Teorema da Coerência para Bicategorias

Filipe Hernandes Azenha Pilon

1 de dezembro de 2016

Resumo

Neste trabalho faremos uma breve introdução às bicategorias e provaremos o Teorema da Coerência para Bicategorias que afirma que toda bicategoria é biequivalente a uma 2-categoria.

1 Preliminares

Definição 1.1. Uma 2-categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

(i) Uma classe de objetos $\mathcal{C}$;

(ii) Para cada par A, B de objetos de $\mathcal{C}$, uma categoria pequena $\mathcal{C}(A, B)$;

(iii) Para cada tripla A, B, C de objetos de $\mathcal{C}$, um bifuntor

$$c_{ABC} : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

(iv) Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, um funtor

$$u_A : \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}(A, A),$$

onde $\mathbb{1}$ é o objeto final da categoria das categorias pequenas.

Satisfazendo os seguintes axiomas:

- Associatividade: Dado quatro objetos $A, B, C, D \in \mathcal{C}$, a seguinte igualdade é válida:

$$c_{ACD} \circ (\mathbb{1} \times c_{ABC}) = c_{ABD} \circ (c_{BCD} \times \mathbb{1})$$

Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(C,D) \times \mathcal{C}(B,C) \times \mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "\mathbb{1}\times c_{ABC}"] \arrow[d, "c_{BCD}\times\mathbb{1}"'] & \mathcal{C}(C,D) \times \mathcal{C}(A,C) \arrow[d, "c_{ACD}"] \\
\mathcal{C}(B,D) \times \mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "c_{ABD}"'] & \mathcal{C}(A,D)
\end{tikzcd}$$

- Unidade: Dados dois objetos $A, B \in \mathcal{C}$, a seguinte igualdade é válida:

$$c_{AAB} \circ (\mathbb{1} \times u_A) \cong \mathbb{1} \cong c_{ABB} \circ (u_B \times \mathbb{1})$$

Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \mathcal{C}(A,B) \arrow[d, "u_B\times\mathbb{1}"'] & \mathcal{C}(A,B) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}(A,B) \times \mathbb{1} \arrow[d, "\mathbb{1}\times u_A"] \\
\mathcal{C}(B,B) \times \mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "c_{ABB}"'] & \mathcal{C}(A,B) & \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(A,A) \arrow[l, "c_{AAB}"]
\end{tikzcd}$$

Utilizaremos as seguintes notações:

1. Os objetos da classe $\mathcal{C}$ serão chamados de 0-células, e utilizaremos letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ para denotá-las;

2. os objetos da categoria $\mathcal{C}(A, B)$ serão chamados de 1-células ou flechas, e utilizaremos letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ para denota-las e na forma usual $f : A \to B$;

3. as flechas da categoria $\mathcal{C}(A, B)$ serão chamadas de 2-células e utilizaremos letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para denotá-las e na forma usual $\alpha : f \Rightarrow g$;

4. $\beta \odot \alpha$ denotará a composição na categoria $\mathcal{C}(A, B)$,

$$f \overset{\alpha}{\Longrightarrow} g \overset{\beta}{\Longrightarrow} h$$

5. $f \circ g$ denotará a imagem do par (f, g) das flechas pelo funtor composição c_{ABC},

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

6. $\varphi * \alpha$ denotará a imagem do par (φ, α) da 2-célula pelo funtor composição c_{ABC},

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "l"] \arrow[r, bend right, "m"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & C \end{tikzcd} ;$$

7. $\mathbb{1}_A$: $A \to A$ denotará a imagem do único objeto de $\mathbb{1}$ pelo funtor unidade u_A;

Segue diretamente dos axiomas que esses objetos e morfismos constituem uma categoria, com o morfismo $\mathbb{1}_A$ como a flecha identidade.

Observe que dado a situação

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=4, "f"] \arrow[r, "g \Downarrow\alpha" description] \arrow[r, shift right=4, "h \Downarrow\beta" description] & B \arrow[r, shift left=4, "l"] \arrow[r, "m \Downarrow\varphi" description] \arrow[r, shift right=4, "n \Downarrow\psi" description] & C \end{tikzcd} ;$$

e sabendo que c_{ABC} é um funtor temos que:

$$\begin{aligned} (\psi * \beta) \odot (\varphi * \alpha) &= c_{ABC}(\psi, \beta) \odot c_{ABC}(\varphi, \alpha) \\ &= c_{ABC}((\psi, \beta) \odot (\varphi, \alpha)) \\ &= c_{ABC}(\psi \odot \varphi, \beta \odot \alpha) \\ &= (\psi \odot \varphi) * (\beta \odot \alpha). \end{aligned}$$

Esta fórmula é conhecida como lei de intercâmbio.

A seguir veremos alguns exemplos de 2-categorias.

Exemplo 1.2. Um exemplo básico de 2-categorias é tomando categorias pequena como as 0-células, funtores como as 1-células e transformações naturais como 2-células.

Exemplo 1.3. Escolhendo os espaços topológicos como 0-células e as funções contínuas entre eles como 1-células. Dado duas funções contínuas $f, g : A \rightrightarrows B$, uma homotopia $\alpha : f \Rightarrow g$ é uma função contínua

$$\alpha : I \times A \longrightarrow B$$

onde $I = [0,1]$ é o intervalo unitário, $\alpha(0,\alpha) = f(a)$ e $\alpha(1,a) = g(a)$.

Se considerarmos agora três funções contínuas $f, g, h : A \to B$ e duas homotopias $\alpha : f \Rightarrow g$, $\beta : g \Rightarrow h$, vamos construir uma composição de homotopias $\beta \odot \alpha : f \Rightarrow h$. É suficiente definir

$$(\beta \odot \alpha)(t,a) = \begin{cases} \alpha(2t,a), & se\ t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1,a) & se\ t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

e de fato temos uma função contínua

$$\beta \odot \alpha : I \times A \longrightarrow B$$

tal que $(\beta \odot \alpha)(0,a) = f(a)$, $(\beta \odot \alpha)(\frac{1}{2},a) = g(a)$, $(\beta \odot \alpha)(1,a) = h(a)$. Observe que esta composição não é associativa. De fato, considere quatro aplicações contínuas $f, g, h, k : A \to B$ e três homotopias $\alpha : f \Rightarrow g$, $\beta : g \Rightarrow$, $\gamma : h \Rightarrow k$; a composição

$$\gamma \odot (\beta \odot \alpha) : f \Rightarrow k$$

satisfaz $(\gamma \odot (\beta \odot \alpha))(\frac{1}{2},a) = h(a)$, enquanto a composição

$$(\gamma \odot \beta) \odot \alpha : f \Rightarrow k$$

é tal que $((\gamma \odot \beta) \odot \alpha)(\frac{1}{2},a) = g(a)$. Além disso, estas duas homotopias $\gamma \odot (\beta \odot \alpha)$ e $(\gamma \odot \beta) \odot \alpha$ são homotópicas entre si como funções contínuas:

$$\gamma \odot (\beta \odot \alpha), (\gamma \odot \beta) \odot \alpha : I \times A \rightrightarrows B.$$

Agora, considere a situação

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[r, bend right, "q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & C \end{tikzcd}$$

com A, B, C espaços topológicos, f, g, p, q funções contínuas e α e φ homotopias. A composição:

$$I \times A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{p} C$$

Define uma homotopia $p \circ f \Rightarrow p \circ g$ enquanto a composição

$$I \times A \xrightarrow{I \times g} I \times B \xrightarrow{\varphi} C$$

define uma homotopia $p \circ g \Rightarrow q \circ g$. Usando a composição das homotopias definidas anteriormente, obtemos a homotopia composição

$$\varphi * \alpha = (\varphi \circ (1 \times g)) \odot (p \circ \alpha) : p \circ f \Rightarrow q \circ g.$$

Resta verificarmos que ambas as composições $\odot$ e $*$ das homotopias são compatíveis com a relação de equivalência identificando duas homotopias (homotópicas). Portanto, obtivemos leis de composição correspondentes nas classes de homotopias das homotopias. Escolhendo os espaços topológicos como objetos, as funções contínuas como as flechas e as classes de homotopia das homotopias como 2-células, temos uma 2-categoria.

Exemplo 1.4. A categoria Grp dos grupos tem como objetos os grupos e as flechas são os homomorfismos de grupo. Além disso, dados dois grupos G,H e dois homomorfismos de grupos $f, g : G \rightrightarrows H$, podemos definir uma duas célula $\alpha : f \to g$ como um elemento $\alpha \in H$ tal que para cada elemento $x \in G$

$$f(x).\alpha = \alpha.g(x)$$

onde . denota a lei de composição do grupo H. Em outras palavras, uma 2-célula $\alpha : f \Rightarrow g$ é um automorfismo

$$\begin{aligned} \zeta : H &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto \alpha.y.\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

transformando f em g.

Note que dados $\alpha : f \Rightarrow g$ e $\beta : g \Rightarrow h$ duas 2-células, o elemento $\beta.\alpha$ é a 2-célula $\beta \odot \alpha : f \Rightarrow h$. Isso fornece a $Grp(G, H)$ uma estrutura de categoria e, mais precisamente uma estrutura de grupoide (uma categoria em que cada flecha é um isomorfismo). Resta definir a composição horizontal nas 2-celúlas. Assim, considere os homomorfismos de grupo $f, g : G \rightrightarrows H$ e $h, k : H \rightrightarrows K$, ambos com as 2-células $\alpha : f \Rightarrow g$.

2 Bicategorias

Definição 2.1. Uma bicategoria $\mathcal{B}$ é uma coleção de 0-células onde para cada par de objetos X e Y, $\mathcal{B}(X,Y)$ é uma categoria. Os objetos de cada categoria $\mathcal{B}(X,Y)$ são as 1-células de $\mathcal{B}$, os morfismos são 2-células, e suas operações de composição são chamadas de composições verticais. Para cada $X, Y, Z \in \mathcal{B}$, existe um funtor c_{XYZ} que nos fornece a composição de 1-célula e composição horizontal nas 2-células.

$$
\begin{aligned}
c_{XYZ} : \mathcal{B}(Y,Z) \times \mathcal{B}(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{B}(X,Z) \\
(g, f) &\longmapsto g \circ f \\
(\beta, \alpha) &\longmapsto \beta * \alpha
\end{aligned}
$$

Nós temos o seguinte isomorfismo natural para descrever a associatividade das 1-células em $\mathcal{B}$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[rr, "\mathbb{1} \times c_{ABC}"] \arrow[d, "c_{BCD} \times \mathbb{1}"'] & & \mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(A,C) \arrow[d, "c_{ACD}"] \\
\mathcal{B}(B,D) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[rru, Rightarrow, "a_{ABCD}"] \arrow[rr, "c_{ABD}"'] & & \mathcal{B}(A,D)
\end{tikzcd}
$$

Também, para cada objeto $X \in \mathcal{B}$, nós temos um funtor que seleciona uma 1-célula de X para X:

$$
\mathbb{1}_X : \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{B}(X,X)
$$

A imagem de $\mathbb{1}_X$ é chamada de identidade em X ou unidade. No entanto, ao contrário das identidades estritas das 2-categorias, as identidades em bicategorias precisam apenas agir de forma idêntica a menos de isomorfismo quando compostas com outras 1-células. A "unicidade"destas 1-células identidade, isto é, os requesitos da identidade fraca, são dados pelos seguintes isomorfismos naturais:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(A,B) \times \mathbb{1} \arrow[d, "1 \times \mathbb{1}_A"'] \arrow[rd, "\cong"] & \\
\mathcal{B}(A,B) \times \mathcal{B}(A,A) \arrow[r, "C_{AAB}"'] \arrow[ru, Rightarrow, "r_{AB}"] & \mathcal{B}(A,B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[d, "\mathbb{1}_B \times 1"'] \arrow[rd, "\cong"] & \\
\mathcal{B}(B,B) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "C_{ABB}"'] \arrow[ru, Rightarrow, "l_{AB}"] & \mathcal{B}(A,B)
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, cada 1-célula f,g,h,k com domínios e contradomínios apropriados satisfazem os axiomas dados pelos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & ((kh)g)f \arrow[rr, "a*1"] \arrow[dl, "a"'] & & (k(hg))f \arrow[dr, "a"] & \\
(kh)(gf) \arrow[drr, "a"'] & & & & k((hg)f) \arrow[dll, "1*a"] \\
 & & k(h(gf)) & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(gI)f \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r*1"'] & & g(If) \arrow[dl, "1*l"] \\
 & gf &
\end{tikzcd}$$

Assim como um grupo pode ser visto como uma categoria com um objeto, uma categoria monoidal $\mathcal{V}$ pode ser vista como uma bicategoria $\hat{\mathcal{V}}$ com um objeto, denotado por $\star$. Os objetos de $\mathcal{V}$ correspondem as 1-células em $\hat{\mathcal{V}}$, todas as funções de $\star$ para $\star$ e os morfismos de $\mathcal{V}$ correspondem as 2-células de $\hat{\mathcal{V}}$. Então destas informacões e dos axiomas de bicategoria temos uma estrutura monoidal. Por exemplo, o funtor $\mathbb{1}_\star$ escolhe a 1-célula de $\hat{\mathcal{V}}$ correspondente a unidade de $\mathcal{V}$. Além disso, note que $\hat{\mathcal{V}}$ é isomorfo à categoria monoidal $\mathcal{V}$.

Exemplo 2.2. Um exemplo de bicategoria pode ser encontrado na teoria de bimódulos. Os objetos são os anéis unitais. Uma flecha do anel R para o anel S é um (R, S)-bimódulo M, isto é um grupo abeliano M munido de uma estrutura de R-módulo à esquerda e S-módulo à direita, com axioma de compatibilidade entre as estruturas

$$r(ms) = (rm)s \text{ para todo os elementos } r \in R \text{ , } m \in M \text{ e } s \in S$$

Dados dois (R, S)-bimódulos M e N, nós escolhemos como 2-células as funções (R, S)-linear $f : M \to N$, assim os homomorfismos de grupo são ambos R-linear à esquerda e S-linear à direita. Isso nos fornece a categoria Bim(R,S) dos (R, S)-bimódulos e seus morfismos.

Para um terceiro anel T, a composição

$$Bim(S,T) \times Bim(R,S) \longrightarrow Bim(R,T)$$

é como o funtor "produto tensorial". De fato, dados um (R,S)-bimódulo M e um (S,T)-bimódulo N, o produto tensorial $M \otimes_S$ N sobre S produz um (R,T)-bimódulo. O produto tensorial de bimódulos é associativo no sentido de que dados anéis R,S,T,V, um (R,S)-bimódulo L, um (S,T)-bimódulo M e um (T,V)-bimódulo N, existe um isomorfismo canônico.

$$L \otimes_S (M \otimes_T N) \cong (L \otimes_S M) \otimes_T N$$

Além disso, dado um anel R, este anel pode ser visto como um (R,R)-bimódulo e, a menos de isomorfismo, é a identidade para o tensorial sobre R.

Exemplo 2.3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena com pullbacks. Vamos construir a bicategoria dos spans de $\mathcal{C}$.

Os objetos da bicategoria dos spans serão os mesmos de $\mathcal{C}$ e um morfismo $A \to B$ será agora um span em A,B, isto é o par de flechas $f : X \to A$, $g : X \to B$ em $\mathcal{C}$ (ver Diagrama 1) com um domínio arbitrário X. Uma 2-célula $\alpha : (f,g) \Rightarrow (f',g')$ entre dois spans em A,B é um morfismo $\alpha : X \to X'$ tal que $f' \circ \alpha = f$, $g' \circ \alpha = g$ (ver Diagrama 1). A composição em $\mathcal{C}$ induz uma estrutura de categoria nos spans de A para B.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dotted, "\alpha"] & \\
A & & B \\
& X' \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1

$$
\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & & \\
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "k"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 2

Dados dois spans $(f, g) : A \to B$ e $(h, k) : B \to C$, nós definimos sua composição como

$$(h, k) \circ (f, g) = (f \circ x, k \circ y).$$

onde (x, y) é um pullback fixo arbitrário de (g, h) (ver Diagrama 2). Dados outros spans $(f', g') : A \to B$, $(h', k') : B \to C$, analogamente fixaremos um pullback (x', y') de (g', h') e sua composição

$$(h', k') \circ (f', g') = (f' \circ x', k' \circ y').$$

Agora, dados as 2-células

$$\alpha : (f, g) \to (f', g'),\ \beta : (h, k) \Rightarrow (h', k'),$$

A igualdade

$$g' \circ \alpha \circ x = g \circ x = h \circ y = h' \circ \beta \circ y$$

em $\mathcal{C}$ implica na existência de uma única fatoração $\gamma : Z \to Z'$ através do pullback (x', y'), com $x' \circ \gamma = \alpha \circ x$, $y' \circ \gamma = \beta \circ y$. Das relações

$$f' \circ x' \circ \gamma = f' \circ \alpha \circ x = f \circ x,\ k' \circ y' \circ \gamma = k' \circ \beta \circ y = k \circ y,$$

deduzimos que $\gamma : (f \circ x, k \circ y) \Rightarrow (f' \circ x', k' \circ y')$ é uma 2-célula.

Como pullbacks são definidos a menos de isomorfismos, concluímos que a associatividade na composição dos spans segue a menos de isomorfismo. Isso permite a definição de um isomorfismo natural α que se encaixa na definição de bicategoria. Pode-se escolhe o span identidade $(1_A, 1_A)$ como a identidade em A e as transformações naturais identidades como isomorfismos.

Definição 2.4. Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ duas bicategorias. Um morfismo F de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ consiste de:

(i) Uma função $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$

(ii) Para cada par $A, B \in \mathcal{B}$, um funtor $F_{AB} : \mathcal{B}(A,B) \to \mathcal{B}'(FA, FB)$.

(iii) Para cada $A, B, C \in \mathcal{B}$, transformações naturais:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F_{BC} \times F_{AB}"'] & \mathcal{B}(A,C) \arrow[d, "F_{AC}"] \\
\mathcal{B}'(FB,FC) \times \mathcal{B}'(FA,FB) \arrow[r, "c'"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\phi_{ABC}"] & \mathcal{B}'(FA,FC)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "I'_{FA}"'] & \mathcal{B}(A,A) \arrow[d, "F_{AA}"] \\
& \mathcal{B}'(FA,FA) \arrow[u, phantom, "\phi_A"]
\end{tikzcd}$$

Dado $g \in \mathcal{B}(B,C)$ e $f \in \mathcal{B}(A,B)$, vamos nos referir a componente de $\phi_{(ABC)}$ em $g \times f$ como $\phi_{gf} : Fg \circ Ff \to F(g \circ f)$.

A transformação natural ϕ_A consiste de uma única 2-célula em $\mathcal{B}'$, $\phi_A : 1_{FA} \to F(1_A)$.

Quaisquer 1-células f, g, h com apropriados domínios e contradomínios satisfazem os axiomas dados pelos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
(Fh \circ Fg) \circ Ff \arrow[r, "\phi * 1"] \arrow[d, "a'"'] & F(h \circ g) \circ Ff \arrow[r, "\phi"] & F((h \circ g) \circ f) \arrow[d, "F_a"] \\
Fh \circ (Fg \circ Ff) \arrow[r, "1 * \phi"'] & Fh \circ F(g \circ f) \arrow[r, "\phi"'] & F(h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Ff \circ I'_{FA} \arrow[r, "1 * \phi"] \arrow[d, "r'"'] & Ff \circ FI_A \arrow[r, "\phi"] & F(f \circ I_A) \arrow[dll, "F_r"] \\
Ff & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I'_{FB} \circ Ff \arrow[r, "\phi * 1"] \arrow[d, "l'"'] & FI_B \circ Ff \arrow[r, "\phi"] & F(I_B \circ f) \arrow[dll, "F_l"] \\
Ff & &
\end{tikzcd}$$

No caso onde o morfismo F preserva associatividade e unidade a menos de isomorfismo, isto é, para cada $A, B, C \in \mathcal{B}$, ϕ_A e ϕ_{ABC} são isomorfismos naturais, chamamos F de homomorfismo. Quando todos os ϕ_A, ϕ_{ABC} são igualdades, F é um homomorfismo estrito. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são 2-categorias, um homomorfismo estrito é chamado de um 2-funtor.

Definição 2.5. Dados morfismos entre bicategorias $F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, uma transformação σ de F para G consiste de:

(i) Para cada $A \in \mathcal{B}$, existem 1-células componentes $\sigma_A : FA \to GA$.

(ii) Transformações naturais
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "F_{AB}"] \arrow[d, "G_{AB}"'] & \mathcal{B}'(FA,FB) \arrow[d, "(\sigma_B)_*"] \\
\mathcal{B}'(GA,GB) \arrow[r, "(\sigma_A)^*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\sigma_{AB}"] & \mathcal{B}'(FA,GB)
\end{tikzcd}$$

Onde $(\sigma_A)^*$ e $(\sigma_B)_*$ indicam respectivamente os funtores induzidos pela pré composição com σ_A e pós composição com σ_B. Dado $f \in \mathcal{B}(A,B)$, σ_f fornece a 2-célula dando a componente de σ_{AB} de $Gf \circ \sigma_A$ para $\sigma_B \circ Ff$.

Dados 1-células f e g com domínios e contradomínios apropriados, as transformações obedecem os diagramas comutativos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
(Gg \circ Gf) \circ \sigma_A \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "\psi * 1"'] & Gg \circ (Gf \circ \sigma_A) \arrow[r, "1 * \sigma_f"] & Gg \circ (\sigma_B \circ Ff) \arrow[r, "a'^{-1}"] & (Gg \circ \sigma_B) \circ Ff \arrow[r, "\sigma_g * 1"] & (\sigma_C \circ Fg) \circ Ff \arrow[r, "a'"] & \sigma_C \circ (Fg \circ Ff) \arrow[d, "1 * \phi"] \\
G(g \circ f) \circ \sigma_A \arrow[rrrrr, "\sigma_{gf}"'] & & & & & \sigma_C \circ F(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I'_{GA} \circ \sigma_A \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "\psi * 1"'] & \sigma_A \arrow[r, "r'^{-1}"] & \sigma_A \circ I'_{FA} \arrow[d, "1 * \phi"] \\ GI_A \circ \sigma_A \arrow[rr, "\sigma_{I_A}"'] & & \sigma_A \circ FI_A \end{tikzcd}$$

No caso onde todas as σ_{AB} são isomorfismos naturais, σ é uma transformação forte. Além disso, no caso em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são 2-categorias e F, G são 2-funtores, se cada σ_{AB} é uma identidade nós temos a condição para que σ seja uma 2-transformação natural.

Definição 2.6. Dados morfismos entre bicategorias, $F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ e transformações $\sigma, \sigma' : F \Rightarrow G$, uma modificação $\Gamma : \sigma \to \sigma'$ são dadas pelas 2-células componentes $\Gamma_A : \sigma_A \to \sigma'_A : FA \to GA$ para cada $A \in \mathcal{B}$ tal que os seguintes diagramas comutem:

$$\begin{tikzcd} Gf \circ \sigma_A \arrow[r, "1 * \Gamma_A"] \arrow[d, "\sigma_f"'] & Gf \circ \sigma'_A \arrow[d, "\sigma'_f"] \\ \sigma_B \circ Ff \arrow[r, "\Gamma_B * 1"'] & \sigma'_B \circ Ff \end{tikzcd}$$

A seguir veremos dois exemplos importantes que estão diretamente relacionadas ao Teorema da Coerência para bicategorias.

Exemplo 2.7. Dados $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, vamos construir a bicategoria $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$. Suas 0-células serão os homomorfismos de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, 1-células serão as transformações fortes e 2-células as modificações. Se $[\mathcal{B}, \mathcal{B}']$ fosse uma 2-categoria, dado qualquer homomorfismo $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, a transformação identidade forte $1_F : F \to F$ teria componentes identidades estritas $(1_F)_A : FA \to FA$. Entretanto, os objetos FA estão em $\mathcal{B}'$, uma bicategoria, e os objetos de uma bicategoria não necessariamente possuem morfismos de identidade estrito, assim $[\mathcal{B}, \mathcal{B}']$ não é necessariamente uma 2-categoria. Entretanto, quando $\mathcal{B}'$ é uma 2-categoria, nós temos os morfismos estritos de identidade exigidos e $[\mathcal{B}, \mathcal{B}']$ é de fato uma 2-categoria. Por exemple, para toda bicategoria $\mathcal{B}$, $[\mathcal{B}, Cat]$ e $[\mathcal{B}^{op}, Cat]$ são 2-categorias.

Exemplo 2.8. Para qualquer bicategoria $\mathcal{B}$, existe um mergulho de Yoneda $Y : \mathcal{B} \to [\mathcal{B}, Cat]$ que mostraremos que é um homomorfismo.

A parte função de Y mapeia cada objeto $B \in \mathcal{B}$ para $\mathcal{B}(\_, B)$, um homomorfismo de $\mathcal{B}^{op}$ para Cat. O homomorfismo $\mathcal{B}(\_, B)$ leva cada $A \in \mathcal{B}$ para $\mathcal{B}(A, B)$, que é uma categoria por definição de bicategoria.

As informações restantes para definir o mergulho de Yoneda é dado pelos funtores:

$$Y_{AB} : \mathcal{B}(A, B) \to [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(\_, A), \mathcal{B}(\_, B))$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & & \mathcal{B}(_, A) \arrow[d, Rightarrow, "f\circ(_)"] \\
B \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & \mathcal{B}(_, B)
\end{tikzcd}$$

e transformações naturais

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B) \arrow[rr, "c_{ABC}"] \arrow[d, "Y_{BC} \times Y_{AC}"'] & & \mathcal{B}(A, C) \arrow[d, "Y_{AC}"] \\
{[\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(_, B), \mathcal{B}(_, C)) \times [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(_, A), \mathcal{B}(_, B))} \arrow[rr, "c'_{ABC}"'] \arrow[urr, Rightarrow, "\sigma_{ABC}"] & & {[\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(_, A), \mathcal{B}(_, C))}
\end{tikzcd}$$

Dados morfismos $f \in \mathcal{B}(A, B)$ e $g \in \mathcal{B}(B, C)$, nós seguiremos o diagrama acima em ambas as direções, chegando as transformações
$\mathcal{B}(\_, A) \Rightarrow \mathcal{B}(\_, C)$:

$$\begin{tikzcd}
(g, f) \arrow[d, mapsto] & \\
((g \circ (_)), (f \circ (_))) \arrow[r, mapsto] & g \circ (f \circ (_))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(g, f) \arrow[r, mapsto] & g \circ f \arrow[d, mapsto] \\
& (g \circ f) \circ (_)
\end{tikzcd}$$

Contornando à esquerda e a parte inferior do diagrama, A transformação que chegamos tem componentes dadas pela pós composição com f seguida pela pós composição com g, e pela outra direção, a transformação tem componentes dadas pela pós composição com $g \circ f$. Assim, ϕ_{gf} é uma modificação partindo desta primeira composição para a segunda. Como essas transformações são entre funtores mapeando em Cat, suas componentes em um objeto $D \in \mathcal{B}$ são funtores $\mathcal{B}(D, A) \to \mathcal{B}(D, C)$. A componente da modificação ϕ_{gf} em D, $(\phi_{gf})_D$, é então uma transformação natural entre esses dois funtores. Dado um morfismo $h \in \mathcal{B}(D, A)$, a componente de $(\phi_{gf})_D$ em h, que mapeia de $g \circ (f \circ h)$ para $(g \circ f) \circ h$, é dada pela componente em (g, f, h) de a_{DABC} da definição de $\mathcal{B}$ ser uma bicategoria.

Além disso, pela definição de bicategoria, a_{DABC} é um isomorfismo natural, consequentemente todas as suas componentes são isomorfismos. Assim, como as componentes de $(\phi_{gf})_D$ são isomorfismos, $(\phi_{gf})_D$ é um isomorfismo natural. Por outro lado, ϕ_{ABC} é um isomorfismo porque as 1-células em $\mathcal{B}$ são associativas a menos de isomorfismo. Além disso, o mergulho de Yoneda é de fato um homomorfismo porque $[\mathcal{B}, Cat]$ herda a estrutura de composição de $\mathcal{B}$.

A seguir, definiremos os conceitos de equivalência interna e biequivalência. O primeiro se refere a uma noção de comparação entre dois objetos em uma bicategoria, já o segundo se refere a uma noção de comparação entre duas bicategorias.

Definição 2.9. Dois objetos A e B em uma bicategoria $\mathcal{B}$ são internamente equivalentes se existem 1-células $f : A \to B$ e $g : B \to A$ e isomorfismos $1 \to g \circ f$ em $\mathcal{B}(A, A)$ e $f \circ g \to 1$ em $\mathcal{B}(B, B)$.

Exemplo 2.10. Uma equivalência em categorias é uma equivalência interna em CAT. Uma equivalência interna em $[\mathcal{B}, CAT]$ entre homomorfismos $F, G : \mathcal{B} \to CAT$ consiste de transformações fortes $\sigma : F \Rightarrow G$, $\tau : G \Rightarrow F$ tal que temos os isomorfismos $1 \to \tau \circ \sigma$ em $[\mathcal{B}, CAT](F, F)$ e $\sigma \circ \tau \to 1$ em $[\mathcal{B}, CAT](G, G)$.

Definição 2.11. Duas bicategorias $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são biequivalentes se temos um par de homomorfismos $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, $G : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ com uma equivalência $1 \to G \circ F$ em $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ e uma equivalência $F \circ G \to 1$ em $[\mathcal{B}', \mathcal{B}']$.

Além disso, assim como uma equivalência de categorias também pode ser dada por um funtor que é fiel cheio e essencialmente sobrejetivo, uma biequivalência entre bicategorias $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ pode ser dada por um homomorfismo F: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ onde F é sobrejetivo a menos de equivalência nos objetos, e F_{AB} é uma equivalência para cada $A, B \in \mathcal{B}$. (prova referência [2]).

3 Lema de Yoneda e Teorema da Coerência para Bicategorias.

Nesta seção provaremos o Lema de Yoneda para bicategorias, no qual usaremos na demonstração do Teorema da Coerência para Bicategorias.

Lema 3.1. *Dado um homomorfismo $T : \mathcal{B} \to Cat$ de bicategorias, temos a seguinte equivalência em $[\mathcal{B}, Cat]$:*

$$[\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(?, \_), T) \to T \text{ ou dualmente, } [\mathcal{B}^{op}, Cat] \to T.$$

Demonstração. O homomorfismo $[\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(?, \_), T)$ mapeia um objeto $X \in \mathcal{B}$ para $[\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(X, \_), T)$, a categoria das transformações de $\mathcal{B}(X_{,)}$ para T, que sabemos ser uma categoria pela definição de $[\mathcal{B}, Cat]$ como uma bicategoria.

Demonstraremos essa equivalência construindo transformações fortes σ e τ onde cada componente dá uma equivalência de categorias. Começaremos construir tais transformações.

Para cada $A \in \mathcal{B}$, sejam

$$\sigma_A : [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(A, \_), T) \longrightarrow TA \qquad\qquad \tau_A : TA \longrightarrow [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(A, \_), T)$$

$$\alpha \longmapsto \hat{\alpha} = \alpha_A(I_A) \qquad\qquad a \longmapsto \hat{a} : \mathcal{B}(A, \_) \Rightarrow T$$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[d, "\Gamma"] & & \alpha_A(I_A) \arrow[d, "(\Gamma_A)_{I_A}"'] \\ \beta & \longmapsto & \beta_A(I_A) \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{array}{l} (\hat{a})_B : \mathcal{B}(A, B) \longrightarrow B \\ \qquad f \longmapsto Tf(a) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "h"] & & \hat{a} \arrow[d, "\hat{h}"'] \\ b & \longmapsto & \hat{b} \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \hat{h}_B : \hat{a}_B \Rightarrow \hat{b}_B \\ (\hat{h}_B)_f = Tf(h) \end{array}$$

Primeiramente, mostraremos que essas aplicações estão bem definidas demonstrando que é uma transformação forte de $\mathcal{B}(A, \_)$ para T. Assim, queremos encontrar isomorfismos naturais:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,C) \arrow[r, "\mathcal{B}(A,_)_{BC}"] \arrow[d, "T_{BC}"'] & Cat(\mathcal{B}(A,B),\mathcal{B}(A,C)) \arrow[d, "(\hat{a}_C)_*"] \\
Cat(TB,TC) \arrow[r, "(\hat{a}_B)_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\hat{a}_{ABC}"] & Cat(\mathcal{B}(A,B),TC)
\end{tikzcd}$$

Seguindo o diagrama acima em ambas as direções para um $f \in \mathcal{B}(B,C)$, temos:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d, mapsto] & \\
Tf \arrow[r, mapsto] & g \mapsto Tf \circ Tg(a)
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] & g \mapsto f \circ g \arrow[d, mapsto] \\
 & g \mapsto T(f \circ g)(a)
\end{tikzcd}$$

Isto é, nós chegamos a dois funtores de $\mathcal{B}(A,B)$ para TC, cujas respectivas ações em um arbitrário $g \in \mathcal{B}(A,B)$ são dadas acima. A componente de $_{ABC}$ em f é uma transformação natural entre esses funtores. Seja a componente dessa transformação natural em g dada pela componente de ϕ_{fg} em a, onde ϕ_{fg} é a componente em (g,f) de ϕ_{ABC}. Como T é homomorfismo, ϕ_{ABC} é um isomorfismo natural, consequentemente $_{ABC}$ é um isomorfismo como desejado.

A seguir, mostraremos que para qualquer $A \in \mathcal{B}$, σ_A e τ_A fornecem uma equivalência, vamos exibir um isomorfismos naturais:

$$\eta : 1_{[\mathcal{B},Cat](\mathcal{B}(A,\_),T)} \to \tau_A \circ \sigma_A \text{ e } \epsilon : \sigma_A \circ \tau_A \to 1_{TA}$$

Primeiro, trabalharemos ϵ:

Observe que $\sigma_A \circ \tau_A$ é um funtor de TA para TA que envia $a \in TA$ para $TI_A(a)$.

Pela definição de T ser um homomorfismo, existe um isomorfismo natural $\phi_A^{-1} : TI_A \to I_{TA}$. Como I_{TA} é a unidade em $TA \in Cat$, uma 2-categoria, ele é simplesmente o funtor identidade. Assim, nós temos um isomorfismo $\phi_A^{-1} : \sigma_A \circ \tau_A \to 1_{TA}$, como desejado.

Agora, exibiremos η:

Observe

$$\tau_A \circ \sigma_A : [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(A, \_), T) \longrightarrow [\mathcal{B}, Cat](\mathcal{B}(A, \_), T)$$
$$\alpha : \mathcal{B}(A, \_) \Rightarrow T \longmapsto \hat{\hat{\alpha}} : \mathcal{B}(A. \_) \Rightarrow T$$

$$\begin{aligned} \alpha_B : \mathcal{B}(A, B) &\longrightarrow TB & \qquad \hat{\hat{\alpha}}_B : \mathcal{B}(A, B) &\longrightarrow TB \\ f &\longmapsto \alpha_B(f) & f &\longmapsto Tf(\alpha_A(I_A)) \end{aligned}$$

Como α é transformação forte, temos um isomorfismo natural α_{AB}:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "\mathcal{B}(A,_)_{AB}"] \arrow[d, "T_{AB}"'] & Cat(\mathcal{B}(A,A), \mathcal{B}(A,B)) \arrow[d, "(\alpha_B)_*"] \\
Cat(TA, TB) \arrow[r, "(\alpha_A)_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{AB}"] & Cat(\mathcal{B}(A,A), TB)
\end{tikzcd}$$

Percorrendo o diagrama em ambos os sentidos temos:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d, mapsto] & & f \arrow[r, mapsto] & g \mapsto f \circ g \arrow[d, mapsto] \\
Tf \arrow[r, mapsto] & g \mapsto Tf \circ \alpha_A(g) & & g \mapsto \alpha_B(f \circ g)
\end{tikzcd}$$

Em particular, para $g = I_A$, temos um isomorfismo entre $\alpha_B(f \circ I_A)$ e $I_A \mapsto Tf \circ \alpha_A(I_A)$. Também, $f \circ I_A$ é isomorfo a f pela definição de bicategoria. Portanto, construímos um isomorfismo

$$(\alpha_f)_{I_A} \circ \alpha_B(r^{-1}) : \alpha_B \to Tf \circ \alpha_A(I_A).$$

$\square$

Teorema 3.2. *Toda bicategoria é biequivalente a uma 2-categoria.*

Demonstração. Dada uma bicategoria $\mathcal{B}$, afirmamos que $\mathcal{B}$ é biequivalente a imagem cheia de um mergulho de Yoneda Y, isto é, a subcategoria S de $[\mathcal{B}^{op}, Cat]$ com objetos $YB; B \in \mathcal{B}$ e para cada $C, D \in \mathcal{B}$, morfismos $S(YC, YD) = [\mathcal{B}^{op}, Cat](YC, YD)$. Para demostrar a biequivalência desejada, mostraremos que Y', o mergulho de Yoneda com contradomínio restrito à S, satisfaz o critério alternativo mencionado na definição 2.11 (uma biequivalência entre bicategorias $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ pode ser dada por um homomorfismo F: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ onde F é sobrejetivo a menos de equivalência nos objetos, e F_{AB} é uma equivalência para cada $A, B \in \mathcal{B}$).

Primeiro, Y' é sobrejetivo a menos de equivalência nos objetos como, por construção, ele satisfaz a condição forte para ser sobrejetivo nos objetos. Então, para cada $A, B \in \mathcal{B}$, $Y'_{AB} = Y_{AB}$ é a componente em A da equivalência dada pelo Lema de Yoneda para Bicategorias aplicado ao caso onde $T = \mathcal{B}(\_, B)$. E como visto na prova do Lema de Yoneda (Lema 3.1), as componentes da equivalência são equivalências de categorias.

□

4 Referências

[1] S. Mac Lane. Categories for the Working Mathematician. Springer Verlag, 1971.

[2] O. Abbad, Equivalences in Bicategories, Universit'e Choua"ib Doukkali, El Jadida, Morocco, 2016.

[3] Leinster, T., Basic bicategories, ArXiv:math/9810017v1, (1998).