em x_0.

Demonstração. Pela continuidade da função f, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$y \in V_{\delta'}(y_0) \cap D_f \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Analogamente, pela continuidade da função g, existe $\delta > 0$ em correspondência a δ' tal que

$$x \in V_\delta(x_0) \cap D_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta'.$$

É claro então que

$$x \in V(\delta) \cap D_g \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon,$$

que completa a demonstração.

Exercícios

1. Prove que a é ponto de acumulação de um conjunto X se e somente se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x \in V'_\varepsilon(a)$.

2. Prove que o limite de uma função, quando existe, é único.

3. Verifique que a função de Dirichlet, $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional, pode ser expressa como

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k}].$$

4. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua para todo x, enquanto $|f|$ seja sempre contínua.

5. Prove que a função $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = -x$ para x irracional só é contínua em $x = 0$, mas $|f(x)|$ é contínua para todo x.

6. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $f(x) = 1/x$ é contínua em todo o seu domínio $x \neq 0$.

7. Prove que $\sqrt{x}$ é uma função contínua em seu domínio $x \geq 0$.

8. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $f(x) = x^2$ é uma função contínua em todo o seu domínio.

9. Prove que a função $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ não tem limite com $x \to 0$.

10. Prove que a função $f(x) = 1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$ não tem limite com $x \to 0$.

11. Prove o Teorema 6.8 utilizando o Teorema 6.10.

12. Prove os três primeiros itens do Teorema 6.8 diretamente, sem utilizar o Teorema 6.10.

13. Dadas duas funções contínuas f e g, prove que $\max\{f,\ g\}$ e $\min\{f,\ g\}$ também são contínuas.

14. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{5}{x-1} = 1$.

15. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

16. Prove que um polinômio é uma função contínua em todo ponto $x = a$, o mesmo sendo verdade do quociente de dois polinômios, nos pontos que não anulam o denominador.

17. **(Critério de confronto ou da função intercalada.)** Sejam f, g e h três funções com o mesmo domínio D, sendo $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Prove que se $f(x)$ e $h(x)$ têm o mesmo limite L com $x \to a$, então $g(x)$ também tem limite L com $x \to a$.

18. Prove que se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(x) \ge 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em $x = a$.

19. Sejam f uma função com domínio D, $E \subset D$ e a um ponto de acumulação de E. Prove que se $f(x) \to L$ com $x \to a$ em D, o mesmo é verdade com $x \to a$ em E. Dê um contra-exemplo, mostrando que uma função pode ter limite quando restrita a um sub-domínio E de D e não ter limite em seu domínio D.

20. Seja f uma função contínua em toda a reta, que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula. Prove, em geral, que toda função contínua num domínio D, que seja nula num subconjunto denso de D, é identicamente nula.

Sugestões e soluções

2. Deve-se provar que é impossível haver dois limites distintos L e L'. Veja o Exercício 5 da p. 83.

6. Sendo $a \ne 0$, $|f(x) - f(a)| = \dfrac{|x-a|}{|ax|}$. Com $|x| > |a|/2$,

$$|f(x) - f(a)| < (2/a^2)|x - a|.$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar δ igual ao menor dos números $a^2\varepsilon/2$ e $|a|/2$ (esta última condição é necessária para garantir $|x| > |a|/2$. Prove isto também.) para termos $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

7. Observe que, sendo $a > 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ para satisfazer a condição (6.3). O caso $a = 0$ é mais simples ainda: $\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$.

8. Se $a \neq 0$, $|x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a| \leq 3|a||x - a|$, esta última desigualdade sendo verdadeira se restringirmos x de forma que $|x| < 2|a|$, o que é suficiente para acomodar $x = a$ no intervalo $(-2|a|, 2|a|)$, como bem mostra um gráfico simples. E, em conseqüência, $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ se $|x - a| < \delta < \varepsilon/3a$. Para garantir a condição $|x| < 2|a|$, notamos que $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a| < \delta+|a|$; portanto, devemos tomar $\delta < 2|a|$, além de $\delta < \varepsilon/3a$. O caso $a = 0$ é mais fácil: $x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} = \delta$.

9. Utilize o Corolário 6.11, seja construindo uma seqüência $x_n \to 0$ tal que $f(x_n)$ não convirja, seja construindo duas seqüências $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ tais que $f(x_n)$ e $f(y_n)$ tenham limites distintos. Outro modo seria usar a desigualdade do triângulo para mostrar que a Definição 6.2 é violada com um $\varepsilon < 2$.

10. Proceda como no exercício anterior.

12. O procedimento é análogo ao da demonstração do Teorema 4.8 da p. 80.

13. Veja o Exercício 16 da p. 139.

14. É preciso provar que pode-se fazer $\dfrac{5}{x-1} - 1$ em módulo menor que qualquer $\varepsilon > 0$ prescrito, fazendo $|x - 6| < \delta$. Ora,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| = \frac{|x-6|}{|x-1|}.$$

Como o x vai estar numa vizinhança δ de 6, podemos supor $\delta < 1$, garantindo $|x - 1| > 4$. Faça uma figura para ver que deve ser assim, embora tal fato precise ser provado. E para isto usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|x - 1| = |(x - 6) + 5| \geq 5 - |x - 6| > 5 - \delta > 5 - 1 = 4.$$

Então,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| < \frac{|x-6|}{4}.$$

Isto será menor do que ε se fizermos $|x - 6| < 4\varepsilon$, donde se vê que δ deve ser o menor dos números 4ε e 1.

15. O procedimento é análogo ao do exercício anterior. Esses dois exercícios servem para ilustrar a eficácia do Teorema 6.8, mediante o qual os resultados pedidos nos Exercícios 5, 10 e 11 dispensam todo esse trabalho de provar diretamente da definição de limite.

16. Use repetidamente o Teorema 6.8.

19. Como contra-exemplo considere a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$, que não tem limite com $x \to 0$. Tome, por exemplo, $D' = \{1/n\pi,\ n = 1, 2, 3\ldots\}$.

O leitor deve notar que funções como essa podem ser construídas com qualquer seqüência crescente r_n que tenha limite zero ou outro qualquer valor, e qualquer série convergente de termos positivos $\sum a_n$, pondo, simplesmente,

$$f(x) = \sum_{r_n < x} a_n.$$

6.23. Exemplo. Seja (r_n) uma seqüência densa na reta, por exemplo, uma seqüência obtida pela enumeração dos números racionais. Vamos construir uma função crescente e limitada, definida em toda a reta, e que tenha saltos em todos esses números r_n. Para isso escrevemos

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} \tag{6.9}$$

Como se vê, estamos somando sobre todos os índices n para os quais r_n é menor do que x. Como a série $\sum 1/n^2$ é convergente, é claro que a soma em (6.9) é convergente. É claro também que a função aqui definida é crescente, pois

$$x < y \Rightarrow f(y) - f(x) = \sum_{x \le r_n < y} \frac{1}{n^2} > 0.$$

Deixamos para os exercícios a tarefa de verificar que

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{6.10}$$

bem como a de provar que a função aqui definida é contínua em todo $x \neq r_n$; é contínua pela esquerda e descontínua pela direita em todo $x = r_n$, onde seu salto é $1/n^2$. O leitor deve deter-se num exame atento dessa função, tentar e verificar a impossibilidade de construir seu gráfico, para bem entender que está diante de um exemplo de função que é interessante e bastante geral. Finalmente, cabe observar que esse é um exemplo extremo de função monótona descontínua, pois as descontinuidades da função já formam um conjunto enumerável e denso na reta, não sendo possível, pelo teorema anterior, ampliá-lo ainda mais.

Exercícios

1. Faça as demonstrações do Teorema 6.14 nos casos omitidos.

2. Demonstre o Teorema 6.15.

3. Defina cada uma das quatro expressões contidas em $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4. Faça a demonstração do Teorema 6.17 nos casos omitidos.

5. Faça a demonstração da segunda parte do Teorema 6.18.

6. Demonstre os Teoremas 6.19 e 6.20.

7. Suponha que $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to B$ com $x \to a$. Prove que $f(x)g(x) \to +\infty$ se $B > 0$ e $f(x)g(x) \to -\infty$ se $B < 0$.

8. Prove que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 9 \to +\infty$ com $x \to +\infty$.

9. Prove que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tende a $+\infty$ com $x \to \pm\infty$ se n for par; e se n for ímpar, $p(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to -\infty$ e a $+\infty$ com $x \to +\infty$.

10. Estude os limites de um polinômio

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

com $x \to \infty$. Mostre, em particular, no caso n ímpar, que se $a_n > 0$, $\lim p(x) = \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ (havendo correspondência de sinais); e se $a_n < 0$, $\lim p(x) = \mp\infty$ com $x \to \pm\infty$.

11. Prove que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 8} = 3$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 5} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 7x - 4}{x + 1} = +\infty$.

12. Dados os polinômios $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0$, onde $a_nb_m \neq 0$, estude os limites de $p(x)/q(x)$ com $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Prove que esses limites são iguais a a_n/b_m se $n = m$; são ambos nulos se $n < m$; ambos iguais a $+\infty$ se $n > m, n - m$ é par e $a_nb_m > 0$. Examine estas e todas as demais possibilidades.

13. Seja f uma função crescente e limitada num intervalo (a, b). Estabeleça as desigualdades $f(a+) < f(x) < f(b-)$.

14. **(Critério de convergência de Cauchy)** Prove que uma condição necessária e suficiente para que uma função f tenha limite finito com $x \to +\infty$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $k > 0$ tal que

$$x,\ y > k \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Enuncie e prove propriedade análoga com $x \to -\infty$.

15. Prove a relação (6.8).

16. Prove as relações (6.10)

17. Prove que a função (6.9) é contínua em $x \neq r_n$ para todo n.

18. Prove que a função (6.9) é contínua pela esquerda em $x = r_N$ e descontínua pela direita, com salto $[f(x_N)] = 1/N^2$.

4. Faça a demonstração do Teorema 6.17 nos casos omitidos.

5. Faça a demonstração da segunda parte do Teorema 6.18.

6. Demonstre os Teoremas 6.19 e 6.20.

7. Suponha que $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to B$ com $x \to a$. Prove que $f(x)g(x) \to +\infty$ se $B > 0$ e $f(x)g(x) \to -\infty$ se $B < 0$.

8. Prove que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 9 \to +\infty$ com $x \to +\infty$.

9. Prove que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tende a $+\infty$ com $x \to \pm\infty$ se n for par; e se n for ímpar, $p(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to -\infty$ e a $+\infty$ com $x \to +\infty$.

10. Estude os limites de um polinômio

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

com $x \to \infty$. Mostre, em particular, no caso n ímpar, que se $a_n > 0$, $\lim p(x) = \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ (havendo correspondência de sinais); e se $a_n < 0$, $\lim p(x) = \mp\infty$ com $x \to \pm\infty$.

11. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 8} = 3$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 5} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 7x - 4}{x + 1} = +\infty$.

12. Dados os polinômios $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0$, onde $a_nb_m \neq 0$, estude os limites de $p(x)/q(x)$ com $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Prove que esses limites são iguais a a_n/b_m se $n = m$; são ambos nulos se $n < m$; ambos iguais a $+\infty$ se $n > m, n - m$ é par e $a_nb_m > 0$. Examine estas e todas as demais possibilidades.

13. Seja f uma função crescente e limitada num intervalo (a, b). Estabeleça as desigualdades $f(a+) < f(x) < f(b-)$.

14. **(Critério de convergência de Cauchy)** Prove que uma condição necessária e suficiente para que uma função f tenha limite finito com $x \to +\infty$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $k > 0$ tal que

$$x,\ y > k \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Enuncie e prove propriedade análoga com $x \to -\infty$.

15. Prove a relação (6.8).

16. Prove as relações (6.10)

17. Prove que a função (6.9) é contínua em $x \neq r_n$ para todo n.

18. Prove que a função (6.9) é contínua pela esquerda em $x = r_N$ e descontínua pela direita, com salto $[f(x_N)] = 1/N^2$.

19. No somatório em (6.9) troque $r_n < x$ por $r_n \leq x$ e prove que a nova função obtida é contínua pela direita e descontínua pela esquerda em todo ponto $x = r_n$, onde o salto ainda é $1/n^2$.

20. Seja f uma função monótona num intervalo $[a,\, b]$, cuja imagem é todo um intervalo $[c,\, d]$. Prove que f é contínua.

Sugestões e soluções

6. Para provar a parte c) do Teorema 6.19, veja a demonstração da parte c) do Teorema 4.8 da p. 80; para a parte d), veja o item d) do Teorema 6.8.

8. Aplique o Teorema 6.20, notando que $f(x) = x^3(1 - 7/x + 2/x^2 - 9/x^3)$ e que a expressão entre parênteses tende a 1 com $x \to +\infty$, logo, é maior do que qualquer k, $0 < k < 1$ para $|x|$ maior do que um certo N.

9. Pode-se usar o mesmo procedimento do exercício anterior. Outro modo de resolver o problema é o seguinte:

$$\begin{aligned}
|p(x)| &= \left|x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right| \\
&\geq |x^n|\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right|\right) \\
&\geq |x^n|\left[1 - \left(\left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| + \ldots + \left|\frac{a_1}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{x^n}\right|\right)\right].
\end{aligned}$$

Tomando x suficientemente grande, podemos fazer $|a_i/x^{n-i}| \leq 1/2n$, $0 \leq i \leq n-1$, de sorte que $|p(x)| \geq |x^n|/2$.

14. Transfira o problema para $\zeta = 0$ com a transformação $\zeta = 1/x$.

15. Para provar a segunda das relações, referente ao limite com $x \to +\infty$, devemos provar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe X tal que

$$x > X \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Da convergência da série $\sum 1/n^2$ segue-se que existe N tal que essa soma, a partir de $n = N+1$, é $< \varepsilon$. Tomemos X tal que $r_1, \ldots, r_N$ sejam todos $< X$. Então, sendo $x > X$, a segunda soma na diferença acima inclui todos os termos correspondentes a $n = 1, \ldots, N$; logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

16. Observe que, sendo $h > 0$,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{x<r_n<x+h} \frac{1}{n^2} \text{ e } f(x) - f(x-h) = \sum_{x-h\le r_n<x} \frac{1}{n^2}.$$

17. Com $h > 0$, $f(r_N + h) - f(r_N) = \sum_{r_N \le r_n < r_N+h} \frac{1}{n^2}$ e $f(r_N) - f(r_N - h) =$

$$\sum_{r_N-h\le r_n<r_N} \frac{1}{n^2}.$$

6.4 Funções contínuas em intervalos fechados

O primeiro teorema que vamos demonstrar nesta seção, o assim chamado *Teorema do Valor Intermediário*, tem uma visualização geométrica muito evidente. Em linguagem corrente ele afirma que o gráfico de uma função contínua definida num intervalo, ao passar de um lado a outro do eixo dos x, necessariamente tem de cortar esse eixo. Até o final do século XVIII esse resultado foi aceito como evidente, sem que ninguém pensasse em demonstrá-lo, uma atitude muito de acordo com o espírito da época. Foi Bolzano o primeiro matemático a fazer uma tentativa séria de demonstrar esse teorema, de maneira puramente analítica, num trabalho de 1817, trabalho esse que mais tarde seria visto como um dos marcos principais do início do rigor na Análise das primeiras décadas do século XIX. Vamos apresentar esse teorema em sua versão mais geral, como enunciamos a seguir.

6.24. Teorema do Valor Intermediário. *Seja f uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer número d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Em outras palavras, $f(x)$ assume todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$, com x variando em (a, b).*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração supondo que $f(a) < f(b)$. O caso oposto se reduz a esta considerando a função $g(x) = -f(x)$. Suporemos também que $d = 0$, notando que o caso geral se reduz a este para a função $g(x) = f(x) - d$.

Faremos a demonstração pelo método de bisseção, como na demonstração do Teorema de (Bolzano-Weierstrass, p. 96). Seja l o comprimento de I. Começamos dividindo esse intervalo ao meio, obtendo dois novos intervalos, digamos, $[a, r]$ e $[r, b]$. Se $f(r) = 0$, o teorema estará demonstrado. Se $f(r) > 0$, escolhemos o intervalo $[a, r]$; e se $f(r) < 0$, escolhemos o intervalo $[r, b]$. Em qualquer desses guntar: será que são essas as únicas funções (definidas em intervalos) invertíveis? A resposta é negativa, como vemos pelo seguinte contra-exemplo: seja f assim definida no intervalo $I = [0, 1]$: $f(x) = x$ se x for racional e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e verifique que ela é invertível, mas não é monótona em qualquer subintervalo de I; em conseqüência, não é contínua em seu domínio, apenas no ponto $x = 1/2$ (Exercício 17 adiante).

O método de bisseção utilizado na demonstração dos Teoremas 6.24 e 6.26 é muito útil para implementar esquemas numéricos de computação. Com uma simples calculadora científica é possível calcular raízes polinomiais com boas aproximações. (Veja o Exercício 2 adiante.)

Exercícios

1. Faça a demonstração do Teorema 6.24 no caso $f(a) > f(b)$.

2. Prove que a equação $x^4 + 10x^3 - 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais. Use uma calculadora científica para determinar uma dessas raízes com aproximação de duas casas decimais.

3. Prove que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais, contando as multiplicidades.

4. Prove que se n é par, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ assume um valor mínimo m. Em conseqüência, prove que $p(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$ e nenhuma se $a < m$.

5. Prove que se um polinômio de grau n tiver r raízes reais, contando as multiplicidades, então $n - r$ é par.

6. Prove que todo número $a > 0$ possui raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

7. Prove que todo número $a > 0$ possui uma raiz n-ésima positiva; e se n for par, possuirá também uma raiz n-ésima negativa.

8. Seja f uma função contínua num intervalo, onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.

9. Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe um número c entre a e b, tal que $f(c) = g(c)$. Faça um gráfico para entender bem o que se passa.

10. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com valores nesse mesmo intervalo. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Interprete este resultado geometricamente.

11. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. Interprete este resultado geometricamente.

12. Seja f uma fu
existe um núm
uma interpreta
determinado in
terrestre — em
dessa curva a p
dois pontos, c e

13. Complete a de
hipótese de que
monstração con
g) é uma funçã

14. Sejam f e g fu
$f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y$

15. Prove que a im
um intervalo ab
imagem é ilimit

16. Dê exemplo de
que tenha valor

17. Prove que $f(x)$
em $x = 1/2$ e so

18. Considere a fun
se x for irracion
descontínua em

Sugestões

2. Lembre-se de qu
plexa, ele terá t
raiz entre zero e

6. Suponhamos $a \neq$
$f(1) < f(a)$; logo
a, designado por
existe um númer

10. Considere a funç

11. Use o Exercício 9

12. Considere a funç

12. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com $f(0) = f(1)$. Prove que existe um número $c \in [0, 1/2]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$. Este exercício tem uma interpretação física muito interessante: se f representa a temperatura num determinado instante, ao longo de qualquer curva fechada simples sobre a superfície terrestre — em particular o equador terrestre —, e x representa a distância ao longo dessa curva a partir de um certo ponto, o resultado anunciado significa que existem dois pontos, c e $c + 1/2$, onde a temperatura tem o mesmo valor.

13. Complete a demonstração do Teorema 6.30, provando que g é contínua em b, na hipótese de que b seja uma das extremidades do intervalo J. Faça também a demonstração completa do teorema no caso em que f (e, conseqüentemente, também g) é uma função decrescente.

14. Sejam f e g funções crescentes num intervalo I, onde $f(x) \leq g(x)$. Prove que $f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y)$ para todo $y \in f(I) \cap g(I)$.

15. Prove que a imagem de um intervalo aberto por uma função contínua injetiva é um intervalo aberto. Dê exemplos em que o intervalo-domínio é limitado, mas sua imagem é ilimitada.

16. Dê exemplo de uma função cujo domínio não seja nem fechado nem limitado, mas que tenha valores máximo e mínimo.

17. Prove que $f(x) = x$ se x for racional, e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional, é contínua em $x = 1/2$ e somente neste ponto.

18. Considere a função f assim definida: $f(x) = -x$ se x for racional e $f(x) = 1/x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e mostre que ela é uma bijeção descontínua em todos os pontos.

Sugestões

2. Lembre-se de que quando um polinômio com coeficientes reais tiver uma raiz complexa, ele terá também a complexa conjugada como raiz. Verifique que há uma raiz entre zero e 1 e determine esta raiz pelo método de bisseção.

6. Suponhamos $a \neq 1$, já que o caso $a = 1$ é trivial. Se $a > 1$, $f(x) = x^2$ é tal que $f(1) < f(a)$; logo, pelo teorema do valor intermediário, existe um número entre 1 e a, designado por $\sqrt{a}$, tal que $f(\sqrt{a}) = a$. Se $a < 1$, $f(1) > a > f(a)$, e novamente existe um número $\sqrt{a}$ entre a e 1 tal que $f(\sqrt{a}) = a$. E o caso de raiz negativa?

10. Considere a função $g(x) = f(x) - x$, se já não for $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$.

11. Use o Exercício 9 com $g(x) = 1 - x$.

12. Considere a função $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$ no intervalo $[0, 1/2]$.