Teoria de Galois
Lista 5

1) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ não são isomorfos.

2) Descreva o reticulado de subcorpos e o reticulado de subgrupos de automorfismos das seguintes extensões:

a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,

c) Corpo de decomposição de $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$,

3) Mostre que o grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_{p^n})$ é um grupo cíclico de ordem n. (Sugestão: verifique o subgrupo cíclico gerado pelo isomorfismo de Frobenius)

4) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo gerado sobre $\mathbb{F}$ pelos elementos α_1,..., α_n (isto é, $\forall x \in \mathbb{K}$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, com $a_i \in \mathbb{F}$) então um automorfismo $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{K})$ está unicamente determinado pelos valores $\sigma(\alpha_1)$, ..., $\sigma(\alpha_n)$.

5) Seja $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ uma extensão Galoisiana. Seja $G \leq \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E}) = \mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ e suponha que σ_1, ..., σ_n sejam os geradores de G. Mostre que um subcorpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{E}$ é fixo por G, se, e somente se é fixo por todos os geradores σ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

6) Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

a) Mostre que a aplicação $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$, definida como $\varphi(p(x)) = p(ax + b)$ para $a, b \in \mathbb{K}$ e $a \neq 0$ é um automorfismo do anel $\mathbb{K}[x]$ que restrito a $\mathbb{K}$ é a identidade.

b) Por outro lado seja $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ um automorfismo tal que $\varphi|_{\mathbb{K}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$, mostre que existem $a, b \in \mathbb{K}$ com $a \neq 0$ tal que $\varphi(p(x)) = p(ax + b)$.

7) Considere a extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e seja $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$.

a) Mostre que σ fixa $\mathbb{Q}$.

b) Mostre que σ leva quadrados em quadrados e números positivos em números positivos. Conclua que se $x < y$ em $\mathbb{R}$, então $\sigma(x) < \sigma(y)$.

c) Mostre que, se $-\frac{1}{m} < a - b < \frac{1}{m}$, então $-\frac{1}{m} < \sigma(a) - \sigma(b) < \frac{1}{m}$, para qualquer inteiro positivo m. Conclua com isto que σ é uma aplicação contínua em $\mathbb{R}$.

d) Mostre que $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, e portanto $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$.

8) Mostre que os automorfismos do corpo $\mathbb{K}(t)$ que fixam $\mathbb{K}$ são exatamente as "transformações lineares fracionárias" (ou transformações de Möbius), ou seja,

$$f(t) \mapsto f\left(\frac{at + b}{ct + d}\right),$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ e $ad - bc \neq 0$.

9) Seja $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ um isomorfismo que mapeia um subcorpo $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ em um subcorpo $\mathbb{E} \subset \mathbb{L}$, mostre que φ induz um isomorfismo de grupos $\phi : \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{E}}(\mathbb{L})$ dado por $\phi(\sigma) = \varphi\sigma\varphi^{-1}$.