

Objetos Grupo, Categorias Internas e Módulos Cruzados

27 de novembro de 2016

Ado Raimundo Dalla Costa

Resumo

Muitas estruturas algébricas como monoides, semigrupos ou grupos podem ser vistos e formulados dentro de algumas categorias através de diagramas comutativos. Neste artigo, especificamente, será introduzido o conceito de categorias internas e objetos grupo dentro de uma categoria pré-fixada e veremos que as categorias internas em $\underline{Grp}$ é equivalente a objetos grupo em $\underline{Cat}$ que, por sua vez, é equivalente a módulos cruzados de grupos.

1 Introdução

Em meados dos anos 70, Brown and Spencer [2] viram que se uma categoria tiver uma estrutura semelhante a de um grupo então isto deve ser um objeto grupo na categoria $\underline{Grpd}$ e, além disso, notaram que objetos grupo em $\underline{Grpd}$ nada mais são do que objetos grupo na categoria $\underline{Cat}$. Em seu artigo encontra-se a prova de que módulos cruzados de grupoides são equivalentes a objetos grupo na categoria $\underline{Grpd}$, através de funtores.

O objetivo deste trabalho é desenvolver esse mesmo resultado para a categoria de grupos utilizando o conceito de categorias internas. Mais precisamente, mostraremos que as categorias internas em $\underline{Grp}$ serão equivalentes a módulos cruzados de grupos e também serão equivalentes a objetos grupo em $\underline{Cat}$. A principal fonte de referência deste artigo foi [1], porém outras fontes foram utilizadas e podem ser conferidas nas referências bibliográficas do mesmo.

2 Objetos Grupo

Neste capítulo estudaremos os objetos grupo em uma categoria $\mathcal{C}$. Para fim dos nossos objetivos precisaremos de categorias que tenham boas propriedades, isto é, precisamos de

categorias pelo menos finitamente completas. Veremos algumas definições e, mais adiante, alguns exemplos dentro deste contexto.

Definição 1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita ser finitamente completa se para toda categoria finita $\mathcal{I}$ e para todo $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ diagrama com formato $\mathcal{I}$ existir limites.*

Exemplo 2. *As categorias Set, Grp, Top, Ab, Ring, Vect $_{\mathbb{K}}$, Cat são exemplos de categorias finitamente completas.*

Exemplo 3. *A categoria dos conjuntos finitos e a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita são exemplos de categorias finitamente completa mas não completas.*

Exemplo 4. *A categoria Field é um exemplo de categoria que não é finitamente completa.*

Abaixo segue uma proposição que nos dá uma caracterização de categorias finitamente completas o qual não será demonstrada neste trabalho.

Proposição 5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes condições abaixo são equivalentes:*

1. $\mathcal{C}$ é finitamente completa.
2. $\mathcal{C}$ possui produtos finitos e equalizadores.
3. $\mathcal{C}$ possui produtos finitos e interseções finitas.
4. $\mathcal{C}$ possui pullbacks e objetos finais.

Demonstração. Ver em [4], Teorema 12.4. ■

Daqui por diante consideraremos $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa. O propósito para tal é que desse modo alguns objetos e morfismos que iremos considerar façam sentido e estejam bem definidos e, mais do que isso, que existam objetos finais em que denotaremos geralmente por **1**.

Definição 6. *Um objeto grupo em $\mathcal{C}$ é uma quádrupla (G, m, e, i) em que G é um objeto em $\mathcal{C}$ e $m : G \times G \rightarrow G$, $e : \mathbf{1} \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ são morfismos tal que os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{m \times Id_G} & G \times G \\
 Id_G \times m \downarrow & & \downarrow m \\
 G \times G & \xrightarrow{m} & G
 \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 \times G & \xrightarrow{e \times Id_G} & G \times G & \xleftarrow{Id_G \times e} & G \times 1 \\
& \searrow \cong & \downarrow m & \swarrow \cong & \\
& & G & &
\end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow{i \times Id_G} & G \times G \\
\exists! \downarrow & & & & \downarrow m \\
1 & \xrightarrow{\quad e \quad} & & & G
\end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow{Id_G \times i} & G \times G \\
\exists! \downarrow & & & & \downarrow m \\
1 & \xrightarrow{\quad e \quad} & & & G
\end{array} \quad (4)$$

Observação 7. Na definição acima temos que Δ é o morfismo diagonal, isto é, $\Delta : G \rightarrow G \times G$ é tal que $p \circ \Delta = q \circ \Delta = Id_G$, em que p, q são as projeções do produto cartesiano para suas respectivas componentes. Por exemplo, em $\underline{Set}$, para todo $g \in G$, temos que $\Delta(g) = (g, g)$ e a comutatividade do diagrama (3) pode ser vista abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
g & \xrightarrow{\Delta} & (g, g) & \xrightarrow{i \times Id_G} & (i(g), g) \\
\downarrow & & & & \downarrow m \\
* & \xrightarrow{\quad e \quad} & & & e(*) = m(i(g), g)
\end{array}$$

Isto é, a comutatividade do diagrama (3) significa dizer que $i(g)$ é o inverso à esquerda de g .

Exemplo 8. Em $\underline{Set}$, os objetos grupo são precisamente os grupos no sentido clássico. Por exemplo, nota-se como na observação anterior que a comutatividade do diagramas (3) e (4) nos garante que $i(g)$ é inverso a esquerda e a direita de g , respectivamente. Além disso, nota-se que a comutatividade do diagrama (1) nos garante a associatividade do conjunto como visto abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
(g_1, g_2, g_3) & \xrightarrow{m \times Id_G} & (g_1 g_2, g_3) \\
Id_G \times m \downarrow & & \downarrow m \\
(g_1, g_2 g_3) & \xrightarrow{m} & g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3
\end{array}$$

Da mesma maneira, observa-se que a comutatividade do diagrama (2) nos garante que

$e(*)$ é elemento neutro do conjunto como visto nos diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 (*, g) & \xrightarrow{e \times Id_G} & (e(*), g) \\
 & \searrow \cong & \downarrow m \\
 & & g = e(*)g
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (g, e(*)) & \xleftarrow{Id_G \times e} & (g, *) \\
 & \nwarrow \cong & \downarrow m \\
 & & ge(*) = g
 \end{array}$$

Exemplo 9. Em $\underline{Top}$, os objetos grupo são essencialmente os grupos topológicos visto que os diagramas (1), (2), (3) e (4) nos garantem uma estrutura de grupo como na categoria $\underline{Set}$ porém os morfismos por serem contínuos nos garantem uma estrutura de topologia neste grupo, isto é, o grupo se torna um grupo topológico. Em $\underline{Mnf}$ (a categoria das variedades diferenciáveis cujos os morfismos são aplicações diferenciáveis), os objetos grupo são essencialmente os grupos de Lie.

Proposição 10. Os objetos grupo em $\underline{Grp}$ são precisamente os grupos abelianos.

Demonstração. Por um lado, seja $(G, \cdot)$ uma grupo abeliano. Isto é, G é um conjunto munido de uma operação binária associativa com elemento neutro 1_G . Podemos definir $m : G \times G \rightarrow G$ como sendo o morfismo que associa a própria operação em G , ou seja, $m(g, h) = g \cdot h$. Similarmente, defina $e : \{*\} \rightarrow G$ tal que $e(*) = 1_G$ e $i : G \rightarrow G$ tal que $i(g) = g^{-1}$. Note que esses morfismos satisfazem os diagramas.

Para que G seja um grupo objeto em $\underline{Grp}$ basta mostrarmos que os morfismos definidos acima sejam homomorfismos de grupos. Para ver isso, considere a operação do grupo $G \times G$ como sendo a operação ponto a ponto e denotaremos por $\diamond$ para não haver confusão nas contas. Então, para todo $g, h, g', h' \in G$, segue que:

$$\begin{aligned}
 m((g, h) \diamond (g', h')) &= m(g \cdot g', h \cdot h') = (g \cdot g') \cdot (h \cdot h') = (g \cdot h) \cdot (g' \cdot h') \\
 &= m(g, h) \cdot m(g', h') = m(m(g, h), m(g', h'))
 \end{aligned}$$

Note que foi utilizado fortemente o fato de G ser abeliano. Portanto, temos que m é homomorfismo de grupos.

Além disso, note que $e(**) = e(*) = 1_G = 1_G \cdot 1_G = m(1_G, 1_G) = m(e(*), e(*))$, ou seja, e é homomorfismo de grupos. Também, note que i é homomorfismo de grupos devido a $i(m(g, h)) = i(g \cdot h) = (g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot h^{-1} = m(i(g), i(h))$. Portanto, segue que (G, m, e, i) é um objeto grupo em $\underline{Grp}$.

Por outro lado, considere (G, m, e, i) um objeto grupo em $\underline{Grp}$. Precisamos mostrar que G é um grupo abeliano. Para evitar confusões manteremos a notação $\diamond$ para a operação do grupo $G \times G$, denotaremos a operação do grupo G por $\cdot$ e $\star$ para m , isto é, $m(g, h) = g \star h$.

Também, denotaremos por 1_G o elemento neutro de G e por $\varepsilon = e(*)$. Primeiramente, como e é homomorfismo de grupos e $*$ nada mais é do que a identidade do grupo trivial $\{*\}$ então segue imediatamente que $\varepsilon = 1_G$.

Agora, como m é homomorfismo, para todo $g, h, g', h' \in G$ temos que:

$$m((g, h) \diamond (g', h')) = m(g, h) \cdot m(g', h').$$

Ou seja, temos que a seguinte igualdade vale:

$$(g \cdot h) \star (g' \cdot h') = (g \star h) \cdot (g' \star h') \quad (5)$$

A igualdade (5) obtida acima é chamada na literatura de princípio de Eckmann-Hilton. Desse modo, usando esta igualdade, dados $x, y \in G$ quaisquer, podemos ver que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x \star \varepsilon) \cdot (\varepsilon \star y) = (x \star 1_G) \cdot (1_G \star y) \stackrel{(1)}{=} (x \cdot 1_G) \star (1_G \cdot y) = x \star y \\ &= (1_G \cdot x) \star (y \cdot 1_G) \stackrel{(1)}{=} (1_G \star y) \cdot (x \star 1_G) = (\varepsilon \star y) \cdot (x \star \varepsilon) = y \cdot x \end{aligned}$$

Portanto, G é grupo abeliano. ■

3 Categorias Internas

As categorias internas são generalizações da noção de categorias pequenas e são definidas em uma categoria pré-fixada. Neste capítulo iremos introduzi-las e utilizar este conceito em $\underline{Grp}$ para mostrar a equivalência com objetos grupo em $\underline{Cat}$.

Definição 11. *Uma categoria interna em $\mathcal{C}$ é uma sêxtupla $C = (A, O, s, t, e, m)$ em que $A, O \in \mathcal{C}^0$, $s, t : A \rightarrow O$ e $e : O \rightarrow A$ são morfismos tal que $se = te = Id_O$ e $m : A_t \times_s A \rightarrow A$ é morfismo tal que satisfazem os seguintes diagramas:*

$$\begin{array}{ccc} A_t \times_s A_t \times_s A & \xrightarrow{m \times Id_G} & A_t \times_s A \\ Id_G \times m \downarrow & & m \downarrow \\ A_t \times_s A & \xrightarrow{m} & A \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccccc} O_{Id_O} \times_s A & \xrightarrow{e \times Id_A} & A_t \times_s A & \xleftarrow{Id_A \times e} & A_t \times_{Id_O} O \\ & \searrow \cong & \downarrow m & \swarrow \cong & \\ & & G & & \end{array} \quad (7)$$

Observação 12. Na definição acima, o objeto O da categoria $\mathcal{C}$ se comporta como os “objetos” e o objeto A como sendo os “morfismos” na categoria interna C .

Observação 13. O objeto pullback $A_t \times_s A$ é visto como sendo a coleção de todos os pares de morfismos componíveis por t e s , isto é, satisfaz a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_t \times_s A_t & \xrightarrow{p_2} & A \\ p_1 \downarrow & & \downarrow s \\ A & \xrightarrow{t} & O \end{array}$$

em que p_1 e p_2 são as projeções na primeira e segunda coordenada, respectivamente. Em Set, o objeto pullback acaba sendo o conjunto $A_t \times_s A = \{(f, g) \in A \times A \mid tf = sg\}$.

Exemplo 14. As categorias internas em Set são justamente as categorias pequenas visto que o objeto dos objetos O e o objeto dos morfismos A são simplesmente conjuntos.

Proposição 15. A categoria interna em Grp é equivalente a objeto grupo na categoria Cat.

Demonstração. Seja $C = (A, O, s, t, e, m)$ uma categoria interna em Grp em que O é o conjunto dos objetos e A é o conjunto dos morfismos. Então C nada mais é do que uma categoria pequena cujos A e O são grupos e todos os morfismos s, t, e, m são homomorfismos de grupos. Desse modo, denotaremos por μ_A a operação do grupo A e μ_O a operação do grupo O . Defina $\mu : C \times C \rightarrow C$ como sendo $\mu = \mu_O$ sobre os objetos e $\mu = \mu_A$ sobre os morfismos. Então μ é um funtor pois como s e t são homomorfismos então o diagrama abaixo comuta para ambos:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ s \times s \downarrow & & \downarrow s \\ O \times O & \xrightarrow{\mu_O} & O \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\mu_A} & A \\ t \times t \downarrow & & \downarrow t \\ O \times O & \xrightarrow{\mu_O} & O \end{array}$$

Além disso, como m e e são homomorfismos de grupos então segue que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{array}{ccc} A \times A \times A \times A & \xrightarrow{\mu_A \times \mu_A} & A \times A \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ A \times A & \xrightarrow{\mu_A} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} O \times O & \xrightarrow{\mu_O} & O \\ e \times e \downarrow & & \downarrow e \\ A \times A & \xrightarrow{\mu_A} & A \end{array}$$

Da mesma maneira, podemos definir $\varepsilon : 0 \rightarrow C$, em que 0 é o objeto final da categoria Cat, isto é, é a categoria trivial (consistindo de um objeto $\{*\}$ e um morfismo $\star$), como sendo $\varepsilon_O : \{*\} \rightarrow O$ tal que $\varepsilon_O(*) = id_O$ e $\varepsilon_A : \{*\} \rightarrow A$ tal que $\varepsilon_A(\star) = id_A$. Também, podemos

definir $\iota : C \rightarrow C$ como sendo $\iota_O : O \rightarrow O$ tal que $\iota_O(X) = X^{-1}$ e $\iota_A : A \rightarrow A$ tal que $\iota_A(f) = f^{-1}$. Não é difícil ver que ε e ι são funtores na categoria $\underline{Cat}$ e claramente comutam os diagramas da definição de objeto grupo. Então segue que $(C, \mu, \varepsilon, \iota)$ é um objeto grupo em $\underline{Cat}$.

Por outro lado, seja um objeto grupo $(C, \mu, \varepsilon, \iota)$ em $\underline{Cat}$. Então, C é uma categoria pequena o qual C^0 e C^1 são conjuntos (o conjunto dos objetos e o conjunto dos morfismos, respectivamente) e $s, t : C^1 \rightarrow C^0$, $e : C^0 \rightarrow C^1$ e $m : C^1 \times C^1 \rightarrow C^1$ são morfismos. Então, (C^0, C^1, s, t, e, m) é um candidato natural para ser uma categoria interna em $\underline{Grp}$. De fato, note que C^0 e C^1 tem estrutura de grupo pois a funtorialidade de μ garante a cada conjunto uma operação binária associativa, que denotaremos por μ_{C^0} e μ_{C^1} , pois satisfaz os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} C^0 \times C^0 \times C^0 & \xrightarrow{\mu_{C^0} \times Id_{C^0}} & C^0 \times C^0 \\ Id_{C^0} \times \mu_{C^0} \downarrow & & \mu_{C^0} \downarrow \\ C^0 \times C^0 & \xrightarrow{\mu_{C^0}} & C^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C^1 \times C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1} \times Id_{C^1}} & C^1 \times C^1 \\ Id_{C^1} \times \mu_{C^1} \downarrow & & \mu_{C^1} \downarrow \\ C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1}} & C^1 \end{array}$$

Além disso, note que pela funtorialidade de μ segue que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{array}{ccc} C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1}} & C^1 \\ s \times s \downarrow & & s \downarrow \\ C^0 \times C^0 & \xrightarrow{\mu_{C^0}} & C^0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1}} & C^1 \\ t \times t \downarrow & & t \downarrow \\ C^0 \times C^0 & \xrightarrow{\mu_{C^0}} & C^0 \end{array}$$

Isto significa dizer que s e t são homomorfismos de grupos. Consequentemente, pela funtorialidade de ε e ι segue que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{array}{ccc} C^1 \times C^1 \times C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1} \times \mu_{C^1}} & C^1 \times C^1 \\ m \downarrow & & m \downarrow \\ C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1}} & C^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C^0 \times C^0 & \xrightarrow{\mu_{C^0}} & C^0 \\ e \times e \downarrow & & e \downarrow \\ C^1 \times C^1 & \xrightarrow{\mu_{C^1}} & C^1 \end{array}$$

Isto significa dizer que m e e são homomorfismos. Portanto, segue que (C^0, C^1, s, t, e, m) é uma categoria interna em $\underline{Grp}$.

■

4 Módulos Cruzados e Categorias Internas em Grp

Neste último capítulo iremos introduzir os módulos cruzados de grupos e finalmente mostrar que são equivalentes a categorias internas em Grp.

Definição 16. Um módulo cruzado de grupos é uma quádrupla (C, G, γ, α) em que C, G são grupos, $\gamma : C \rightarrow G$ homomorfismo e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(C)$ uma ação de G sobre C que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\gamma(\alpha_g(c)) = g\gamma(c)g^{-1}$.
2. $\alpha_{\gamma(c)}(d) = cd c^{-1}$.

Observação 17. A propriedade (i) da definição 16 é chamada de equivariância de γ com respeito a ação α . Já a propriedade (ii) da definição 16 é chamada de identidade de *Peiffer* (para mais detalhes veja [5]).

Exemplo 18. Sejam G um grupo e N subgrupo normal de G . Então a inclusão $i : N \hookrightarrow G$ juntamente com a ação trivial nos fornecem um exemplo trivial de módulo cruzado de grupos.

Exemplo 19. Dado G um grupo, N subgrupo normal de G , $i : N \hookrightarrow G$ a inclusão canônica e considere a ação de G sobre N por automorfismo, isto é, $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$, para todo $g \in G$, $h \in N$. Então claramente (G, N, i, α) é um módulo cruzado.

Teorema 20. Módulos Cruzados de grupos são equivalentes as categorias internas em Grp.

Demonstração. Seja (C, G, γ, α) um módulo cruzado de grupos. Desde que G age sobre C via α , podemos considerar o grupo $C \rtimes G := \{(c, g) \in C \times G \mid c \in C, g \in G\}$ munido da operação $(c, g) \cdot (d, h) := (c\alpha_g(d), gh)$. Este grupo é chamado de produto semidireto de C por G . Sendo assim, definimos $s, t : C \rtimes G \rightarrow G$ e $e : G \rightarrow C \rtimes G$ dados por $s(c, g) := g$, $t(c, g) := \gamma(c)g$ e $e(g) := (1_C, g)$. Note que s e e são claramente homomorfismos. Além disso, t é homomorfismo pois

$$\begin{aligned} t((c, g) \cdot (d, h)) &= t(c\alpha_g(d), gh) = \gamma(c\alpha_g(d))gh = \gamma(c)\gamma(\alpha_g(d))gh \\ &= \gamma(c)g\gamma(d)g^{-1}gh = \gamma(c)g\gamma(d)h = t(c, g)t(d, h) \end{aligned}$$

Observe que $se(g) = s(1_C, g) = g = Id_G(g)$ e $te(g) = t(1_C, g) = \gamma(1_C)g = g = Id_G(g)$, para todo $g \in G$, ou seja, $se = te = Id_G$. Desse modo, podemos considerar um candidato a categoria interna sendo que os objetos correspondem os elementos de G e os morfismos correspondem aos elementos de $C \rtimes G$. Mas para isso, precisamos definir um morfismo

$m : (C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G) \rightarrow C \rtimes G$. Antes de definirmos, precisamos entender o objeto $(C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G)$. Note que os elementos de $(C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G)$ são da forma $((c', g'), (c, g))$ tal que $t(c', g') = s(c, g)$. Isto significa dizer que $\gamma(c')g' = g$. Ou seja, os elementos de $(C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G)$ são da forma $((c', \gamma(c)g), (c, g))$, para todo $c, c' \in C, g \in G$. Sendo assim, observe que se aplicarmos o morfismo $(c, g) \in C \rtimes G$ no objeto g ganhamos o objeto $\gamma(c)g$. A ideia de definirmos m é através da composição destes morfismos. Mas note que:

$$\begin{array}{ccccc} g & \xrightarrow{(c, g)} & \gamma(c)g & \xrightarrow{(c', \gamma(c)g)} & \gamma(c')\gamma(c)g = \gamma(c'c)g \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (c'c, g) & & \end{array}$$

Desse modo, defina $m : (C \rtimes G)_t \times_s (C \rtimes G) \rightarrow C \rtimes G$ da forma $m((d, \gamma(c)g), (c, g)) := (dc, g)$. Observe que $s(d, \gamma(c)g) = \gamma(c)g = t(c, g)$ e desde que γ é homomorfismo segue que $t(dc, g) = \gamma(dc)g = \gamma(d)\gamma(c)g = t(d, \gamma(c)g)$. Para que o candidato $(C \rtimes G, G, s, t, e, m)$ ser de fato uma categoria interna basta mostrarmos que m é homomorfismo de grupos e que satisfaz os diagramas da definição 11. Para isso, precisamos mostrar que

$$m((c', \gamma(c)g).(d', \gamma(d)h), (c, g).(d, h)) = m((c', \gamma(c)g), (c, g))m((d', \gamma(d)h), (d, h)).$$

Do lado esquerdo temos que:

$$\begin{aligned} m((c', \gamma(c)g).(d', \gamma(d)h), (c, g).(d, h)) &= m((c' \alpha_{\gamma(c)g}(d'), \gamma(c)g \gamma(d)h), (c \alpha_g(d), gh)) \\ &= (c' \alpha_{\gamma(c)g}(d') c \alpha_g(d), gh) \\ &= (c' \alpha_{\gamma(c)}(\alpha_g(d')) c \alpha_g(d), gh) \\ &= (c' c \alpha_g(d') c^{-1} c \alpha_g(d), gh) \\ &= (c' c \alpha_g(d'd), gh) \end{aligned}$$

Do lado direito segue que:

$$m((c', \gamma(c)g), (c, g))m((d', \gamma(d)h), (d, h)) = (cc', g).(d'd, h) = (c' c \alpha_g(d'd), gh)$$

Logo, a igualdade é satisfeita e portanto m é homomorfismo de grupos. Além disso, não é difícil ver que satisfaz os diagramas da definição 11. Por exemplo, o diagrama (6) comuta

pois C é grupo como pode ser visto no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
((c'', \gamma(c')g), (c', \gamma(c)g), (c, g)) & \xrightarrow{m \times Id_G} & ((c''c', \gamma(c)g), (c, g)) \\
Id_G \times m \downarrow & & m \downarrow \\
((c'', \gamma(c')g), (c'c, g)) & \xrightarrow{m} & (c''(c'c), g) = ((c''c')c, g)
\end{array}$$

Portanto $(C \rtimes G, G, s, t, e, m)$ é categoria interna em Grp. Por outro lado, suponha que (A, O, s, t, e, m) é uma categoria interna em Grp. Fazemos a seguinte afirmação.

Afirmação: $A \cong Ker(s) \rtimes O$ com O agindo em $Ker(s)$ por uma ação α .

Primeiramente, note que $s : A \rightarrow O$ é epimorfismo visto que dados quaisquer $a, b : O \rightarrow B$ tal que $a \circ s = b \circ s$, segue que $a \circ s \circ e = b \circ s \circ e \Rightarrow a = b$. Sendo assim, para cada $a \in A$, podemos escrever $a = ke(x)$, onde $k = a(es(a))^{-1} \in Ker(s)$ e $x = s(a)$. Com isso, podemos definir uma ação de O sobre $Ker(s)$ dada por $\alpha_x(k) := e(x)ke(x)^{-1}$. Não é difícil ver que α é ação visto que $se = Id_O$ e $k \in Ker(s)$.

Então, dessa maneira defina $\varphi : A \rightarrow Kers \rtimes O$ tal que $\varphi(a) = \varphi(ke(x)) = (k, x)$. Claramente φ está bem definido e é homomorfismo de grupos pois dados $a, a' \in A$, digamos $a = ke(x)$ e $a' = k'e(x')$, temos que:

$$\varphi(aa') = \varphi(ke(x)k'e(x')) = \varphi(\alpha_x(k)k'e(x')) = (\alpha_x(k)k', x') = (k, x)(k', x') = \varphi(a)\varphi(a').$$

Para mostrarmos o isomorfismo, defina $\psi : Kers \rtimes O \rightarrow A$ tal que $\psi(k, x) = ke(x)$. Claramente observe que ψ está bem definido e $\psi = \varphi^{-1}$. Portanto segue o desejado da afirmação.

Sendo assim, defina $\gamma : Ker(s) \rightarrow O$ como sendo a restrição de t para $Ker(s)$, isto é, $\gamma = t|_{Ker(s)}$. Note que γ é claramente homomorfismo pois t o é. Desse modo temos um candidato $(Ker(s), O, \gamma, \alpha)$ a módulo cruzado de grupos. Basta mostrar que γ é equivariante com respeito a ação α e vale a identidade de *Peiffer*.

Primeiramente observe que para todo $k \in Ker(s)$ e $x \in O$ temos que por definição de γ e α que $\gamma(\alpha_x(k)) = t(\alpha_x(k)) = t(e(x)ke(x)^{-1})$. Como t é homomorfismo e $te = Id_O$ segue que $t(e(x)ke(x)^{-1}) = te(x)t(k)te(x^{-1}) = xt(k)x^{-1}$. Portanto, $\gamma(\alpha_x(k)) = x\gamma(k)x^{-1}$, isto é, γ é equivariante com respeito a ação.

Para a segunda propriedade, por definição de homomorfismo de grupos, segue que m satisfaz a seguinte igualdade:

$$m((k', \gamma(k)x) \cdot (l', \gamma(l)y), (k, x) \cdot (l, y)) = m((k', \gamma(k)x), (k, x))m((l', \gamma(l)y), (l, y))$$

Desenvolvendo os dois lados observamos que do lado direito temos que:

$$\begin{aligned} m((k', \gamma(k)x).(l', \gamma(l)y), (k, x).(l, y)) &= m((k' \alpha_{\gamma(k)x}(l'), \gamma(k)x\gamma(l)y), (k\alpha_x(l), xy)) \\ &= (k' \alpha_{\gamma(k)x}(l') k \alpha_x(l), xy) \end{aligned}$$

Observe que só é possível aplicar m pois

$$\gamma(k\alpha_x(l))xy = \gamma(k)\gamma(\alpha_x(l))xy = \gamma(k)x\gamma(l)x^{-1}xy = \gamma(k)x\gamma(l)y.$$

Pelo lado direito temos simplesmente que:

$$m((k', \gamma(k)x), (k, x))m((l', \gamma(l)y), (l, y)) = (k'k, x).(l'l, y) = (k'k\alpha_x(l'l), xy)$$

Desde que os dois lados são iguais segue então que $k' \alpha_{\gamma(k)x}(l') k \alpha_x(l) = k' k \alpha_x(l'l)$ (*).

Portanto temos:

$$\begin{aligned} k' \alpha_{\gamma(k)}(\alpha_x(l')) k \alpha_x(l) &= k' \alpha_{\gamma(k)x}(l') k \alpha_x(l) \\ &\stackrel{*}{=} k' k \alpha_x(l'l) \\ &= k' k \alpha_x(l) \alpha_x(l') \\ &= k' k \alpha_x(l) k^{-1} k \alpha_x(l') \end{aligned}$$

Cancelando dos dois lados e escrevendo $z = \alpha_x(l') \in \text{Ker}(s)$ segue $\alpha_{\gamma(k)}(m) = kmk^{-1}$. Portanto a identidade de *Peiffer* é satisfeita como desejado e, logo, $(\text{Ker}(s), O, \gamma, \alpha)$ é um módulo cruzado de grupos. ■

Corolário 21. *Módulos cruzados de grupos são equivalentes a objetos grupo em Cat.*

Demonstração. Segue da proposição 15 e do teorema 20. ■

Referências

- [1] Forrester-Barker, Magnus, *Group Objects and Internal Categories*, J. Algebra, 293, (2005), 319-334.
- [2] R. Brown and C. B. Spencer, *G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group*, Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., p. 296-302, 1976.
- [3] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, no. 5 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2nd edn., 1998.
- [4] Adámek, Jiří, Horst Herrlich, George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, 1990, John Wiley and Sons.
- [5] T. PORTER, *Internal categories and crossed modules*, in KAMPS et al. [7], p. 249-255.

Ado Raimundo Dalla Costa, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil

Email: adodallacosta@hotmail.com