Teoria de Galois
Lista 3

1) Seja $\mathbb{F}$ um corpo finito de característica p. Mostre que a cardinalidade de $\mathbb{F}$ é igual a p^n para algum $n \geq 1$. (sugestão, se $\mathbb{F}$ é finito, então deve ser extensão finita sobre $\mathbb{F}_p$).

2) Determine o grau da extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$.

3) Mostre que $[\mathbb{Q}(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}) : \mathbb{Q}] = 1$.

4) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

5) Seja $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ uma extensão de grau n.

a) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, mostre que a multiplicação à esquerda por α pode ser vista como uma transformação $\mathbb{F}$-linear em $\mathbb{K}$.

b) Com isto, mostre que $\mathbb{K}$ é um subcorpo do anel de matrizes $M_n(\mathbb{F})$. Então, $M_n(\mathbb{F})$ contém todas as extensões de $\mathbb{F}$ de grau $\leq n$.

c) Se a matriz da transformação linear "multiplicação à esquerda por α" for denotada por A, mostre que α é raiz do polinômio característico de A.

d) Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, onde $D \in \mathbb{Z}$ é um inteiro sem fator quadrático. Mostre que, para $\alpha = a+b\sqrt{D} \in \mathbb{K}$ a matriz A é dada por $\begin{pmatrix} a & bD \\ b & a \end{pmatrix}$. Mostre também que a aplicação $a+b\sqrt{D} \mapsto \begin{pmatrix} a & bD \\ b & a \end{pmatrix}$ é um isomorfismo entre $\mathbb{K}$ e um subcorpo de $M_2(\mathbb{Q})$.

6) Determine o corpo de decomposição e o grau da extensão sobre $\mathbb{Q}$ de x^4-2, x^4+2, x^4+x^2+1, x^6-4.

7) Seja $\mathbb{F}$ e sejam $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ e $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}$ duas extensões finitas tais que $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ sejam corpos de decomposição, respectivamente, de uma família de polinômios Λ_1 e Λ_2 em $\mathbb{F}[x]$.

a) Mostre que $\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2$ também é corpo de decomposição de alguma família de polinômios de $\mathbb{F}[x]$.

b) Mostre que $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$ também é corpo de decomposição de alguma família de polinômios de $\mathbb{F}[x]$.

c) Conclua que o compositum e a intersecção de extensões normais também é uma extensão normal.