Lista 6

1. Considere o PL:

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{s. a} & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) Encontre uma solução básica factível ótima.
   b) Quanto os elementos de $b = (4, 3, 3)^T$ podem mudar, sem que a base ótima mude?
   c) Quanto os elementos de $c = (2, 4, 1, 1)^T$ podem mudar, sem que a base ótima mude?
   d) O que ocorre com o custo ótimo para pequenas mudanças em b ?
   e) O que ocorre com o custo ótimo para pequenas mudanças em c ?

2. Determine uma base ótima para o problema da Questão 1 da Lista 5. Suponha que a função objetivo foi alterada para: $(1+\gamma)x_1 + (\gamma - 2)x_2$. Para que valores de $\gamma \geq 0$, a base ótima encontrada continua ótima?

3. Considere um PL primal na forma padrão. Suponha que este problema e seu dual são viáveis. Seja y uma solução ótima para o dual.

   a) Se a k-ésima equação do primal é multiplicada por $\mu \neq 0$, determine a solução ótima $\hat{y}$ do dual deste novo problema.

   b) Suponha que no primal, adicionamos μ vezes a k-ésima equação à r-ésima equação. Qual é a solução ótima $\hat{y}$ do dual correspondente?

   c) Suponha que adicionamos μ vezes a k-ésima linha de A ao vetor de custos c. Qual é a solução ótima para o dual correspondente?

4. Uma fábrica têxtil é capaz de produzir três produtos em quantidades x_1, x_2, x_3. Seu plano de produção para o próximo mês deve satisfazer as restrições

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq f \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

   A primeira restrição é determinada por disponibilidade de equipamentos e é fixa. A segunda é determinada pela disponibilidade f de algodão. Os lucros dos produtos são 2, 3 e 3, respectivamente, já descontados os custos de algodão e custos fixos.

   a) Encontre o "preço sombra" y_2 (variável dual ótima) em função do parâmetro f (Dica: use o dual-simplex). Plote $y_2(f)$ e o lucro $z(f)$ descontando o custo do algodão.

   b) A fábrica normalmente compra algodão no mercado a um preço $1/6$. Contudo, ela descobriu um novo fornecedor que vende algodão a $1/12$. Determine o lucro da fábrica $\pi(s)$ em função do preço do algodão s.

5. Uma empresa produz n produtos diferentes, cada um usando quantidades de m recursos limitados. Cada unidade do produto i gera um lucro c_i e usa a_{ji} unidades do recurso j. A quantidade disponível de recurso j é b_j. Para maximizar o lucro, a empresa seleciona quantidades x_i de cada produto resolvendo o PL

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Os lucros unitários c_i já levam em conta o custo variável associado a produção de cada unidade. Além disso, a empresa tem um custo fixo adicional H que ela gostaria de alocar no custo de cada um de seus produtos. Tal alocação deve satisfazer duas condições: (i) a alocação não deve alterar a solução ótima do PL, (ii) todo o custo fixo deve ser alocado, isto é, o valor ótimo do objetivo com os coeficientes de custo modificados deve ser H reais menor que o valor ótimo original z_0.

a) Considere o esquema de alocação no qual os lucros são modificados por $\hat{c}^\top = c^\top - r y_0^\top A$, em que y_0 é a solução ótima para o dual original e $r = H/z_0$ (assumindo $H \leq z_0$). Mostre que a solução ótima x para o problema modificado é a mesma do problema original e a nova solução dual é $\hat{y}_0 = (1-r)y_0$. Mostre que esta abordagem aloca completamente H.

b) Suponha que o custo fixo adicional pode ser associado a cada restrição de recurso. Seja $H_i \geq 0$ a quantidade do custo adicional associado ao recurso i, tal que $\sum_{i=1}^m H_i \leq z_0$ e $r_i = H/b_i \leq (y_0)_i$, para $i = 1, \ldots, m$. Com isso, outra possível alocação é dada por $\hat{c}^\top = c^\top - r^\top A$. Mostre que a solução ótima x continua a mesma e que a solução dual correspondente é $\hat{y}_0 = y_0 - r$. Mostre que este esquema aloca completamente H.

6. Uma empresa de tintas produz "cores exóticas" C_1, C_2, C_3, C_4 através da mistura de três cores básicas: vermelho, azul e amarelo. Há 26kg de tinta vermelha, 14kg de tinta azul e 32kg de tinta amarela. A receita para produção de 1kg das cores C_1, C_2, C_3, C_4 é:

	Vermelho	Azul	Amarelo
C_1	1/2	1/4	1/4
C_2	3/8	1/4	3/8
C_3	1/3	1/3	1/3
C_4	3/10	2/5	3/10

O departamento de vendas sabe que os lucros na venda de 1kg das tintas C_1, C_2, C_3, C_4 são 3, 4, 1, e 6, respectivamente.

a) Decida quanto de cada uma das tintas deve ser produzido pela empresa para maximizar o lucro. Guarde a base ótima.

b) A empresa está comprando a quantidade apropriada de tintas básicas? Como estas quantidades podem modificar o lucro? Encontre e interprete o preço sombra dos três recursos.

c) O departamento de vendas suspeita que não há tinta azul suficiente. Encontre a quantidade máxima de tinta azul para a qual a base ótima do item (a) continua ótima.

d) Suponha que a empresa decide comprar mais tinta azul e menos tinta vermelha e amarela, de modo que o novo vetor do lado direto é $b'^\top = (24, 20, 31)$. Qual a quantidade ótima das tintas C_1, C_2, C_3, C_4 a ser produzida neste caso?