UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

# INTRODUÇÃO À TEORIA DE GALOIS

# EXTENSÕES GALOISIANAS INFINITAS

PAULA SAVANA ESTÁCIO MOREIRA

Professor: Eliezer Batista

Florianópolis, 06 de julho de 2016.

# 1 Introdução

Uma das consequências mais importantes da teoria de Galois é o Teorema da Correspondência. Este estabelece uma correspondência um a um entre os corpos intermediários de uma extensão de corpos finita e galoisiana $E$ sobre $F$ e os subgrupos de seu grupo de Galois.

Este relato tem como motivação apresentar um resultado análogo ao Teorema da Correspondência para extensões algébricas, que não necessariamente são finitas. Para tanto, será necessário definir uma estrutura topológica sobre o grupo de Galois, chamada Topologia de Krull. Desse modo, a correspondência para o Teorema Fundamental da Teoria de Galois Infinita só se dará para os subgrupos do grupo de Galois fechados da topologia.

# 2 Extensões Galoisianas Infinitas

As duas primeiras seções deste trabalho servirão para que se compreenda a estrutura do corpo de Galois munido com a topologia de Krull, além de alguns lemas para que o teorema fundamental seja demonstrado.

## 2.1 Espaços Topológicos

Neste tópico serão enunciados alguns conceitos e teoremas topológicos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

**Definição 2.1.** *Uma* ***topologia*** *em um conjunto $X$ é uma coleção $T$ de subconjuntos de $X$, chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia $T$) satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$\emptyset$ é aberto, isto é, $\emptyset \in T$;*

2. *$X$ é aberto, isto é, $X \in T$;*

3. *A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um aberto, isto é, se $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in T$, então $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in T$.;*

4. *A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto, ou seja, se $\{U_i\}_{i\in I} \in T$, com $I = \{1, ..., n\}$, então $\bigcap_{i\in I} U_i \in T$.*

   *O par $(X, T)$ é chamado* ***espaço topológico****, onde $X$ é um conjunto e $T$ é uma topologia em $X$.*

**Definição 2.2.** *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ de um espaço topológico $X$ em um espaço topológico $Y$ diz-se* ***contínua*** *quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subseteq Y$ for um aberto em $X$.*

**Definição 2.3.** *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ de um espaço topológico $X$ em um espaço topológico $Y$ diz-se* ***contínua em a*** *$\in X$ quando para cada aberto $B$ de $Y$ com $f(a) \in B$, existir um aberto $A$ de $X$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subseteq B$. Sendo* ***contínua*** *se for contínua em todo ponto de $X$.*

**Definição 2.4.** *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ de um espaço topológico $X$ em um espaço topológico $Y$ é um* ***homeomorfismo*** *se for uma bijeção contínua com inversa contínua.*

**Definição 2.5.** *Um conjunto em um espaço topológico diz-se* ***fechado*** *se seu complementar for aberto.*

**Definição 2.6.** *O* ***fecho*** *$\overline{B}$ de um conjunto $B \in X$ é a interseção de todos os fechados que o contêm.*

**Observação 2.1.** *Seja $b \in \overline{B}$, então se $U$ é um aberto de $X$, com $b \in U$, tem-se que $U \cap B \neq \emptyset$.*

**Definição 2.7.** *Seja $x \in X$. Um conjunto $N \subseteq X$ é uma* ***vizinhança*** *de $x$ se existe um aberto $U$ de $X$, tal que:*

$$x \in U \subseteq N.$$

**Definição 2.8.** *Seja $G$ um espaço topológico. Um* ***sistema fundamental de vizinhanças de $x$*** *$\in G$ é uma coleção $V_G(x)$ de vizinhanças de $x$ com a seguinte propriedade: dado qualquer aberto $U$ de $G$ que contenha $x$, existe uma vizinhança $N_G \in V_G(x)$ tal que $N_G \subseteq U$.*

**Observação 2.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, $V_X(a)$ um sistema fundamental de vizinhanças em $a \in X$ e $V_Y(f(a))$ um sistema fundamental de vizinhanças em $f(a) \in Y$. Para que $f$ seja* ***contínua*** *em $a$ é necessário e suficiente que dada $N_Y \in V_Y(f(a))$, exista uma vizinhança $N_X \in V_X(a))$, tal que $f(N_X) \subseteq N_Y$.*

**Definição 2.9.** *Seja $A \subseteq X$. Uma* ***cobertura de $A$*** *é uma coleção de subconjuntos de $X$ cuja união contém $A$; se cada subconjunto é um aberto de $X$, esta é chamada uma* ***cobertura aberta de $A$.***

**Definição 2.10.** *Um conjunto $K$ é dito* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de $K$ contiver uma subcoleção finita que também forma uma cobertura aberta de $K$.*

**Exemplo 2.1.** *Seja $K = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito e seja $\mathbb{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma coleção de conjuntos abertos , sendo $J$ conjunto de índices, tais que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J}\{F_\alpha\}$, ou seja, $\mathbb{F}$ é uma cobertura aberta de $K$. Para $i = \{1, ..., n\}$, seja $F_i \in \mathbb{F}$ tal que $x_i \in F_i$, tal conjunto existe, pois $\mathbb{F}$ é cobertura de $K$. Então $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, cobertura finita de $K$. Logo, $K$ é compacto.*

**Definição 2.11.** *Um conjunto $H \subseteq X$ é dito* ***Hausdorff*** *se para quaisquer $x, y \in H$, existem $U, V$ abertos de $X$, tal que:*

$$x \in U \subseteq H,$$

$$y \in V \subseteq H$$

*e,*

$$U \cap V = \emptyset.$$

**Teorema 2.1.** ***Teorema de Tychonov*** *O produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é compacto se, e somente se, cada fator $X_\lambda$ é compacto.*

## 2.2 Grupos Topológicos

**Definição 2.12.** *Um conjunto $G$ munido de uma estrutura de grupo e uma topologia é um* ***grupo topológico*** *se as aplicações:*

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, h) \longmapsto gh$$

*e,*

$$\psi : G \longrightarrow G$$

$$g \longmapsto g^{-1}$$

*são ambas* ***contínuas.***

**Proposição 2.1.** *Seja $G$ um grupo topológico e um elemento $a \in G$. Então a função:*

$$a_L : G \longrightarrow G$$

$$g \longmapsto ag$$

*é contínua. Mais ainda, $a_L$ é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Note que $a_L$ é dada pela composição das funções:

$$\rho : G \longrightarrow G \times G$$
$$g \longmapsto (a, g)$$

e,

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$
$$(a, g) \longmapsto ag,$$

pois, se $g \in G$ :

$$\varphi \circ \rho(g) = \varphi(a, g) = ag = a_L(g).$$

Sabemos que $\varphi$ é contínua, pois $G$ é grupo topológico. O mesmo vale para $\rho$, visto que suas funções coordenadas são contínuas. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, segue o resultado para $a_L$.

Vejamos que $a_L$ é possui inversa contínua. Para tanto, defina:

$$a_L^{-1} : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto (a^{-1})g.$$

O argumento para a demonstração da continuidade de $a_L^{-1}$ é análogo ao utilizado acima para $a_L$. Note que, $a_L^{-1}$ é inversa de $a_L$, pois, para todo $g \in G$ :

$$a_L^{-1} \circ a_L(g) = a_L^{-1}(ag) = (a^{-1}a)g = g$$

e,

$$a_L \circ a_L^{-1}(g) = a_L(a^{-1}g) = (aa^{-1})g = g.$$

Por ser uma bijeção contínua com inversa contínua, conclui-se que $a_L$ é um homeomorfismo. $\square$

**Observação 2.3.** *Analogamente,*

$$a_R : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto ga$$

*é contínua, com inversa contínua dada por:*

$$a_R^{-1} : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g(a^{-1}).$$

*Portanto,* $a_R$ *é um homeomorfismo.*

**Observação 2.4.** *Como* $G$ *é grupo topológico, tem-se que:*

$$\psi : G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

*é contínua. Além disso,* $\psi^{-1} = \psi$*, pois, para* $g \in G$*, pela unicidade do elemento inverso no grupo:*

$$\psi \circ \psi(g) = \psi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g.$$

*Sendo assim,* $\psi$ *é também um homeomorfismo.*

**Observação 2.5.** *Consequentemente, se $a \in G$, $G$ grupo topológico, tem-se:*

$$\gamma_a : G \longrightarrow G$$

$$h \longmapsto aha^{-1}$$

*é homeomorfismo, pois, se $h \in G$ :*

$$a_L \circ a_R^{-1}(h) = a_L(ha^{-1}) = aha^{-1} = \gamma_a(h).$$

*Como $\gamma_a$ é composição de homeomorfismos, segue o resultado.*

**Definição 2.13.** *Seja $H$ um subgrupo de $G$ e considere a relação de equivalência $\sim_E$ definida em $G$, dada por:*

$$a \sim_E b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

*Então, a classe $[a]$ do elemento $a \in G$ é dada por:*

$$[a] = \{g \in g : a \sim_E g\}$$

$$[a] = \{g \in G : a^{-1}g \in H\}$$

$$[a] = \{g \in G : a^{-1}g = h, \, para\, algum\, h \in H\}$$

$$[a] = \{g \in G : g = ah, \, para\, algum\, h \in H\}$$

$$[a] = aH.$$

*Denotaremos tal classe por:*

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

*e chamaremos* ***classe lateral à esquerda de H contendo a****, ou ainda, coset $aH$.*

**Proposição 2.2.** *O coset $aH$ de um subgrupo $H$ de $G$ é aberto (fechado) de $G$ se, e somente se, $H$ é aberto (fechado) de $G$.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponha que o coset $aH$ seja aberto de $G$. Como $a_L$ é contínua, tem-se que a imagem de inversa de $a_L$ restrita ao coset $aH$ é um aberto de $G$. Portanto:

$$\begin{aligned}\{(a_L)^{-1}(aH)\} &= \{g \in G : a_L(g) = ag \in aH\} \\ &= \{g \in G : ag = ah, \, para\, algum\, h \in H\} \\ &= \{g \in G : g = h, \, para\, algum\, h \in H\} \\ &= H\end{aligned}$$

é aberto de $G$, como desejado.

($\Leftarrow$) Considerando $H$ aberto de $G$, note que a imagem inversa de $a_L^{-1}$ restrita ao $H$ é dada por:

$$\begin{aligned}\{a_L^{-1}(H)\} &= \{g \in G : a_L^{-1}(h) = (a^{-1})g \in H\} \\ &= \{g \in G : (a^{-1})g = h, \, para\, algum\, h \in H\} \\ &= \{g \in G : g = ah, \, para\, algum\, h \in H\} \\ &= aH.\end{aligned}$$

Por ser imagem inversa de uma função contínua, segue que $aH$ é aberto de $G$. O caso em que $H$ é fechado se, e somente se $aH$ é fechado é análogo a este. $\square$

Tendo este resultado da proposição, mostremos um lema que será utilizado na demonstração do teorema fundamental:

**Lema 2.1.** *Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Então:*

1. *Se $H$ é aberto, então $H$ é fechado.*
2. *Se $H$ é fechado e de índice finito, então $H$ é aberto.*
3. *Se $G$ é compacto e $H$ é aberto, então $H$ tem índice finito.*

*Demonstração.* Segue a prova dos três itens:

1. Se $H$ é aberto, então $H$ é fechado. *Demonstração.* Seja $H$ subgrupo de $G$, então, podemos representar $G$ da forma:
$$G = \bigcup_{\sigma_\lambda \in G} \sigma_\lambda H,$$
tal que se $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $\sigma_{\lambda_i} H \cap \sigma_{\lambda_j} H = \emptyset$. Considere $[\sigma_k] = [e]$. Assim,
$$H^c = \bigcup_{\sigma_\lambda \neq \sigma_k} \sigma_\lambda H.$$
Pela proposição anterior, sendo $H$ um aberto, $\sigma_\lambda H$ é aberto, para todo $\sigma_\lambda \in G$. Como a união de abertos é um aberto, segue que $H^c$ é aberto e, assim $H$ é fechado de $G$.

2. Se $H$ é fechado e de índice finito, então $H$ é aberto. *Demonstração.* Como $H$ tem índice finito, existem $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \subseteq G$, satisfazendo:
$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i H$$
e, se $i \neq j$,
$$\sigma_i H \cap \sigma_j H = \emptyset.$$
Considere
$$[\sigma_1] = [e],$$
então,
$$H = eH = \sigma_1 H,$$
e, assim,
$$H^c = \bigcup_{i=2}^{n} \sigma_i H.$$
Pela proposição anterior, como $H$ é fechado, $\sigma H_i$ é fechado para todo $\sigma_i \in G$. Como a união finita de fechados é um fechado, segue que $H^c$ é fechado de $G$. Logo, $H$ é aberto de $G$.

3. Se $G$ é compacto e $H$ é aberto, então $H$ tem índice finito. *Demonstração.* Mais uma vez, pela proposição anterior, como $H$ é aberto, tem-se que $\sigma H$ é aberto de $G$, para todo $\sigma \in G$. Note que,
$$G \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma H$$
é uma cobertura aberta de $G$.

   Como $G$ é compacto, existem $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, tal que:
$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i H$$

é uma subcobertura finita de $G$. Perceba que $\bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i H \subseteq G$. Logo,

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i H.$$

Sendo assim, o índice de $H$ em $G$ é finito.

$\square$

**Definição 2.14.** *Sejam $S, S'$ subconjuntos de $G$. Então, definem-se:*

$$SS' = \{ss' : s \in S \, e \, s' \in S'\}$$

*e*

$$S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}.$$

**Proposição 2.3.** *Seja $G$ um grupo topológico e $V_G(\boldsymbol{e})$ um sistema fundamental de vizinhanças para o elemento neutro $\boldsymbol{e} \in G$. Então:*

1. *Se $N_G^1, N_G^2 \in V_G(\boldsymbol{e})$, existe $N_G' \in V_G(\boldsymbol{e})$ tal que $\boldsymbol{e} \in N_G' \subseteq N_G^1 \cap N_G^2$;*
2. *Se $N_G \in V_G(\boldsymbol{e})$, existe $N_G' \in V_G(\boldsymbol{e})$ tal que $N_G' N_G' \subseteq N_G$;*
3. *Se $N_G \in V_G(\boldsymbol{e})$, existe $N_G' \in V$ tal que $N_G' \subseteq N_G^{-1}$;*
4. *Se $N_G \in V_G(\boldsymbol{e})$ e $g \in G$, existe $N_G' \in V_G(\boldsymbol{e})$, satisfazendo $N_G' \subseteq g N_G g^{-1}$;*
5. *Se $g \in G$, então $gV_G(\boldsymbol{e}) = \{gN_G : N_G \in V_G(\boldsymbol{e})\}$ é um sistema de vizinhanças de $g$.*

   *Reciprocamente, se $G$ é um grupo e $V_G(\boldsymbol{e})$ é um conjunto não vazio de subconjuntos de $G$ satisfazendo $(1)-(4)$, então existe uma (única) topologia em $G$ para a qual a condição $(5)$ é válida.*

*Demonstração.* **PARTE 1:**

Primeiramente, considerando $G$ grupo topológico e $V_G(\mathbf{e})$ sistema fundamental de vizinhanças para $\mathbf{e} \in G$. Mostremos que as condições $(1)-(5)$ são satisfeitas:

1. Se $N_G^1, N_G^2 \in V_G(\mathbf{e})$, existe uma vizinhança $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$ tal que $\mathbf{e} \in N_G' \subseteq N_G^1 \cap N_G^2$;

   *Demonstração.* Como $N_G^1, N_G^2$ são vizinhanças de $\mathbf{e}$, por definição, existem abertos $U^1, U^2$ de $G$, tais que:

   $$\mathbf{e} \in U^1 \subseteq N_G^1,$$
   $$\mathbf{e} \in U^2 \subseteq N_G^2.$$

   Agora, $U = U^1 \cap U^2$ é aberto, pois $U$ é interseção finita de abertos. Note que $e \in U^1 \cap U^2 = U$. Assim, pela definição de sistema fundamental de vizinhanças de $\mathbf{e}$, existe uma vizinhança $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$, tal que $N_G' \subseteq U$.

   Perceba que $U = U^1 \cap U^2 \subseteq N_G^1 \cap N_G^2$. Portanto,

   $$\mathbf{e} \in N_G' \subseteq U \subseteq N_G^1 \cap N_G^2.$$

   $\square$

2. Se $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, existe uma vizinhança $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$ tal que $N_G' N_G' \subseteq N_G$;

*Demonstração.* Como $G$ é grupo topológico, a função:

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g,h) \longmapsto gh$$

é contínua. Considere $G \times G$ grupo topológico com a topologia produto.

Note que

$$\varphi((\mathbf{e},\mathbf{e})) = \mathbf{e}.\mathbf{e} = \mathbf{e}.$$

Aplicando a definição de continuidade para $\varphi$ em $\mathbf{e}$ : dado $N_G \in V_G(\varphi(\mathbf{e},\mathbf{e})) = V_G(\mathbf{e})$, existe uma vizinhança $N_{G\times G} \in V_{G\times G}(\mathbf{e})$ tal que $\varphi(N_{G\times G}) \subseteq N_G$.

Agora, uma vizinhança de $(\mathbf{e},\mathbf{e}) \in G \times G$ é da forma:

$$N_{G\times G} = N_G^1 \times N_G^2 \in V_G(\mathbf{e}) \times V_G(\mathbf{e}).$$

Como $N_G^1, N_G^2 \in V_G(\mathbf{e})$, por (1), existe $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$ satisfazendo $\mathbf{e} \in N_G' \subseteq N_G^1 \cap N_G^2$. Assim:

$$N_G' \times N_G' \subseteq N_G^1 \times N_G^2 = N_{G\times G}.$$

Segue que $\varphi(N_G' \times N_G') \subseteq \varphi(N_{G\times G}) \subseteq N_G$. Portanto,

$$\varphi(N_G' \times N_G') = N_G' N_G' \subseteq N_G.$$

□

3. Se $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, existe uma vizinhança $N_G' \in V$ tal que $N_G' \subseteq N_G^{-1}$;

*Demonstração.* Considere $N_G \in V_G(\mathbf{e})$. Por definição de vizinhança, existe um aberto $U$ de $G$, tal que

$$\mathbf{e} \in U \subseteq N_G.$$

Como $G$ é grupo topológico,

$$\psi : G \longrightarrow G$$

$$g \longmapsto g^{-1}$$

é contínua. Mais que isso, foi demonstrado em uma observação acima que $\psi$ é homeomorfismo. Agora, como imagem direta de aberto por homeomorfismo é aberto, segue que $\psi(U)$ é aberto de $G$. Assim,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{-1} = \psi(e) \in \psi(U).$$

Como $\psi(U)$ é um aberto contendo $\mathbf{e}$, por definição de sistema fundamental de vizinhanças, existe $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$, satisfazendo:

$$N_G' \subseteq \psi(U).$$

Lembrando que $U \subseteq N_G$, segue que:

$$N_G' \subseteq \psi(U) \subseteq \psi(N_G) = N_G^{-1}.$$

□

4. Se $N_G \in V_G(\mathbf{e})$ e $g \in G$, existe uma vizinhança $N_G' \in V_G(\mathbf{e})$, satisfazendo $N_G' \subseteq gN_Gg^{-1}$;

*Demonstração.* Seja $g \in G$ e considere $N_G \in V_G(\mathbf{e})$. Por definição de vizinhança de $\mathbf{e}$, existe um aberto $U$ de $G$ tal que:

$$e \in U \subseteq N_G.$$

Como imagem de aberto por homeomorfismo é aberto e

$$\gamma_g : G \longrightarrow G$$

$$h \longmapsto ghg^{-1}$$

é homeomorfismo. Segue que $\gamma_g(U)$ é aberto de $G$. Note que:

$$\gamma_g(\mathbf{e}) = g\mathbf{e}g^{-1} = gg^{-1} = \mathbf{e}.$$

Como $e \in U \subseteq N_G$,

$$\mathbf{e} = \gamma_g(\mathbf{e}) \in \gamma_g(U) \subseteq \gamma_g(N_G) = gN_Gg^{-1}.$$

Portanto, $\gamma_g(U)$ é um aberto de $G$ que contém $\mathbf{e}$. Por definição de sistema fundamental de vizinhanças de $\mathbf{e}$, existe uma vizinhança $N'_G \in V_G(\mathbf{e})$, tal que $N'_G \subseteq \gamma_g(U)$. Lembrando que $\gamma_g(U) \subseteq \gamma_g(N_G) = gN_Gg^{-1}$, tem-se que:

$$N'_G \subseteq gN_Gg^{-1}.$$

□

5. Se $g \in G$, então $gV_G(\mathbf{e}) = \{gN_G : N_G \in V_G(\mathbf{e})\}$ é um sistema de vizinhanças de $g$.

*Demonstração.* Como $G$ é grupo topológico e $g \in G$, a função:

$$g_L : G \longrightarrow G$$

$$h \longmapsto gh$$

é um homeomorfismo. Note que:

$$g_L(\mathbf{e}) = g\mathbf{e} = g.$$

Seja $U$ um aberto de $G$, tal que $g_L(\mathbf{e}) = g \in U$. Como $g_L$ é homeomorfismo, $g_L^{-1}(U)$ é aberto e, como $g \in U$,

$$g_L^{-1}(g) = g^{-1}g = \mathbf{e} \in g_L^{-1}(U).$$

Por definição de sistema fundamental de vizinhanças de $\mathbf{e}$, sendo $g_L^{-1}(U)$ um aberto de $G$ que contém $\mathbf{e}$, existe uma vizinhança $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, tal que:

$$N_G \subseteq g_L^{-1}(U).$$

Portanto,

$$g_L(N_G) \subseteq g_L(g_L^{-1}(U)),$$

ou seja,

$$gN_G \subseteq U.$$

Disso, segue que $\{gN_G : N_G \in V_G(\mathbf{e})\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de $g$. □

**PARTE 2:**

Agora, considerando $G$ é um grupo e $V_G(\mathbf{e})$ é um conjunto não vazio de subconjuntos de $G$ satisfazendo $(1)-(4)$, mostremos que existe uma (única) topologia em $G$ para a qual a condição $(5)$ é válida.

*Demonstração.* Como $V_G(\mathbf{e})$ satisfaz (1), segue que $\mathbf{e} \in N_G$, para todo $N_G \in V_G(\mathbf{e})$. Defina $T$ como o conjunto dos subconjuntos $U$ de $G$, tais que, para todo $g \in U$, existe um subconjunto $N_G \in V_G(\mathbf{e})$ com $gN_G \subseteq U$ :

$$T = \{U \subseteq G \,|\, \forall g \in U, \exists N_G \in V_G(\mathbf{e}) : gN_G \subseteq U\}.$$

**Afirmação 2.1.** *$T$ é uma topologia em $G$.*

*Demonstração.* Mostremos que $T$ satisfaz as condições da definição topologia:

- $\emptyset \in T$ :

  *Demonstração.* Seja $U = \emptyset$. Suponha que $U \notin T$, então existe um $g \in U$ tal que para todo $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, $gN_G \nsubseteq U$. Contradição, pois não existe $g \in U = \emptyset$. Por vacuidade, $\emptyset \in T$.

- $G \in T$ :

  *Demonstração.* Seja $g \in G = U$. Note que para todo $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, tem-se que $gN_G \subseteq G = U$. Logo, $G \in T$.

- Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família qualquer de subconjuntos de $T$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in T$.

  *Demonstração.* Seja $g \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, então $g \in U_k$, para algum $k \in \Lambda$. Como $U_k$ é subconjunto de $T$, existe um $N_G^k \in V_G(\mathbf{e})$ tal que

  $$gN_G^k \subseteq U_k \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

  Portanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in T$.

- Se $\{U_i\}_{i \in I}$, com $I = \{1, ..., n\}$, é uma família finita de subconjuntos de $T$, então $\bigcap_{i \in I} U_i \in T$.

  *Demonstração.* Sejam $U^1, U^2 \in T$ e $g \in U^1 \cap U^2$. Por definição de $T$, existem $N_G^1, N_G^2 \in V_G(\mathbf{e})$, satisfazendo:

  $$gN_G^1 \subseteq U^1$$

  e

  $$gN_G^2 \subseteq U^2.$$

  Portanto,

  $$g(N_G^1 \cap N_G^2) \subseteq U^1 \cap U^2.$$

  Como $V_G(\mathbf{e})$ satisfaz (1), existe $N'_G \in V_G(\mathbf{e})$, tal que:

  $$e \in N'_G \subseteq N_G^1 \cap N_G^2.$$

  Assim,

  $$g \in gN'_G \subseteq g(N_G^1 \cap N_G^2) \subseteq U^1 \cap U^2.$$

  Conclui-se que $U^1 \cap U^2 \in T$. Aplicando os mesmos argumentos recursivamente, tem-se que $\bigcap_{i \in I} U_i \in T$.

$T$ é uma topologia de $G$. □

Perceba que se $G$ está munido da topologia $T$, a condição (5) é válida pela maneira como $T$ foi definida, pois: se $g \in G$ e $g \in U$, para algum aberto $U$ de $G$, então, existe um $N_G \in V_G(\mathbf{e})$ tal que $gN_G \subseteq U$. Disso, conclui-se (5), que $\{gN_G : N_G \in V_G(\mathbf{e})\}$ é sistema fundamental de vizinhanças para $g$.

Agora, suponha a existência de uma topologia $K$ de $G$ que satisfaça $(1) - (5)$. Seja $g \in G$ e considere $U \in K$ com $g \in U$. Por (5), existe $N_G \in V_G(\mathbf{e})$ tal que $gN_G \subseteq U$. Logo, $U \in T$. Assim, $K \subseteq T$. □

Para que $G$ munido com a topologia $T$ seja grupo topológico, é necessário ainda que $\varphi$ e $\psi$, como definidas anteriormente, sejam contínuas.

**Afirmação 2.2.** *$\varphi$ é contínua.*

*Demonstração.* Seja $(g_1, g_2) \in G \times G$. Então:

$$\varphi((g_1, g_2)) = g_1 g_2 \in G.$$

Considere o aberto $U \in T$ tal que:

$$g_1 g_2 \in U.$$

Por definição de sistema fundamental de vizinhanças de $g_1 g_2 \in G$, existe uma vizinhança $N_G \in V_G(\mathbf{e})$, satisfazendo:

$$g_1 g_2 N_G \subseteq U.$$

Por (2), existe $N'_G \in V_G(\mathbf{e})$, tal que $N'_G N'_G \subseteq N_G$. Portanto,

$$g_1 g_2 N'_G N'_G \subseteq g_1 g_2 N_G \subseteq U.$$

Agora,

$$g_1 g_2 N'_G N'_G = g_1 (g_2 N'_G g_2^{-1}) g_2 N'_G.$$

Aplicando (4) desta vez, segue que existe $N''_G \in V_G(\mathbf{e})$, tal que:

$$N''_G \subseteq g_2 N'_G g_2^{-1}.$$

Logo,

$$g_1 N''_G g_2 N'_G \subseteq g_1 (g_2 N'_G g_2^{-1}) g_2 N'_G \subseteq U.$$

Note que:

$$\varphi(g_1 N''_G \times g_2 N'_G) = g_1 N''_G g_2 N'_G \subseteq U,$$

sendo que:

$$g_1 N''_G \times g_2 N'_G \in V_{G\times G}((g_1, g_2)).$$

Conclui-se que $\varphi$ é contínua em $(g_1, g_2)$ e, consequentemente, em $G \times G$.

$\square$

**Afirmação 2.3.** *$\psi$ é contínua.*

*Demonstração.* Considere $g \in G$. Então, $\psi(g) = g^{-1} \in G$. Seja $U \in T$, tal que $g^{-1} \in U$. Por definição de sistema fundamental de vizinhanças para $g^{-1}$, existe $N_G \in V_G(\mathbf{e})$ tal que:

$$g^{-1} N_G \subseteq U.$$

Assim, $\psi(g^{-1} N_G) \subseteq \psi(U)$, ou seja,

$$N_G^{-1} g \subseteq U^{-1}.$$

Por (3), existe $N'_G \in V_G(\mathbf{e})$ tal que $N'_G \subseteq N_G^1$. Portanto,

$$N'_G g \subseteq N_G^{-'} g \subseteq U^{-1}.$$

Note que:

$$N'_G g = g g^{-1} N'_G g.$$

Aplicando (4), existe um $N''_G \in V_G(\mathbf{e})$, satisfazendo:

$$N''_G \subseteq g^{-1} N'_G g.$$

Logo,

$$g N''_G \subseteq g (g^{-1} N'_G g) = N'_G g \subseteq U^{-1}.$$

Assim,

$$\psi(g N''_G) \subseteq \psi(U^{-1}) = U.$$

Como $g N''_G \in V_G(\mathbf{e})$, segue que $\psi$ é contínua. $\square$

Conclui-se que $G$ munido da topologia $T$ é um grupo topológico. □

## 2.3 A topologia Krull no grupo de Galois

Uma extensão finita $\Omega$ é **galoisiana** sobre $F$ se é normal e separável, ou seja, se todo polinômio irredutível $f \in F[X]$ com uma raiz em $\Omega$ apresente $n(= grau(f))$ raízes distintas em $\Omega$. Analogamente:

**Definição 2.15.** *Uma extensão algébrica $\Omega$ sobre $F$ é **galoisiana** se é normal e separável.*

**Observação 2.6.** *Claramente, $\Omega$ é galoisiana sobre $F$ se, e somente se, é a união de extensões galoisianas finitas.*

**Proposição 2.4.** *Se $\Omega$ é extensão galoisiana sobre $F$, então é Galoisiana sobre todo corpo intermediário $M$.*

*Demonstração.* Como $F \subseteq \Omega$ é extensão galoisiana, em particular, é normal. Assim, $\Omega$ é corpo de decomposição de uma família de polinômios $\Lambda \subseteq F[X] \subseteq M[X]$. Portanto, a extensão $\Omega$ sobre $M$ é normal.

Agora, para todo $a \in \Omega$, o polinômio minimal $I(a, F) \in F[X]$ é separável. Note que em $K[X]$, o polinômio $I(a, K)$ divide $I(a, F)$. Portanto, $I(a, K)$ também se decompõe em raízes distintas em $\Omega[X]$. Segue que $I(a, K)$ é separável. Logo, a extensão $\Omega$ sobre $M$ é normal e separável, sendo assim, galoisiana. □

**Proposição 2.5.** *Seja $\Omega$ uma extensão galoisiana de $F$ e seja $E$ um subcorpo de $\Omega$ que contenha $F$. Então todo $F$-homomorfismo $E \longrightarrow \Omega$ se estende a um $F$-isomorfismo $\Omega \longrightarrow \Omega$.*

*Demonstração.* □

**Corolário 2.1.** *Sejam $F \subseteq E \subseteq \Omega$ como na proposição acima. Se $E$ é estável por $Aut_F(\Omega)$, então $E$ é galoisiana sobre $F$.*

*Demonstração.* Seja $f(x)$ um polinômio irredutível em $F[X]$ que tenha uma raiz $a \in E$. Como $\Omega$ é extensão galoisiana sobre $F$, por hipótese, $f(x)$ apresenta $n(= grau(f))$ raízes distintas $\{a_1, ..., a_n\}$ em $\Omega$.

Considere $a_i \in \{a_1, ..., a_n\}$. Existe um $F$-isomorfismo

$$\kappa : F[a] \longrightarrow F[a_i] \subseteq \Omega,$$

tal que $\kappa(a) = a_i$. Sendo assim, um $F$-homomorfismo

$$\kappa : F[a] \longrightarrow \Omega.$$

Pela **Proposição 2.5**, $\kappa$ pode ser estendido a um $F$-isomorfismo:

$$\overline{\kappa} : \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Como $\overline{\kappa} \in Aut_F(\Omega)$, $E$ é estável por $Aut_F(\Omega)$ e $a \in E$, conclui-se que

$$\kappa(a) = a_i \in E.$$

Note que $a_i$ foi uma raiz qualquer de $f(x)$ em $\Omega$. Portanto,

$$\{a_1, ..., a_n\} \subseteq E.$$

Logo, $E$ é extensão galoisiana sobre $F$. □

Seja $\Omega$ uma extensão galoisiana sobre $F$ e $G = Aut_F(\Omega)$. Para qualquer subconjunto finito $S$ de $\Omega$, considere:

$$G(S) = \{\sigma \in G : \sigma(s) = s, \, para \, todo \, s \in S\}.$$

**Afirmação 2.4.** *$G(S)$ como definido acima é um grupo.*

*Demonstração.* De fato, seja $s \in S$ :

- Se $\sigma_1, \sigma_2 \in G(S)$, então:

$$\sigma_1\sigma_2(s) = \sigma_1(s) = s,$$

  ou seja,

$$\sigma_1\sigma_2 \in G(S).$$

- Note que:

$$1_G(s) = s.$$

  Portanto, $1_G \in G(S)$.

- Se $\sigma \in G(S)$, então:

$$\sigma(s) = s \Longrightarrow s = \sigma^{-1}(s).$$

  Assim, $\sigma^{-1} \in G(S)$.

Conclui-se que $G(S)$ é grupo. □

**Definição 2.16.** *Um conjunto $S \subseteq \Omega$ é estável por $G$, ou $G$-estável, se, para todo $\sigma \in G$ :*

$$\sigma(S) \subseteq S.$$

**Lema 2.2.** *Se $S \subseteq \Omega$, então existe um subconjunto $\overline{S}$ estável por $G$, tal que $S \subseteq \overline{S} \subseteq \Omega$.*

*Demonstração.* Seja $a \in S$. A órbita de $a$ é dada por:

$$\theta_a = \{\sigma(a) : \sigma \in G\}.$$

Defina:

$$\overline{S} = \bigcup_{a \in S} \theta_a.$$

Note que $S \subseteq \overline{S}$, por construção. Vejamos que $\overline{S}$ é estável por $G$.

Considere$\sigma \in G$ e $b \in \overline{S}$. Então:

$$b = \sigma_k a_k,$$

para algum $\sigma_k \in G$ e algum $a_k \in S$. Assim,

$$\sigma(b) = \sigma(\sigma_k a_k) = (\sigma\sigma_k)a_k \in \theta_{a_k} \subseteq \overline{S}.$$

□

**Proposição 2.6.** *Existe uma única estrutura de grupo topológico em $G$, na qual os conjuntos:*

$$W = \{G(S) : S \subseteq \Omega, \, S \, finito\}$$

*formam um sistema fundamental de vizinhanças abertas de $1$. Para esta topologia, os conjuntos:*

$$W_G = \{G(S) : S \subseteq \Omega, \, S \text{ finito } G - \text{estável}\}$$

*formam um sistema fundamental de vizinhanças de $1$ constituído por subgrupos normais abertos.*

*Demonstração.* Mostremos que:

$$W = \{G(S) : S \subseteq \Omega,\, S\, finito\}$$

satisfaz as condições $(1) - (4)$ da proposição:

1. Se $G(S_1), G(S_2) \in W$, então existe $G(S') \in W$ tal que $1 \in G(S') \subseteq G(S_1) \cap G(S_2)$.

   *Demonstração.* Note que:
   $$\begin{aligned} G(S_1) \cap G(S_2) &= \\ &= \{\sigma \in G : \sigma(s) = s,\, para\, todo\, s \in S_1\} \cap \{\sigma \in G : \sigma(s) = s,\, para\, todo\, s \in S_2\} \\ &= \{\sigma \in G : \sigma(s) = s,\, para\, todo\, s \in S_1 \cup S_2\} \\ &= G(S_1 \cup S_2). \end{aligned}$$
   Além disso, $1 \in G(S_1 \cup \S_2)$, pois $1s = s$, para todo $s \in S_1 \cup S_2$. Denote $S' = S_1 \cup S_2$. Segue que, $S' \subseteq \Omega$ é finito. Portanto, $G(S') \in W$ e,

   $$1 \in G(S') \subseteq G(S_1) \cap G(S_2).$$

   □

2. Se $G(S) \in W$, existe $G(S') \in W$, tal que $G(S')G(S') \subseteq G(S)$.

   *Demonstração.* Perceba que:

   $$G(S)G(S) = \{\alpha\beta \in G : \alpha(s) = s\, e \beta(s) = s,\, para\, todo\, s \in S\}.$$

   Como $G(S)$ é grupo,
   $$\sigma = \alpha\beta \in G(S).$$
   Em particular,

   $$G(S)G(S) = \{\alpha\beta \in G : \sigma(s) = \alpha\beta(s) = \alpha(s) = s,\, para\, todo\, s \in S\} = G(S).$$

   Denote $S' = S$. Então, $G(S') \in W$ e,

   $$G(S')G(S') \subseteq G(S).$$

   □

3. Se $G(S) \in W$, existe $G(S') \in W$, tal que $G(S') \subseteq G(S)^{-1}$.

   *Demonstração.* Tem-se que:

   $$\begin{aligned} G(S)^{-1} &= \{\sigma^{-1} : \sigma \in G(S)\} \\ &= \{\sigma^{-1} \in G : \sigma(s) = s,\, para\, todo\, s \in S\} \\ &= \{\sigma^{-1} \in G : s = \sigma^{-1}(s),\, para\, todo\, s \in S\}. \end{aligned}$$
   Como $G(S)$ é grupo, $\tau = \sigma^{-1} \in G(S)$. Assim,

   $$G(S)^{-1} = \{\tau \in G : s = \tau(s),\, para\, todo\, s \in S\} = G(S).$$

   Escolha $S' = S$, segue que $G(S') \in W$ e:

   $$G(S') \subseteq G(S)^{-1}.$$

   □

4. Se $G(S) \in W$ e $g \in G$, então existe $G(S') \in W$ tal que $G(S') \subseteq gG(S)g^{-1}$.

   *Demonstração.* Seja $S \subseteq \Omega$ um subconjunto finito, então $F(S)$ é uma extensão finita de $F$. Portanto, existem finitos $F$-homomorfismos: $F(S) \longrightarrow \Omega$.

   Sejam $\sigma, \tau \in G$. Se $\sigma|_{F(S)} = \tau|_{F(S)}$, então, como $\sigma$ e $\tau$ fixam $F$, $\sigma S = \tau S$. Como o número de $F$-homomorfismos: $F(S) \longrightarrow \Omega$ é finito, o conjunto:

$$\overline{S} = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma S$$

   é finito. Além disso, da maneira como foi construído, pelo lema anterior, $\overline{S}$ é estável por $G$.

   **Afirmação 2.5.** *$G(\overline{S})$ é subgrupo normal de $G$.*

   *Demonstração.* Seja $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \sigma G(\overline{S})\sigma^{-1}$ e $s \in \overline{S}$. Então, como $\overline{S}$ é estável por $G$, tem-se que:

$$\sigma^{-1}(s) \in \overline{S}.$$

   Agora, como $\tau \in G(\overline{S})$, $\tau$ fixa $\overline{S}$. Assim,

$$\tau(\sigma^{-1}(s)) = \sigma^{-1}(s).$$

   Portanto,

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(s) = \sigma(\sigma^{-1}(s)) = s.$$

   Logo, $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G(\overline{S})$, ou seja,

$$\sigma G(\overline{S})\sigma^{-1} = G(\overline{S}).$$

   Conclui-se que $G(\overline{S})$ é subgrupo normal de $G$. □

   Note que, como $S \subseteq \overline{S}$, se $\sigma \in G$ fixa $\overline{S}$, em particular, fixa $S$. Assim,

$$G(\overline{S}) \subseteq G(S).$$

   Pela afirmação acima,

$$\sigma G(\overline{S})\sigma^{-1} = G(\overline{S}) \subseteq G(S).$$

   Disso, segue (4) e a afirmação sobre $W_G$.

□

A topologia $W$ em $Aut_F(\Omega) = G$ é chamada **topologia de Krull.** Denotamos o grupo topológico $(Aut_F(\Omega), W)$ por

$$Gal_F(\Omega)$$

e chamamos de **grupo de Galois** da extensão $\Omega$ sobre $F$.

**Observação 2.7.** *Se $S$ é o conjunto finito de geradores de $E$ sobre $F$, então:*

$$Gal_E(\Omega) = G(S),$$

*pois um elemento $\sigma \in Gal_F(\Omega)$ fixa $E$ se, e somente se fixa seus geradores.*

**Afirmação 2.6.** *Note que se $S$ é um subconjunto finito de $\Omega$ estável por $G$, então $F(S)$ é uma extensão finita de $F$ estável por $G$. Aplicando o* ***Corolário 2.1*** *, segue que $F(S)$ é galoisiana sobre $F$. Assim,*

$$\{Gal_E(\Omega) : E \text{ é extensão galoisiana finita sobre } F\}$$

*é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 que consiste de subgrupos normais abertos.*

*Demonstração.* Note que, pela observação acima,

$$Gal_E(\Omega) = G(S).$$

Por hipótese, $S$ é estável por $G$. Portanto,

$$\{Gal_E(\Omega) : E \text{ é extensão galoisiana finita sobre } F\}$$

satisfaz a condição de $W_G$ na proposição, sendo assim, é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 que formado for subgrupos normais abertos.

$\square$

**Proposição 2.7.** *Seja $\Omega$ uma extensão galoisiana sobre $F$. Se $E$ é um corpo intermediário finito e Galois sobre $F$, então, a função:*

$$\eta : Gal_F(\Omega) \longrightarrow Gal_F(E)$$

$$\sigma \longmapsto \sigma|_E$$

*é uma sobrejeção contínua (considerando a topologia discreta em $Gal_F(E)$.*

*Demonstração.* Vejamos, primeiramente, que $\eta$ é sobrejetora. Para tanto, considere $\sigma \in Gal_F(E)$, então, $\sigma$ é um $F$-isomorfismo: $E \longrightarrow E$. Portanto, $\sigma$ é um $F$-homomorfismo: $E \longrightarrow \Omega$. Pela **Proposição 2.5**, $\sigma$ pode ser estendido a um $F$-isomorfismo:

$$\overline{\sigma} : \Omega \longrightarrow \Omega,$$

tal que

$$\overline{\sigma}|_E = \sigma.$$

Como $\overline{\sigma} \in Gal_F(\Omega)$, tem-se que:

$$\eta(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}|_E = \sigma.$$

Portanto, $\eta$ é sobrejetora.

Vimos na observação acima que, se $S$ é o conjunto finito de geradores de $E$ sobre $F$, então,

$$Gal_E(\Omega) = G(S).$$

Considere $1_(Gal_F(E)) \in Gal_F(E)$. Como $Gal_F(E)$ está munido da topologia discreta, tem-se que $\{1_{(Gal_F(E))}\}$ é aberto de $Gal_F(E)$. Mostremos que a imagem inversa de $\eta$ restrita a $\{1_{(Gal_F(E))}\}$ é um aberto de $Gal_F(\Omega)$. De fato,

$$\eta^{-1}(\{1_{(Gal_F(E))}\}) =$$

$$= \{\sigma \in Gal_F(\Omega) : \eta(\sigma) = \sigma|_E = 1_{(Gal_F(E))}\}$$

$$= \{\sigma \in Gal_F(\Omega) : \sigma|_E = 1_E \in Gal_F(E)\}$$

$$\{\sigma \in Gal_F(\Omega) : \sigma \in Gal_E(\Omega)\} = Gal_E(\Omega) = G(S).$$

Basta mostrar que $\eta$ satisfaz o mesmo para um $\{\sigma|_E\} \in Gal_F(E)$ qualquer.

**Afirmação 2.7.** *Vejamos que a imagem inversa de $\sigma|_E$ é o aberto $\sigma Gal_E(\Omega)$, ou seja,*

$$\eta^{-1}(\sigma|_E) = \sigma Gal_E(\Omega).$$

($\supseteq$) *Considere $\gamma = \sigma\tau \in \sigma Gal_E(\Omega)$. Seja $a \in E$. Então, como $\tau \in Gal_E(\Omega)$ :*

$$\gamma(a) = \sigma\tau(a) = \sigma(a).$$

*Logo,*

$$\eta(\gamma) = \gamma|_E = \sigma|_E,$$

*ou seja,*

$$\gamma \in \eta^{-1}(\sigma|_E).$$

($\subseteq$) *Seja* $\tau \in \eta^{-1}(\sigma|_E)$. *Por definição,* $\eta(\tau) = \tau|_E = \sigma|_E$. *Assim,*

$$(\sigma^{-1}\tau)|_E = Id_E,$$

*isto é,* $\sigma^{-1}\tau \in Gal_E(\Omega)$. *Como,*

$$\tau = \sigma(\sigma^{-1}\tau) \in \sigma Gal_E(\Omega),$$

*conclui-se que:*

$$\eta^{-1}(\sigma|_E) = \sigma Gal_E(\Omega).$$

□

**Teorema 2.2.** *O grupo de Galois* $G = Gal_F(\Omega)$ *de uma extensão galoisiana* $\Omega$ *sobre* $F$ *é compacto e totalmente desconexo.*

*Demonstração.* A demonstração será dividida em algumas afirmações:

**Afirmação 2.8.** *G é Hausdorff.*

*Demonstração.* Sejam $\sigma, \tau \in G$, com $\tau \neq \sigma$. Então,

$$\sigma^{-1}\tau \neq 1_G.$$

Portanto, $\sigma^{-1}\tau$ move algum elemento de $\Omega$, ou seja, existe um $a \in \Omega$, tal que $\sigma(a) \neq \tau(a)$.

Vejamos que para todo $S$ finito contendo $a$,

$$\sigma G(S) \cap \tau G(S) \neq \emptyset.$$

Para tanto, suponha, por absurdo, que exista $\rho \in \sigma G(S) \cap \tau G(S)$. Segue que existem $\sigma_1, \sigma_2 \in G(S)$, tal que:

$$\rho = \sigma\sigma_1 \in \sigma G(S);$$

$$\rho = \tau\sigma_2 \in \tau G(S).$$

Assim,

$$\rho = \sigma\sigma_1 = \tau\sigma_2.$$

Agora, como $a \in S$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in G(S)$, tem-se que:

$$\sigma_1(a) = \sigma_2(a) = a.$$

Logo,

$$\rho(a) = \sigma\sigma_1(a) = \sigma(a)$$

$$\rho(a) = \tau\sigma_2(a) = \tau(a),$$

ou seja,

$$\sigma(a) = \tau(a).$$

Contradição. Conclui-se que $\sigma G(S)$ e $\tau G(S)$ são disjuntos.

Como $G$ é grupo topológico, já foi demonstrado que o produto por $\sigma$ e $\tau$ é um homeomorfismo e, como imagem direta de aberto por homeomorfismo é um aberto, segue que $\tau G(S)$ e $\sigma G(S)$ são abertos de $G$.

Foi demonstrado que para $\sigma, \tau$ elementos arbitrários de $G$, existem abertos $\sigma G(S)$, $\tau G(S)$ de $G$, tais que:

$$\sigma \in \sigma G(S),$$
$$\tau \in \tau G(S)$$

e,

$$\sigma G(S) \cap \tau G(S) = \emptyset.$$

Logo, $G$ é Hausdorff. $\square$

**Afirmação 2.9.** *$G$ é compacto.*

*Demonstração.* Já vimos que se $S \subseteq \Omega$ é um conjunto finito $G$-estável, então, $G(S)$ é um subgrupo normal de $G$. Vejamos que $G(S)$ é o núcleo da aplicação de $G$ no grupo de permutações de $S$ :

$$\Upsilon : G \longrightarrow Sym(S)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_S.$$

Note que como $S$ é estável, $\sigma|_S(S) \subseteq S$, sendo assim, uma permutação em $S$. Perceba ainda que $\Upsilon$ é homomorfismo:

- Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$. Então, como $\sigma_2|_S(S) \subseteq S$, :

$$\Upsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)|_S = \sigma_1|_S \circ \sigma_2|_S = \Upsilon(\sigma_1) \circ \Upsilon(\sigma_2).$$

Por último,

$$\begin{aligned} Ker(\Upsilon) &= \{\sigma \in G : \Upsilon(\sigma) = \sigma|_S = Id_S \in Sym(S)\} \\ &= \{\sigma \in G : \sigma(s) = s, \forall s \in S\} = G(S). \end{aligned}$$

Portanto,

$$G/G(S) \cong Im(\Upsilon)$$

Segue que o índice de $G(S)$ em $G$ é finito, pois:

$$[G : G(S)] = |G/G(S)| = |Im(\Upsilon)| \leqslant |Sym(S)| = n!.$$

Agora, como $G/G(S)$ é finito, segue, pelo **Exemplo 2.1**, que $G/G(S)$ é compacto. Vejamos que a seguinte aplicação é injetora:

$$\mathit{\Gamma} : G \longrightarrow \Pi_{S \text{ finito } G\text{-estável}} G/G(S)$$
$$\sigma \longmapsto ([\sigma]_S)_S.$$

Para tanto, considere $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ tal que

$$\mathit{\Gamma}(\sigma_1) = \mathit{\Gamma}(\sigma_2).$$

Por definição de $\mathit{\Gamma}$, segue a igualdade das classes:

$$([\sigma_1]_S)_S = ([\sigma_2]_S)_S,$$

para todo $S$ $G$-estável. Assim, $\sigma_1^{-1}\sigma_2 \in G(S)$, para todo $S$ $G$-estável. Logo, $\sigma_1^{-1}\sigma_2(a) = a$, para todo $a \in \bigcup_{S \text{ finito} G\text{-estável}}$.

Como já foi provado que todo subconjunto finito de $\Omega$ está contido em um subconjunto finito $G$-estável de $\Omega$, tem -se que se $b \in \Omega$,

$$\{b\} \in \bigcup_{S \text{ finito} G\text{-estável}} .$$

Portanto, $\sigma_1^{-1}\sigma_2(b) = b$. Consequentemente,

$$\sigma_1^{-1}\sigma_2 = I_\Omega.$$

Segue que

$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

ou seja, $\Gamma$ é injetora.

Agora, pelo Teorema de **Tychonov**, como cada $G/G(S)$ é compacto, segue que $\Pi_{S \text{ finito } G\text{-estável}} G/G(S)$ também o é.

Para cada $S_1 \subseteq S_2$, tem-se que $G(S_2) \subseteq G(S_1)$ e a existência de duas funções contínuas:

$$\pi_1 : \Pi G/G(S) \longrightarrow G/G(S_1),$$

que é a projeção em $G/G(S_1)$ e,

$$f_{S_2S_1} \circ \pi_2 : \Pi G/G(S) \longrightarrow^{\pi_2} G/G(S_2) \longrightarrow^{f_{S_2S_1}} G/G(S_1),$$

que é dada pela composição da projeção em $G/G(S_2)$ e a aplicação quociente

$$f_{S_2S_1} : G/G(S_2) \longrightarrow G/G(S_1).$$

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi G/G(S) \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
G/G(S_2) \arrow[rr, "f_{s_2s_1}"] & & G/G(S_1)
\end{tikzcd}$$

Note que ao aplicar $f_{S_2S_1}$ em dois elementos de uma mesma classe em $G/G(S_2)$, estes são levados em uma mesma classe em $G/G(S_1)$, pois se $[\sigma]_{S_2} = [\tau]_{S_2} \in G/G(S_2)$, tem-se que $\sigma^{-1}\tau \in G(S_2) \subseteq G(S_1)$. Logo, $[\sigma]_{S_1} = [\tau]_{S_1} \in G/G(S_1)$,

Considere $E(S_1, S_2)$ o conjunto em que $\pi_1$ e $f_{S_2S_1} \circ \pi_2$ coincidem, isto é,

$$E(S_1, S_2) = \{([\sigma]_S)_S \in \Pi G/G(S) : f_{S_2S_1} \circ \pi_2([\sigma]_S)_S) = \pi_1([\sigma]_S)_S)\}.$$

Vejamos que $E(S_1, S_2)$ é igual ao seu fecho, sendo assim, fechado de $\Pi G/G(S)$ com a topologia produto. Para tanto, seja $x \in \overline{E(S_1, S_2)}$. Denote:

$$x = ([\sigma]_S)_S.$$

Por propriedade de fecho, todo aberto $U_x \ni x$ de $\Pi G/G(S)$ satisfaz:

$$U_x \cap E(S_1, S_2) \neq \emptyset.$$

Em particular, isto vale para o aberto:

$$U_x = \{\sigma_1\} \times \{\sigma_2\} \times \Pi G/G(S).$$

Logo, existe $y \in U_x \cap E(S_1, S_2)$. Denote:

$$y = ([\tau]_S)_S.$$

Como $y \in E(S_1, S_2)$, tem-se que:

$$f_{S_2 S_1} \circ \pi_2(([\tau]_S)_S) = \pi_1(([\tau]_S)_S).$$

Agora, como $y \in U_x$, segue que:

$$\sigma_1 = \tau_1,$$
$$\sigma_2 = \tau_2$$

e, assim,

$$\begin{aligned} f_{S_2 S_1} \circ \pi_2(([\tau]_S)_S) = \pi_1(([\tau]_S)_S) &\Leftrightarrow \\ f_{S_2 S_1}([\tau_2]_{S_2}) = [\tau]_{S_1} &\Leftrightarrow \\ f_{S_2 S_1}([\sigma_2]_{S_2}) = [\sigma]_{S_1} &\Leftrightarrow \\ x \in E(S_1, S_2). \end{aligned}$$

Conclui-se que $E(S_1, S_2)$ é fechado. Como a interseção de fechados é fechado, seque que:

$$\bigcap_{S_1 \subseteq S_2} E(S_1, S_2)$$

é fechado. Agora, por ser um fechado no compacto $\Pi G/G(S)$, tem-se que $\bigcap_{S_1 \subseteq S_2} E(S_1, S_2)$ é compacto e igual a imagem de $G$.** Segue o resultado. $\square$

Por último, como para cada subconjunto finito $S$ $G$-estável, $G(S)$ é um subgrupo que é aberto e, assim, fechado. Como $\bigcap G(S) = \{1_G\}$, segue que a componente conexa de $G$ contendo $1_G$ é simplesmente $\{1_G\}$. Analogamente, se $\tau \in G$, tem-se que para cada subconjunto finito $S$ $G$-estável, $\tau G(S)$ é aberto e, portanto, fechado contendo $\tau$. Segue que $\bigcap \tau G(S) = \{\tau\}$. Como as componentes conexas de $G$ são seus conjuntos unitários $\{\tau\}$, com $\tau \in G$, tem-se que $G$ é totalmente desconexo. $\square$

**Proposição 2.8.** *Seja $\Omega$ extensão galoisiana de $F$. Então:*

$$\Omega^{Gal_F(\Omega)} = F.$$

*Demonstração.* É claro que $F \subseteq Gal_F(\Omega)$. Provemos que se $a \in \Omega$ e $a \notin F$, então, $a \notin \Omega^{Gal_F(\Omega)}$.

Seja $a \in \Omega \setminus F$, pertencente a uma extensão galoisiana finita de $E$ sobre $F$. Portanto,

$$F = E^{Gal_F(E)}.$$

Como $a \notin F$, existe $\sigma \in Gal_F(E)$, tal que $\sigma$ move $a$, ou seja,

$$\sigma(a) \neq a.$$

Pela **Proposição 2.7**, como $\eta$ é uma sobrejeção, existe um $\overline{\sigma} \in Gal_F(\Omega)$ tal que:

$$\eta(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}|_E = \sigma.$$

Lembrando que $a \in E$, tem-se que:

$$\overline{\sigma}(a) = \overline{\sigma}|_E(a) = \sigma(a) \neq a.$$

Como existe um $\overline{\sigma} \in Gal_F(\Omega)$, que não fixa $a$, conclui-se que $a \notin \Omega^{Gal_F(\Omega)}$. Assim,

$$\Omega^{Gal_F(\Omega)} = F.$$

$\square$

## 2.4 O teorema fundamental da teoria de Galois infinita

**Proposição 2.9.** *Seja $\Omega$ uma extensão galoisiana sobre $F$, com grupo de Galois $Gal_F(\Omega) = G$.*

- *Seja $M$ um subcorpo de $\Omega$ contendo $F$, então $\Omega$ é galoisiana sobre $M$, o grupo de Galois $Gal_M(\Omega)$ é fechado em $G$ e $\Omega^{Gal_M(\Omega)} = M$.*
- *Se $H$ é um subgrupo de $G$, então o fecho de $H$, denotado por $\overline{H}$, é $Gal_{\Omega^H}(\Omega)$.*

*Demonstração.* Mostremos os dois itens:

- Seja $M$ um subcorpo de $\Omega$ contendo $F$, então $\Omega$ é galoisiana sobre $M$, o grupo de Galois $Gal_M(\Omega)$ é fechado em $G$ e $\Omega^{Gal_M(\Omega)} = M$.

  *Demonstração.* Pela **Proposição 2.4**, $\Omega$ é extensão galoisiana sobre $M$. Se $S \subseteq M$ é um subconjunto finito, então $G(S)$ é um subgrupo aberto de $G$, sendo assim, fechado, pelo **Lema 2.1**. Vejamos que:
$$Gal_M(\Omega) = \bigcap_{S \subseteq M} G(S).$$
  ($\subseteq$) Considere $\sigma \in Gal_M(\Omega)$ e $S \subseteq \Omega$ um subconjunto finito. Então, $\sigma$ fixa todos os elementos de $S$, ou seja, $\sigma \in G(S)$. Como $S \subseteq M$ foi um subconjunto finito arbitrário, segue que:
$$\sigma \in \bigcap_{S \subseteq M} G(S).$$
  ($\supseteq$) Seja $\sigma \in \cap_{S \subseteq M} G(S)$ e $a \in M$. Note que $\{a\}$ é subconjunto finito de $M$. Assim, $\sigma \in G(\{a\})$. Consequentemente,
$$\sigma(a) = a.$$
  Conclui-se que
$$\sigma \in Gal_M(\Omega).$$
  Como a interseção de fechados e um fechado, segue que $Gal_M(\Omega) = \bigcap_{S \subseteq M} G(S)$ é um fechado de $G$. Agora, como $\Omega$ é galoisiana sobre $M$, pela **Proposição 2.8**:
$$\Omega^{Gal_M(\Omega)} = M.$$
  □

- Se $H$ é um subgrupo de $G$, então $Gal_{\Omega^H}(\Omega)$ é fecho de $H$, denotado por $\overline{H}$.

*Demonstração.* Como $H$ é subgrupo de $G = Gal_F(\Omega)$. Em particular, $H$ fixa $F$. Assim,
$$F \subseteq \Omega^H.$$
Pelo item anterior, $\Omega$ é extensão galoisiana sobre $\Omega^H$ e $Gal_{\Omega^H}(\Omega)$ é fechado.

**Afirmação 2.10.** $\overline{H} = Gal_{\Omega^H}(\Omega)$

*Demonstração.* ($\subseteq$) Note que $H$ fixa $\Omega^H$ por definição. Assim, $H \subseteq Gal_{\Omega^H}(\Omega)$. Como o fecho de um conjunto é a interseção de todos os fechado que o contêm e $Gal_{\Omega^H}(\Omega)$ é fechado, segue que $\overline{H} \subseteq Gal_{\Omega^H}(\Omega)$.

($\supseteq$) Seja $\sigma \in G \setminus \overline{H}$. Mostremos que $\sigma \notin Gal_{\Omega^H}(\Omega)$. Para tanto, basta notar que $\sigma$ move algum elemento de $\Omega^H$.

Como $\sigma \notin \overline{H}$, existe um aberto $U$ de $G$ tal que:
$$U \cap H = \emptyset.$$

Sendo
$$\{\sigma Gal_E(\Omega) : E \text{ extensão finita galoisiana sobre } F\}$$
um sistema fundamental de vizinhanças de $\sigma$, existe uma extensão finita galoisiana $E$ de $F$ tal que:
$$\sigma Gal_E(\Omega) \subseteq U.$$
Logo, $\sigma_E(\Omega) \cap H = \emptyset$.

Pela **Proposição 2.7**, existe $\eta$ sobrejeção contínua:
$$\eta : Gal_F(\Omega) \longrightarrow Gal_F(E)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_E$$

Além disso, já foi demonstrado que a imagem inversa de $\sigma|_E = \sigma Gal_E(\Omega)$, ou seja,
$$\eta^{-1}(\sigma|_E) = \sigma Gal_E(\Omega).$$

Consequentemente, $\sigma_E(\Omega) \cap H = \emptyset$ implica $\eta^{-1}(\sigma|_E) \cap H = \emptyset$. Logo,
$$\sigma|_E \notin \eta(H).$$
Portanto, $\sigma$ move algum elemento de $E^{\eta(H)}$.

Por sua vez, $E^{\eta(H)} \subseteq \Omega^H$, pois, se $a \in E^{\eta(H)} \subseteq \Omega$ e $\sigma \in H$ :
$$\sigma(a) = \sigma|_E(a) = \eta(\sigma)(a) = a,$$
ou seja, $a \in \Omega^H$.

Disso, segue que $\sigma$ move algum elemento de $\Omega^H$, assim, $\sigma \notin Gal_{\Omega^H(\Omega)}$, como desejado.

□

Finalmente, o teorema fundamental:

**Teorema 2.3.** *Seja $\Omega$ uma extensão galoisiana sobre $F$, com grupo de Galois $Gal_F(\Omega) = G$. Então,as aplicações:*
$$\phi : H \longmapsto \Omega^H$$
*e*
$$\psi : M \longmapsto Gal_M(\Omega)$$
*são bijeções inversas entre os conjuntos de subgrupos fechados de $G$ e o conjunto de corpos intermediários entre $\Omega$ e $F$ :*
$$\{\textit{subconjuntos fechados de } G\} \leftrightarrow \{\textit{corpos intermediários } F \subseteq M \subseteq \Omega\}.$$

*Além disso,*

1. *a correspondência é reversa por inclusão, isto é,*
$$H_1 \supseteq H_2 \Longleftrightarrow \Omega^{H_1} \subseteq \Omega^{H_2};$$
2. *um subgrupo fechado $H$ de $G$ é aberto se, e somente se, $\Omega^H$ é extensão finita sobre $F$, no caso, $(G : H) = [\Omega^H : F]$;*
3. *Há uma correspondência entre:*
$$\sigma H \sigma^{-1} \leftrightarrow \sigma M.$$
*Assim, $\Omega^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(\Omega^H)$ e $Gal_{\sigma M}(\Omega) = \sigma Gal_M(\Omega)\sigma^{-1}$;*

4. *um subgrupo fechado $H$ de $G$ é normal se, e somente se, $\Omega^H$ é Galois sobre $F$, no caso, $Gal_F(\Omega^H) \cong G/H$.*

*Demonstração.* Mostremos, primeiramente, que $\phi$ e $\psi$ são aplicações inversas:

- Seja $H$ subgrupo fechado de $G$. Pela **Proposição 2.9**, $\Omega$ é Galois sobre $\Omega^H$ e $Gal_{\Omega^H}(\Omega) = \overline{H}$. Como $H$ é fechado,
$$H = \overline{H} = Gal_{\Omega^H}(\Omega).$$
Assim,
$$\psi(\phi(H)) = \psi(\Omega^H) = Gal_H(\Omega) = H.$$

- Seja $M$ corpo intermediário $F \subseteq M \subseteq \Omega$. Pela proposição anterior, $Gal_M(\Omega)$ é fechado em $G$ e
$$\Omega^{Gal_M(\Omega)} = M.$$
Logo,
$$\phi(\psi(M)) = \phi(Gal_M(\Omega)) = \Omega^(Gal_M(\Omega)) = M.$$
Portanto, $\phi$ e $\psi$ são bijeções inversas. Provemos agora os itens $(1) - (4)$.

1. a correspondência é reversa por inclusão, isto é,
$$H_1 \supseteq H_2 \Longleftrightarrow \Omega^{H_1} \subseteq \Omega^{H_2};$$
*Demonstração.* ($\Longrightarrow$) Se $H_1 \supseteq H_2$, então, se um elemento de $\Omega$ é fixo por $H_1$, em particular, é fixo por $H_2$. Portanto,
$$\Omega^{H_1} \subseteq \Omega^{H_2}.$$
($\Longleftarrow$) Como $\Omega^{H_1} \subseteq \Omega^{H_2}$, se $\sigma \in G$ fixa $\Omega^{H_2}$, tem-se que $\sigma$ fixa $\Omega^{H_1}$, ou seja,
$$Gal_{\Omega^{H_2}}(\Omega) \subseteq Gal_{\Omega^{H_1}}(\Omega).$$
Pela proposição anterior e, como $H_1$ e $H_2$ são fechados, segue que, para $i = \{1, 2\}$ :
$$Gal_{\Omega^{H_i}}(\Omega) = \overline{H_i} = H_i.$$
Logo,
$$H_2 \subseteq H_1.$$
□

2. um subgrupo fechado $H$ de $G$ é aberto se, e somente se, $\Omega^H$ é extensão finita sobre $F$, no caso, $(G : H) = [\Omega^H : F]$;

*Demonstração.* Seja $H$ subgrupo fechado de $G$. Primeiramente, vejamos que:
$$\Delta : G/H \longrightarrow Hom_F(\Omega^H, \Omega)$$
$$[\sigma] \longmapsto \sigma|_{\Omega^H}$$
é uma bijeção.

**Afirmação 2.11.** $\Delta$ *é injetora.*

*Demonstração.* Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, tal que:

$$\Delta([\sigma_1]) = \Delta([\sigma_2]).$$

Então,

$$\sigma_1|_{\Omega^H} = \sigma_2|_{\Omega^H}.$$

Assim, $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ fixa $\Omega^H$, ou seja, $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \in Gal_{\Omega^H}(\Omega)$. Como $Gal_{\Omega^H}(\Omega) = H$, tem-se que $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \in H$. Portanto,

$$[\sigma_1] = [\sigma_2].$$

**Afirmação 2.12.** *$\Delta$ é sobrejetora.*

*Demonstração.* Seja $\tau \in Hom_F(\Omega^H, \Omega)$. Pela **Proposição 2.5**, existe um $F$-isomorfismo $\overline{\tau} : \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que:

$$\overline{\tau}|_{\Omega^H} = \tau.$$

Considere $[\tau] \in G/H$, então:

$$\Delta([\tau]) = \overline{\tau}|_{\Omega^H} = \tau.$$

Logo, $\tau \in Im(\Delta)$, consequentemente, $\Delta$ é sobrejetora. □

Agora, como $\Delta$ é bijeção,

$$|G/H| = |Hom_F(\Omega^H, \Omega)|.$$

Conclui-se que:

$$(G : H) = |G/H| = |Hom_F(\Omega^H, \Omega)|.$$

Note que nos resultados acima, assumimos que $H$ é subgrupo fechado de $G$. Agora, supondo que, além disso:

($\Longrightarrow$) Hipótese: $H$ seja subgrupo aberto de $G$.

*Demonstração.* Como $G$ é compacto, pelo **Lema 2.1**, sendo $H$ aberto, o índice de $H$ em $G$ é finito, $(G : H) = n$.

($\Longleftarrow$) Hipótese: $\Omega^H$ é extensão finita sobre $F$, $[\Omega^H : F] = n$.

*Demonstração.* Como $\Omega^H$ é extensão finita sobre $F$, tem-se que:

$$|Gal_F(\Omega^H)| \leqslant [\Omega^H : F] = n.$$

Agora,

$$(G : H) = |Gal_F(\Omega^H)| \leqslant n.$$

Por um lema anterior, sendo $H$ fechado e de índice finito, segue que $H$ é aberto de $G$.

□

3. Há uma correspondência entre:

$$\sigma H \sigma^{-1} \leftrightarrow \sigma M.$$

Assim, $\Omega^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(\Omega^H)$ e $Gal_{\sigma M}(\Omega) = \sigma Gal_M(\Omega)\sigma^{-1}$;

*Demonstração.* Como já mostramos que $\psi$ e $\phi$ são bijeções inversas, basta notarmos que se $H \leftrightarrow M$, então:

$$\phi(\sigma H \sigma^{-1}) = \sigma M$$

$$\psi(\sigma M) = \sigma M \sigma^{-1}.$$

- $\phi(\sigma H \sigma^{-1}) = \sigma M$

**Afirmação 2.13.**
$$\sigma(\Omega^H) = \Omega^{\sigma H \sigma^{-1}}.$$

*Demonstração.* Seja $a \in \Omega^H$, então para todo $\tau \in H$,

$$\tau a = a.$$

Isso ocorre se, e somente se, para todo $\tau \in H$,

$$\sigma \tau \sigma^{-1}(\sigma a) = \sigma \tau a = \sigma a,$$

o que equivale a dizer que para todo $\tau \in H$,:

$$\sigma a \in \Omega^{\sigma \tau \sigma^{-1}}.$$

Conclui-se que:
$$\sigma(\Omega^H) = \Omega^{\sigma H \sigma^{-1}}.$$

□

Logo,
$$\sigma M = \sigma(\phi(H)) = \sigma(\Omega^H) = \Omega^{\sigma H \sigma^{-1}} = \phi(\sigma H \sigma^{-1}).$$

- $\psi(\sigma M) = \sigma M \sigma^{-1}$.

**Afirmação 2.14.** $Gal_{\sigma M}(\Omega) = \sigma Gal_M(\Omega)\sigma^{-1}$.

*Demonstração.* Seja $\tau \in Gal_{\sigma M}(\Omega)$, então, para todo $a \in M$ :

$$\tau(\sigma a) = \sigma a.$$

Isto equivale a dizer que, para todo $a \in M$ :

$$\sigma^{-1} \tau \sigma a = a.$$

Isto ocorre se, e somente se,
$$\sigma^{-1} \tau \sigma \in Gal_M(\Omega),$$

ou seja,
$$\tau \in \sigma Gal_M(\Omega)\sigma^{-1}.$$

□

Agora, lembre que, como $H$ é fechado, $H = Gal_M(\Omega)$. Assim:

$$\psi(\sigma M) = Gal_{\sigma M}(\Omega) = \sigma Gal_M(\Omega)\sigma^{-1} = \sigma H \sigma^{-1}.$$

□

4. um subgrupo fechado $H$ de $G$ é normal se, e somente se, $\Omega^H$ é Galois sobre $F$, no caso, $Gal_F(\Omega^H) \cong G/H$. *Demonstração.* Considere $H \leftrightarrow M$, ou seja,

$$\phi(H) = \Omega^H = M$$

$$\psi(M) = Gal_M(\Omega) = H.$$

**Afirmação 2.15.** *$H$ é normal em $G$ se, e somente se $M$ é estável por $G$.*

*Demonstração.* Temos que se $H$ é normal,

$$\begin{aligned}\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H &\Longleftarrow \psi(\sigma M) \subseteq H \\ &\Longleftarrow \phi(\psi(\sigma M)) \subseteq \phi(H) \\ &\Longleftarrow \sigma M \subseteq M,\end{aligned}$$

ou seja, $M$ é $G$-estável. □

**Afirmação 2.16.** *$H$ é normal em $G$ se, e somente se $M$ é estável por $G$.*

*Demonstração.* Temos que se $H$ é normal,

$$\begin{aligned}\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H &\Longleftarrow \psi(\sigma M) \subseteq H \\ &\Longleftarrow \phi(\psi(\sigma M)) \subseteq \phi(H) \\ &\Longleftarrow \sigma M \subseteq M,\end{aligned}$$

ou seja, $M$ é $G$-estável. □

Agora, $M$ é $G$-estável se, e somente se, for união de extensões finitas $G$-estáveis, ou seja,

$$M = \bigcup_{F \subseteq E \text{ ext. finita } G\text{-estável}} E.$$

Pelo **Corolário 2.1**, cada $E$ é Galois sobre $F$. Assim, $M$ é união de extensões finitas galoisianas se, e somente se, $M = \Omega^H$ for uma extensão galoisiana.

□

# 3 Considerações Finais

A realização deste trabalho possibilitou o estudo de vários conceitos que relacionaram a disciplina de Introdução à Teoria de Galois e Topologia. A principal referência bibliográfica foi o capítulo 7 do livro "MILNE, J.S.*Fields and Galois Theory*."

A maioria dos temas propostos foram devidamente explicados no relato. Entretanto, algumas partes ainda precisam de uma análise mais detalhada como o argumento $(**)$ do **Teorema 2.2** que afirma que " $\bigcap_{S_1 \subseteq S_2} E(S_1, S_2)$ é igual a imagem de $G$" e a parte (2) do Teorema fundamental da teoria de Galois infinita. A **Proposição 2.5** não foi demonstrada, mas sua prova pode ser encontrada na página 92 da bibliografia já citada.

# Referências


[1] MILNE, J.S.*Fields and Galois Theory*. Disponível em: "www.jmilne.org/math/". 2015.

[2] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. SBM. 2009.

[3] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. IMPA. Quarta edição. 2009.