Assim, $h_n = |\sqrt[n]{a} - 1| < a/n$ e isso será menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ fixado de antemão, desde que $n > a/\varepsilon$.

No caso $0 < a < 1$, temos que $1/a > 1$, donde $1/\sqrt[n]{a} \to 1$. Então, pelo item d) do Teorema 4.8, concluímos que $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4.10. Exemplo. $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ainda aqui temos que $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, onde h_n novamente é um número positivo conveniente. Mas agora reter o segundo termos do binômio de Newton não basta para nossos propósitos, pois, com ele apenas,

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n, \quad \text{donde } h_n < 1,$$

e essa desigualdade não ajuda para provar que h_n tende a zero. Devemos reter o terceiro termo, assim:

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

donde $h_n^2 < 2/(n-1)$. Agora sim, dado $\varepsilon > 0$, $2/(n-1)$ será menor do que ε^2, desde que n seja maior do que $2/\varepsilon^2 + 1 = N$. Conseqüentemente,

$$n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| = h_n < \varepsilon,$$

provando o resultado desejado.

Exercícios

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada uma das seguintes seqüências:

$$\text{a) } a_n = \frac{n}{n+1}; \quad \text{b) } a_n = 3 + 2(-1)^n; \quad \text{c) } a_n = \frac{n}{n^2+1}; \quad \text{d) } a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

2. Em cada um dos casos seguintes, são dados os primeiros termos de uma seqüência. Supondo que persista a tendência observada em cada caso, escreva a forma geral de cada uma das seqüências.

a) $1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5, \ldots$; ;b) $1,\ -1/2,\ 1/3,\ -1/4 \ldots$;

c) $1,\ 1/4,\ 1/9,\ 1/16, \ldots$; d) $1,\ -1/2,\ 1/6,\ -1/24,\ 1/120, \ldots$

3. Use a Definição 4.1 para provar que

$$\text{a) } \lim \frac{n}{n^2+1} = 0; \quad \text{b) } \lim \frac{2n^2}{n^2+7} = 2; \quad \text{c) } \lim \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3.$$

4. Descubra o limite de cada uma das seqüências seguintes e, em seguida, demonstre que o suposto limite satisfaz a Definição 4.1.

$$\text{a) } a_n = \frac{n\cos\sqrt{n^2+7}}{n^2+1}; \quad \text{b) } a_n = \frac{\sqrt{n}(1+8\sqrt{n})}{4n-1}; \quad \text{c) } a_n = \frac{n^3-1}{2n^3-n}.$$

5. (Unicidade do limite) Prove que uma seqüência só pode convergir para um único limite.

6. Prove que se a_n tem limite L, então $|a_n|$ tem limite $|L|$. Dê exemplo de uma seqüência (a_n) tal que $|a_n|$ converge, mas não a_n.

7. Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências tais que $|a_n - a| < C|b_n|$, onde a é um certo número real e C uma constante positiva. Usando a definição de limite, mostre que se $b_n \to 0$ então $a_n \to a$.

8. Prove que se (a_n) é uma seqüência que converge para zero e (b_n) uma seqüência limitada, não necessariamente convergente, então $(a_n b_n)$ converge para zero.

9. Prove que a seqüência $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$ tende a zero.

10. Faça o mesmo para a seqüência $a_n = a^n$, onde $0 < a < 1$.

11. Supondo que $a_n \geq 0$ para todo n e $a_n \to 0$, prove que $\sqrt{a_n} \to 0$.

12. Supondo que $a_n \to L > 0$, prove que $a_n > 0$ a partir de um certo N.

13. Prove os ítens a) e b) do Teorema 4.8. Generalize a propriedade da soma, provando que o limite de uma soma qualquer de seqüências convergentes é a soma dos limites. Generalize também a propriedade do produto para o caso de vários fatores.

14. Prove que se (a_n) é uma seqüência convergente, com $a_n \leq b$, então $\lim a_n \leq b$. Mostre com contra-exemplo que, mesmo que seja $a_n < b$, não é verdade, em geral, que $\lim a_n < b$. Enuncie e demonstre propriedade análoga no caso $a_n > b$.

15. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências convergentes, com $a_n \leq b_n$. Prove que $\lim a_n \leq \lim b_n$. Mostre por meio de contra-exemplo que também aqui pode ocorrer a igualdade dos limites mesmo que seja $a_n < b_n$. [Observe que o exercício anterior é um caso particular deste, com seqüência $(b_n) = (b,\ b,\ \ldots)$]

16. **(Critério de confronto** ou **Teorema da seqüência intercalada).** Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três seqüências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, (a_n) e (c_n) convergindo para o mesmo limite L. Demonstre que (b_n) também converge para L.

17. Prove que $\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

18. A negação da Definição 4.1 é "a_n não converge para L". Mas como escrever essa negação em termos de ε e N?

Sugestões e soluções

2. a) $n/(n+1)$, $n \geq 1$; b) $(-1)^{n+1}/n$, $n \geq 1$, ou $(-1)^n/(n+1), n \geq 0$;

c) $1/n^2$, $n \geq 1$; d) $-(-1)^n/n!$, $n \geq 1$.

3. b) $|a_n - 2| = \dfrac{14}{n^2+7} < \dfrac{14}{n^2}$; c) $|a_n - 3| = \dfrac{15}{n\sqrt{n}+5} < \dfrac{15}{n\sqrt{n}}$.

4. b) $|a_n - 2| = \dfrac{\sqrt{n}+2}{4n-1} \leq \dfrac{\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n-n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

5. Suponha existirem dois limites distintos, L e L' e tome $\varepsilon < |L - L'|/2$. Então, $|a_n - L| < \varepsilon$ a partir de um certo N_1 e $|a_n - L'| < \varepsilon$ a partir de um certo N_2. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$, de forma que $n > N$ acarreta simultaneamente $n > N_1$ e $n > N_2$. Assim, $n > N$ acarreta $|L - L'| = |(L - a_n) + (a_n - L')| \leq |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\varepsilon < |L - L'|$, o que é absurdo.

9. Multiplique numerador e denominador pela soma das raízes que aparecem na definição da seqüência.

10. Como $b = 1/a > 1$, $b = 1 + c$, com $c > 0$. Então,

$$b^n = \frac{1}{a^n} = (1+c)^n > 1 + nc > nc; \quad \text{logo, } a^n < \frac{1}{nc}.$$

Outro modo, utilizando o logaritmo, baseia-se no seguinte:

$$a^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log a < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log a}.$$

Nesta última passagem, ao dividir a desigualdade por $\log a$, levamos em conta que esse número é negativo, daí a mudança de sinal da desigualdade.

11. Deseja-se provar que $\sqrt{a_n} < \varepsilon$ a partir de um certo N. Observe que isto equivale a $a_n < \varepsilon^2$.

12. Use o Teorema 4.6.

13. Observe que $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

15. A seqüência $a_n = 1/n$ satisfaz $a_n > 0$; no entanto, $\lim a_n = 0$.

17. Use o critério de confronto, notando que $1 \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{n}$.

18. "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe um índice $n > N$ tal que $|a_n - L| > \varepsilon$". Isto é o mesmo que: "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe uma infinidade de índices $n > N$ tais que $|a_n - L| > \varepsilon$".

Exercícios

1. Seja (a_n) uma seqüência monótona que possui uma subseqüência convergindo para um limite L. Prove que (a_n) também converge para L.

2. Construa uma seqüência monótona convergente de números irracionais.

3. Sejam N_1 e N_2 subconjuntos infinitos e disjuntos do conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$, cuja união é o próprio $\mathbf{N}$. Seja (a_n) uma seqüência cujas restrições a N_1 e N_2 convergem para o mesmo limite L. Prove que (a_n) converge para L.

4. Construa uma seqüência que tenha uma subseqüência convergindo para -3 e outra convergindo para 8.

5. Construa uma seqüência que tenha três subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números 3, 4, 5.

6. Generalize o exercício anterior: dados os números $L_1, L_2, \ldots, L_k$, distintos entre si, construa uma seqüência que tenha k subseqüências, cada uma convergindo para cada um desses números.

7. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números inteiros positivos.

8. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números reais.

9. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \leq c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.

10. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \to c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.

11. Demonstre o teorema 4.16.

12. Prove que se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, então $a_n b_n \to +\infty$. Examine também as demais combinações de $a_n \to \pm\infty$ com L positivo ou negativo.

13. Prove que $5n^3 - 4n^2 + 7$ tende a infinito.

14. Prove que um polinômio $p(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ tende a $\pm\infty$ conforme a_k seja positivo ou negativo, respectivamente.

15. Seja $p(n)$ como no exercício anterior, com $a_k > 0$. Mostre que $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

16. Mostre que $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+h} \to \infty$.

17. Mostre que $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.

18. Considere a seqüência assim definida: $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ para $n > 1$. Escreva explicitamente os primeiros quatro ou cinco termos dessa seqüência. Prove que ela é uma seqüência convergente e calcule seu limite.

19. Generalize o exercício anterior considerando a seqüência assim definida: $a_1 = \sqrt{a}$, $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, onde $a > 0$.

20. Dado um número $N > 0$ e fixado um número qualquer $a_0 = a$, seja $a_n = (a_{n-1} + N/a_{n-1})/2$ para $n > 1$. Prove que, com exceção eventualmente de a_0, essa seqüência é decrescente. Prove que ela aproxima $\sqrt{N}$ e dê uma estimativa do erro que se comete ao se tomar a_n como aproximação de $\sqrt{N}$.

21. (Divisão áurea). Já vimos (p. 51) que um ponto A_1 de um segmento OA efetua a divisão áurea desse segmento se $OA/OA_1 = OA_1/A_1A$. Vimos também que o número ϕ, raiz positiva de $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ $[= (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,618]$, é chamado *razão áurea* e $\varphi = 1/\phi \approx 0,618$, *número áureo* (p. 50). Considere um eixo de coordenadas com origem O, $a_0 = 1$ a abscissa de A $(= A_0)$ e $a_1 = \varphi$ a abscissa de A_1. Construa a seqüência de pontos A_n com abscissa $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, $n \geq 2$. Prove (como já anunciamos na referida p. 51) que A_n efetua a divisão áurea do segmento OA_{n-1} e que $a_n \to 0$. Observe que os pares (a_0, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), etc., são os lados de retângulos áureos, como na construção de uma infinidade de retângulos áureos da p. 50. Escreva os primeiros dez termos da seqüência a_n.

22. (Seqüência de Fibonacci). (Veja a explicação da origem dessa seqüência em nosso artigo na RPM 6 ou no artigo do Prof. Alberto Azevedo na RPM 45.) Defina f_n indutivamente assim: $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Escreva os primeiros dez elementos dessa seqüência e observe que, pelo menos para os primeiros valores de n, vale a relação: $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$, onde a_n é a seqüência do exercício anterior. Prove, por indução, que essa relação é válida para todo $n \geq 2$. Prove que a seqüência $x_n = f_n/f_{n+1}$ é convergente e seu limite é o número áureo.

Sugestões e soluções

4. A seqüência $a_{2n} = -3$ e $a_{2n+1} = 8$ resolve. Construa outro exemplo.

5. Dado $n \in \mathbf{N}$, seja r_n o resto de sua divisão por 3. Verifique que a seqüência $a_n = r_n + 3$ resolve o problema.

6. Seja r_n o resto da divisão de n por k. $a_n = L_{r_n}$ resolve; explique por quê.

7. Construa a seqüência assim: 1; depois 1, 2; depois 1, 2, 3; depois 1, 2, 3, 4; e assim por diante, de forma que a seqüência é: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ... Outro modo: decomponha o conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$ numa união de conjuntos infinitos e disjuntos N_1, $N_2, \ldots$ Por exemplo. N_1 pode ser o conjunto dos números ímpares, $N_2 = 2N_1$, $N_3 = 2^2N_1, \ldots$; e, em geral, $N_n = 2^{n-1}N_1$. Verifique que esses N_n são realmente disjuntos e todo número natural está em um deles. Em seguida defina a seqüência assim: $a_n = m$ se $n \in N_m$. Outro modo: considere uma seqüência r_1, r_2, $r_3, \ldots$, obtida por enumeração de todos os números racionais. Observe que este exemplo também responde às exigências dos Exercícios 4 a 6. Observe também que as soluções dadas naqueles exercícios resultavam em subseqüências constantes, ao passo que os termos de r_n são todos diferentes entre si.

8. A seqüência (r_n) do exercício anterior resolve. Outra solução, ainda com a notação do exercício anterior: defina $a_n = r_m$ se $n \in N_m$.

10. Utilize o Teorema 4.6, tomando, por exemplo, $B = c + (1-c)/2$.

14. Observe que $p(n) = a_k n^k (1 + \ldots) = a_k n^k b_n$, onde b_n é a expressão entre parênteses, que tende a 1.

17. Observe que $\sqrt[n]{n!} > K \Leftrightarrow n! > K^n$. Agora lembre-se de que $n!$ tende a infinito mais depressa do que K^n, qualquer que seja K.

18. Supondo por um momento que (a_n) convirja para um certo L, passamos ao limite em $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, resolvemos a equação resultante e achamos $L = 2$. (Mas é *preciso* provar a existência do limite! Veja este exemplo: a seqüência 1, 3, 7, 15, 31,...; em geral, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, evidentemente não converge; logo, não podemos simplesmente passar ao limite nessa última igualdade para obter $L = 2L + 1$, ou $L = -1$.) Prove que a seqüência dada é crescente e limitada superiormente por 2.

19. Seja $b = \max\{a, \sqrt{a}, 2\}$. Claramente, $a_1 \le b$ e, supondo $a_n \le b$, teremos $a_{n+1} \le \sqrt{a+b} \le \sqrt{2b} \le 2b$. Isso prova que a seqüência é limitada superiormente. Prova-se também que ela é crescente, notando que $a_2 > a_1$ e que, supondo $a_n > a_{n-1}$, então $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} > \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$. Agora é só passar ao limite na fórmula de definição e achar a raiz positiva de $L^2 = a + L$, isto é, $L = (1 + \sqrt{1+4a})/2$.

20. Por um cálculo simples, $a_1 - \sqrt{N} = (a - \sqrt{N})^2/2a$. Isto prova que $a_1 > \sqrt{N}$ (mesmo que $a < \sqrt{N}$). Além disso, se $a > \sqrt{N}$,

$$a_1 - \sqrt{N} = \frac{(a-\sqrt{N})^2}{2a} = \frac{a-\sqrt{N}}{2a}(a-\sqrt{N}) < \frac{1}{2}(a-\sqrt{N}) < a - \sqrt{N},$$

mostrando que $\sqrt{N} < a_1 < a$. Com o mesmo tipo de raciocicínio, mesmo que a seja menor do que $\sqrt{N}$, prova-se que $\sqrt{N} < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_1$ e que

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{N} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{N}) < \ldots < \frac{a_1 - \sqrt{N}}{2^n}.$$

21. Das definições dadas segue-se que

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_0 - a_1}, \text{ donde } \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{A_2A_1}{OA_2},$$

mostrando que A_2 divide OA_1 na razão áurea. Com raciocínio análogo prova-se, por indução, que A_n divide $0A_{n-1}$ na razão áurea. Para provar que $a_n \to 0$, prove que

$$\varphi = \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

e conclua que $a_n = \varphi^n$.

22. Como já ob
valores de
ela valer p
$a_{k+1} = a_{k-}$
temos:

a_{k+1}

mas $(-1)^{k-}$

o que compl

4.4 Inter

Veremos a segu

4.22. Teor
de intervalos en
$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset$
todos os interv
além das hipóte
tender a zero, e

Demonstraç
não decrescente

vemos que (a_n)
logo, essas duas
Como $a_n < b_n$,

Isso significa qu
intervalos I_n é o
tende a zero), es
tração.

22. Como já observamos, a relação $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$ é válida para os primeiros valores de n; na verdade, basta saber que vale para $n = 2$. Vamos provar que se ela valer para $n = 2, 3, \ldots, k$, ela deve valer para $n = k + 1$. Por definição, $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$; e como a relação que desejamos provar vale para $n = 2, 3, \ldots, k$, temos:

$$a_{k+1} = a_{k-1} - a_k = (-1)^{k-1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2}) - (-1)^k(f_{k-2} - \varphi f_{k-1});$$

mas $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$ e $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$, de forma que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (-1)^{k+1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2} + f_{k-2} - \varphi f_{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1}[f_{k-3} + f_{k-2} - \varphi(f_{k-2} + f_{k-1})] \\ &= (-1)^{k+1}(f_{k-1} - \varphi f_k), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. A parte final do exercício fica por conta do leitor.

4.4 Intervalos encaixados

Veremos a seguir uma importante conseqüência da propriedade do supremo.

4.22. Teorema dos intervalos encaixados. *Consideremos uma família de intervalos encaixados, isto é, intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tais que $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. Então existe pelo menos um número c pertencendo a todos os intervalos I_n (ou, o que é o mesmo, $c \in I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots$). Se, além das hipóteses feitas, o comprimento $|I_n| = b_n - a_n$ do n-ésimo intervalo tender a zero, então o número c será único, isto é, $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots = \{c\}$.*

Demonstração. É claro que as seqüências (a_n) e (b_n) são, respectivamente, não decrescente e não crescente. Além disso, como

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1,$$

vemos que (a_n) é limitada à direita por b_1 e (b_n) é limitada à esquerda por a_1; logo, essas duas seqüências possuem limites, digamos, A e B respectivamente. Como $a_n < b_n$, é claro que

$$a_n \leq A \leq B \leq b_n.$$

Isso significa que $[A, B] \subset I_n$ para todo n. Então, se $A < B$, a interseção dos intervalos I_n é o próprio intervalo $[A, B]$; e se $A = B$ (como é o caso se $b_n - a_n$ tende a zero), essa interseção é o número $c = A = B$. Isso completa a demonstração.

seguida procura-se provar que x_0 é solução da equação dada, os elementos x_n sendo valores aproximados da solução

O esquema que acabamos de descrever é, na verdade, um poderoso instrumento de cálculo numérico (conhecido como "método das aproximações sucessivas"), além de ter também uma enorme importância teórica em várias teorias matemáticas.

Exercícios

1. Prove que uma seqüência limitada converge para L se e somente se L é seu único ponto de aderência.

2. Prove que uma seqüência limitada que não converge possui pelo menos dois pontos aderentes.

3. Prove que L é ponto de aderência de uma seqüência (a_n) se e somente se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos elementos da seqüência no intervalo $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. (Note que esta última afirmação não significa que os infinitos elementos sejam todos distintos, podem até ter todos o mesmo valor.)

4. Construa uma seqüência com elementos todos distintos e que tenha pontos de aderência em -1, 1 e 2.

5. Construa uma seqüência com uma infinidade de elementos inferiores a 3 e superiores a 7, mas que tenha 3 e 7 como pontos aderentes e somente estes.

6. Construa uma seqüência com elementos todos distintos entre si, tendo como pontos de aderência k números distintos dados, $L_1 < \ldots < L_k$ e somente esses.

7. Sabemos que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é enumerável. Seja (r_n) uma seqüência desses números numa certa enumeração, isto é, uma seqüência com elementos distintos, cujo conjunto de valores é $\mathbf{Q}$. Prove que todo número real é ponto de aderência dessa seqüência.

8. Seja (a_n) uma seqüência tal que toda sua subseqüência possui uma subseqüência convergindo para um mesmo número L. Prove que (a_n) converge para L.

9. Prove que uma seqüência (a_n) que não é limitada possui uma subseqüência (a_{n_j}) tal que $1/a_{n_j} \to 0$.

10. Dê exemplo de uma seqüência não limitada que tenha subseqüências convergentes; e de seqüência não limitada que não tenha uma única subseqüência convergente.

11. Vimos que a propriedade do supremo tem como conseqüência a propriedade dos intervalos encaixados. Prove que esta última propriedade implica a propriedade do supremo, ficando assim provado que a propriedade do supremo equivale à propriedade dos intervalos encaixados.

12. Prove que se postularmos que "toda seqüência não decrescente e limitada é convergente" conseguiremos provar a propriedade dos intervalos encaixados, portanto, também a propriedade do supremo, estabelecendo assim que esta propriedade é equivalente a afirmar que "toda seqüência não decrescente e limitada converge."

13. Prove, diretamente da Definição 4.26, que $a_n = 1+1/n$ é uma seqüência de Cauchy.

14. Prove, diretamente da Definição 4.26, que se (a_n) e (b_n) são seqüências de Cauchy, também o são $(a_n + b_n)$ e $(a_n b_n)$.

15. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências de Cauchy, com $b_n \geq b > 0$. a) Prove, diretamente da Definição 4.26, que (a_n/b_n) também é de Cauchy. b) Dê um contra-exemplo para mostrar que isto nem sempre é verdade se $b_n \to 0$.

16. Dados a_1 e a_2, com $a_1 < a_2$, considere a seqüência (a_n) definida da seguinte maneira: $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ a) Prove que a subseqüência de índices ímpares, $a_1, a_3, a_5, \ldots$, é crescente e limitada; e que a subseqüência de índices pares, $a_2, a_4, a_6, \ldots$, é decrescente e limitada. b) Prove que (a_n) é seqüência de Cauchy.

17. Observe que o Teorema 4.25 nos mostra que a propriedade do supremo tem como conseqüência que toda seqüência de Cauchy converge. Prove a recíprova desta proposição, isto é, prove que se toda seqüência de Cauchy converge, então vale a propriedade do supremo, ficando assim provado que esta propriedade é equivalente a toda seqüência de Cauchy ser convergente.

Sugestões

1. Comece provando que a_n convergir para L significa que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, só existe um número finito de elementos da seqüência fora do intervalo $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$.

4. Eis um modo de fazer isso: considere três seqüências distintas, $-1 + 1/n$, $1 + 1/n$ e $2 + 1/n$, as quais convergem para -1, 1 e 2, respectivamente. Em seguida entrelace convenientemente essas seqüências; por exemplo, tomando um elemento de cada uma delas em sucessão e repetidamente, construindo a seqüência (a_n), assim definida:

$$a_{3n} = -1 + 1/3n; \quad a_{3n+1} = 1 + 1/(3n+1); \quad a_{3n+2} = 2 + 1/(3n+2).$$

6. Reveja o Exercício 6 da p. 92.

8. Se (a_n) não converge para L, existe um $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de elementos a_n tais que $|a_n - L| > \varepsilon$.

11. Seja C um conjunto de números reais não-vazio e limitado superiormente. Queremos provar que C possui supremo. Seja $a_1 \leq$ algum elemento de C e $b_1 > a_1$ uma cota superior de C. Seja $a = (a_1 + b_1)/2$ e seja $[a_2,\ b_2]$ aquele dos intervalos $[a_1,\ a]$ e $[a,\ b_1]$ tal que $a_2 \leq$ algum elemento de C e b_2 é cota superior de C. Assim prosseguindo, indefinidamente, construímos uma família de intervalos encaixados $I_n = [a_n,\ b_n]$, cuja interseção determina um número real c. Prove que c é o supremo de C.

12. Prove primeiro que toda seqüência não crescente e limitada converge.

14. Observe que $a_n b_n - a_m b_m = a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)$ e que (a_n) e (b_n) são seqüências limitadas.

15. Observe que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{|a_n b_m - a_m b_n|}{b_n b_m} = \frac{|a_n(b_m - b_n) + b_n(a_n - a_m)|}{b_n b_m},$$

que $b_n b_m \geq b^2$ e que as seqüências originais são limitadas.

16. a) Comece fazendo um gráfico representando $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7,$ etc. Percebe-se que (a_{2n}) é seqüência decrescente e (a_{2n+1}) é crescente. Prove isso.
b) Prove que

$$|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}| = \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - a_{n-3}| = \ldots = \frac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1|.$$

Observe também que

$$|a_n - a_{n+p}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p-1} - a_{n+p}|.$$

17. Basta provar que vale a propriedade dos intervalos encaixados.

4.5 Notas históricas e complementares

A não enumerabilidade dos números reais

O Teorema 4.22 permite dar outra demonstração de que o conjunto dos números reais não é enumerável, como faremos agora. Raciocinando por absurdo, suponhamos que todos os números reais estivessem contidos numa seqüência (x_n). Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo que não contenha x_1. Em seguida tomamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, que não contenha x_2; depois um intervalo $I_3 = [a_3, b_3] \subset I_2$, que não contenha x_3; e assim por diante. Dessa maneira obtemos uma seqüência (I_n) de intervalos fechados e encaixados, tal que $\cap I_n$ conterá ao menos um número real c. Isso contradiz a hipótese inicial de que todos os números reais estão na seqüência (x_n), visto que $x_n \notin \cap I_n$. Somos, pois, forçados a abandonar a hipótese inicial e concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Cantor e os números reais

Vimos, no capítulo anterior, como Dedekind construiu os números reais a partir dos racionais. Vamos considerar1 agora a construção dos números reais feita por Cantor.

Georg Cantor nasceu em São Petersburgo, onde viveu até 1856, quando sua família transferiu-se para o sul da Alemanha. Doutorou-se pela Universidade de Berlim, onde foi aluno de Weierstrass, de quem teve grande influência em sua formação matemática.