Lista 4

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular, e $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Mostre que $A(\mathcal{S})$ define um elipsóide em $\mathbb{R}^n$ (Exiba a equação que define tal elipsóide). Qual o tamanho dos semi-eixos deste elipsóide ?

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular, com valores singulares $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$. Mostre que $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$.

3. Mostre que $\kappa_2(A^TA) = \kappa_2(A)^2$.

4. Se $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$, mostre que $\{P_i\}_{i=1}^r$, onde $P_i = u_i v_i^T$, é um conjunto ortonormal com respeito ao produto interno do traço.

5. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $p = \min\{m, n\}$, sejam $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ e $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ os valores singulares de A e $A + E$, respectivamente. Prove que

$$|\sigma_k - \beta_k| \leq \|E\|_2, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, p.$$

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com posto $r < \min\{m, n\}$. Use a SVD de A para mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe uma matriz de posto completo A_ϵ tal que $\|A - A_\epsilon\|_2 < \epsilon$.

7. Prove ou dê um contra-exemplo: A e B são unitariamente similares se e somente se seus valores singulares são os mesmos.

8. Mostre que para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i$.

9. Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possua SVD: $A = U\Sigma V^H$. Encontre uma decomposição em autovalores da matriz Hermitiana $2n \times 2n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^H \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Determine (no papel) a SVD de A na forma $A = U\Sigma V^T$. A SVD não é única, então encontre aquela que possui o menor número de sinais negativos em U e V.
b) Liste os valores singulares, e vetores singulares a esquerda e a direita. Ilustre a atuação de A sobre os vetores da bola unitária (norma-2) em $\mathbb{R}^2$.
c) Obtenha as normas 1-,2-,∞- e de Frobenius de A.
d) Encontre A^{-1} via SVD.
e) Encontre os autovalores de A.
f) Verifique que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ e $|\det(A)| = \sigma_1\sigma_2$.
g) Qual a área da elipse na qual A mapeia a bola unitária em $\mathbb{R}^2$?

11. Considere o problema $\min \|Ax - b\|_2$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Suponha que o posto de A é $r < n$ e que a SVD de A, $A = U\Sigma V^T$, está disponível. Descreva o procedimento para obter a solução de norma-2 mínima do problema.

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Usando a decomposição em valores singulares de A, determine a decomposição espectral das matrizes A^TA e AA^T. Como os autovalores destas matrizes se relacionam com os valores singulares de A ?

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que os valores singulares de $\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}^+$ são da forma $1/\sqrt{1+\sigma_i^2}$, onde σ_i é um valor singular de A.

14. Explique porque uma matriz não singular $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pode ser decomposta em $A = RU$, onde R é Hermitiana, positiva definida, e U unitária. Está é conhecida como *decomposição polar* de A, e é uma generalização da conhecida identidade $z = re^{i\theta}$ para números complexos.

15. Qual é a matriz de posto 1 mais próxima de $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ na norma de Frobenius?

16. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Encontre a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz $A = xy^T$. Qual a decomposição em valores singulares de A ?

17. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é tal que $A^T = -A$, então $I - A$ é não singular e a matriz $Q = (I - A)^{-1}(I + A)$ é ortogonal. A matriz Q é conhecida como *transformada de Cayley* de A.

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \geq n$ e posto completo. Usando as decomposições QR e SVD, mostre que
$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = R^{-1}Q^T = V\Sigma^+U^T.$$

19. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b, c \in \mathbb{R}^m$. Sejam x^* e y^* as soluções de quadrados mínimos de norma-2 mínima de $Ax = b$ e $Ay = b + c$, respectivamente. Seja $\bar{\sigma}$ o menor valor singular não nulo de A. Mostre que $\|x^* - y^*\|_2 \leq \|c\|_2/\bar{\sigma}$.

20. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mostre que a solução do seguinte problema
$$\min_{Z \text{ é unitária}} \|A - Z\|_F,$$
é a matriz $Z = UV^H$, onde $A = U\Sigma V^H$ é a SVD de A.