

Teoria de Galois

Lista 1

- 1) Seja R um anel (comutativo) com unidade. Mostre que o anel polinomial $R[x]$ também é um anel (comutativo) com unidade.
- 2) Mostre que o conjunto dos elementos invertíveis em $R[x]$ (denotado por $R[x]^\times$) coincide com os elementos invertíveis de R (denotado por $R^\times$).
- 3) Mostre que o anel de polinômios $\mathbb{K}[x]$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo, é um domínio de ideais principais.
- 4) Seja R um anel comutativo com unidade. Mostre que o quociente R/I é um corpo (um domínio), se, e somente se, I é um ideal maximal (ideal primo).
- 5) Mostre que um domínio finito é um corpo.
- 6) Mostre que um ideal $\langle p(x) \rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[x]$ é ideal maximal se, e somente se, $p(x)$ for irredutível, isto é, $p \neq 0$, p não é invertível e se $p = q.r$, então q ou r é invertível.
- 7) Mostre que em um domínio principal R , um elemento $a \in R$ é irredutível se, e somente se for primo, isto é, $a \neq 0$, $a \notin R^\times$ e se $a|bc$, então $a|b$ ou $a|c$.
- 8) Mostre a propriedade universal do anel de polinômios, conforme enunciado em aula.
- 9) Seja $\varphi : R \rightarrow S$ um morfismo de anéis, mostre que este morfismo se estende de maneira única como morfismo de anéis $\widehat{\varphi} : R[x] \rightarrow S[x]$. Mostre que $R[x] \cong S[x]$ se, e somente se $R \cong S$.
- 10) Verifique que a aplicação $()^b : R[x] \rightarrow \text{Fun}(R, R)$ que associa a cada polinômio a sua função polinomial correspondente (conforme visto em aula) realmente é um morfismo de anéis.