Teoria de Galois
Lista 1

1) Seja R um domínio de integridade, a característica de R é o menor inteiro positivo n tal que $\underbrace{1 + \cdots + 1} = 0$, onde a soma é de n termos. Se não existir tal $n > 0$ dizemos que a característica é igual a zero. Mostre que se a característica de R é finita, então é um número primo. Mostre que se a característica de R é igual a zero, então R contém uma cópia dos números inteiros como sub-anel.

2) Seja $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ uma extensão de corpos e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{E}$, mostre que

$$\mathbb{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{F}(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(n-1)})(\alpha_{\sigma(n)}),$$

em que $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ é uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$.

3) Seja R um domínio de integridade. O corpo de frações associado a R, denotado por $\mathrm{Fr}(R)$, é o menor corpo que contém R, isto é, existe um monomorfismo de anéis $\imath : R \to \mathrm{Fr}(R)$ e se $\mathbb{K}$ é um corpo e $\varphi : R \to \mathbb{K}$ é um monomorfismo de anéis, então existe um único morfismo de anéis $\widehat{\varphi} : \mathrm{Fr}(R) \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi = \widehat{\varphi} \circ \imath$.

a) Mostre que, se existir, $\mathrm{Fr}(R)$ é único a menos de isomorfismo.

b) Mostre que a relação em $R \times R^*$, onde $R^* = R\backslash\{0\}$, dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se $ad = bc$. mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

c) Denotando por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência do par (a, b) defina as operações no quociente $(R \times R^*)/\sim$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Mostre que as operações estão bem definidas, isto é, independem de representante na classe de equivalência.

d) Mostre que $(R \times R^*)/\sim$ com as operações acima definidas é um corpo.

e) Mostre que a aplicação $\imath : R \to (R \times R^*)/\sim$, dada por $\imath(a) = \frac{a}{1}$ é um monomorfismo de anéis.

f) Mostre que $(R \times R^*)/\sim$ satisfaz à prorpiedade universal do corpo de frações de R e conclua que $(R \times R^*)/\sim \cong \mathrm{Fr}(R)$.

g) Mostre que, se R for um corpo, então $\mathrm{Fr}(R) \cong R$.

4) Denominamos o subcorpo primitivo de $\mathbb{F}$ como o menor subcorpo de $\mathbb{F}$. Mostre que, se a característica de $\mathbb{F}$ é igual a zero, então o seu subcorpo primitivo é isomorfo a $\mathbb{Q}$. Se a característica de $\mathbb{F}$ for um número primo p, então o seu subcorpo primitivo é isomorfo a $\mathbb{F}_p$.

5) Sejam $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$ dois subcorpos de $\mathbb{E}$. Defina o "compositum" de $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$, denotado por $\mathbb{F}\mathbb{K}$, como

$$\mathbb{F}\mathbb{K} = \left\{ \frac{\sum_i a_i b_i}{\sum_j a'_j b'_j} \mid a_i a'_j \in \mathbb{F} b_i b'_j \in \mathbb{K}, \sum_j a'_j b'_j \neq 0 \right\}.$$

a) Mostre que $\mathbb{F}\mathbb{K}$ é o menor subcorpo de $\mathbb{E}$ que contém $\mathbb{F}$ e $\mathbb{K}$.

b) Sejam $\mathbb{F} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{L}$ e $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Mostre que se $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ é finita (resp. algébrica, resp. finitamente gerada), então $\mathbb{F}\mathbb{K} \subset \mathbb{E}\mathbb{K}$ é finita (resp. algébrica, resp. finitamente gerada.