinida se $x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se A é positiva semidefinida então:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\leq (a_{ii} + a_{jj})/2, \\ |a_{ij}| &\leq \sqrt{a_{ii} a_{jj}}, \quad \forall i \neq j \\ \max_{i,j} |a_{ij}| &= \max_i a_{ii}, \\ a_{ii} = 0 &\Rightarrow A(i, :) = 0, \quad A(:, i) = 0. \end{aligned}$$

22. Seja A uma matriz simétrica positiva semidefinida. Existe fator R tal que $A = R^T R$? R é único?
23. Seja A uma matriz simétrica positiva definida. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

é definida positiva se e somente se A e $C - B^T A^{-1} B$ são definidas positivas.