O Teorema de Estritização de MacLane's

Mateus Medeiros Teixeira

17 de março de 2017

Resumo

Neste trabalho mostraremos que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita. Tal resultado é conhecido como "MacLane's Strictness Theorem", e nos permite trabalhar mais livremente com as categorias monoidais, uma vez que, numa categoria monoidal estrita, as transformações naturais de associatividade, multiplicação á direita e à esquerda se tornam as respectivas transformações naturais de identidade, ou seja, dada uma categoria monoidal estrita $\mathcal{C}$, temos que $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ e $X \otimes \mathbf{1} = X = \mathbf{1} \otimes X$, para todo X, Y e $Z \in \mathcal{C}$.

Palavras-chaves: Categoria Monoidal; Categoria Monoidal Estrita; Teorema de MacLane

1 Introdução

A Teoria de Categorias surgiu na década de 40 nos estudos de S. Eilenberg e S. Maclane em Topologia Algébrica. Os mesmos introduziram os conceitos de categorias, funtores e transformações naturais, com o objetivo de compreender os processos que preservam estruturas matemáticas.

Esta teoria traduz estruturas matemáticas e seus conceitos através de uma coleção de objetos e flechas, e vem sendo utilizada para formalizar conceitos abstratos de alto nível, como conjuntos, anéis, grupos, álgebras de Hopf entre outros. Embora recente, a teoria de Categorias vem se tornando um dos grandes pilares da matemática contemporânea, uma vez que permite compreender propriedades e resultados cada vez mais gerais sobre classes de objetos de uma mesma estrutura, ou ainda, tornando-se um ambiente fértil para tratar relaçõees existentes entre diferentes estruturas matemáticas.

Neste sentido, podemos pensar que a Teoria de Categoria é um refinamento (ou categorização) da álgebra ordinária, em outras palavras, podemos pensar que estruturas algébricas usuais são recuperadas de estruturas categóricas correspondentes passando pelo conjunto da classe de isomorfismos dos objetos.

Por exemplo, podemos pensar que categorias pequenas são uma categorização da noção de conjuntos, ou ainda, categorias abelianas categorizam grupos abelianos. Particularmente, categorias monoidais são uma categorização da noção de monóide.

Lembramos que os monóides são uma das estruturas mais fundamentais da álgebra ordinária, podendo ser definido por uma terna $(M, \cdot, 1)$, em que M é um conjunto, $cdot$: $M \times M \to M$ é uma operação de multiplicação associativa, $1 \in M$ tal que $1^2 = 1$ e existem bijeções $1\cdot$, $\cdot 1 : M \to M$, em que a última condição é quivalente a dizer que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Categorizar a definição de monóide, significa então trabalhar com uma estrutura mais simples (fundamental) na teoria de categorias, e a ideia para categorizar tal definição consiste simplesmente de traduzir as igualdades da definição de monóide via isomorfismos satisfazendo propriedades consistentes, em que a palavra "bijeção" é substituída pela palavra "equivalência".

O foco deste trabalho consiste em demonstrar que toda categoria monoidal é monoidal equivalente a uma categoria monoidal estrita, que tem estrutura monoidal ainda mais simples, uma vez que a associatividade e as multiplicações a direita e à esquerda pela unidade são transformações naturais monoidais. Este resultado é conhecido como o teorema de estritização de MacLane's e traz como benefício o fato de podemos simplificar ainda mais nossa estrutura básica, o que a torna mais simples de ser estudada.

Como referência básica, citamos [1], [2] e [3].

2 Categorias monoidais

Definição 2.1 *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ *em que:*
(i) $\mathcal{C}$ *é uma categoria.*
(ii) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor dado por*

$$\otimes(X, Y) = X \otimes Y \quad e \quad \otimes(f, g) = f \otimes g,$$

para $X, Y \in \mathcal{C}$ *e* $f : X \to Y$, $g : X' \to Y'$ *morfismos em* $\mathcal{C}$, *em que* $f \otimes g : X \otimes X' \to Y \otimes Y'$.
(iii) $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ *é chamado objeto unidade.*
(iv) $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z) : X, Y, Z \in \mathcal{C}\}$, $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \mathcal{C}\}$ *e* $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \mathcal{C}\}$ *são isomorfismos naturais tais que, para quaisquer* $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$, *os diagramas abaixo comutam:*

Axioma do Pentágono

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes Id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y \otimes Z,W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "Id_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

Axioma do Triângulo

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes Id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "Id_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_{X,Y,Z\otimes W}a_{X\otimes Y,Z,W} &= (id_X \otimes a_{Y,Z,W})a_{X,Y\otimes Z,W}(a_{X,Y,Z} \otimes id_W), \\
r_X \otimes id_Y &= (id_X \otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y}.
\end{aligned}$$

Em relação a nomenclaturas, observamos que:

Observação 2.2 *O funtor $\otimes$ é denominado produto tensorial, muito embora nem sempre seja um produto tensorial ordinário. Os isomorfimos naturais a e l, r são chamados respectivamente de associatividade e unidade. E para $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $a_{X,Y,Z}$ e l_X, r_X são chamados de isomorfismos de associatividade e de unidade, respectivamente.*

Observação 2.3 *Uma categoria monoidal é representada por $\mathcal{C}$ quando o funtor produto tensorial, o objeto unidade e os isomorfismos naturais de associatividade e unidade estão subentendidos.*

Ainda, para elucidar um pouco mais as propriedades que temos nessa definição, notamos que:

Observação 2.4 *Note que se $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $g : Y \to Z$ e $g' : Y' \to Z'$*

morfismos em $\mathcal{C}$, temos:

$$gf \otimes g'f' = (g \otimes g')(f \otimes f'),$$

e se tomarmos $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ isomorfismos em $\mathcal{C}$, então existem $f^{-1} : Y \to X$ e $g^{-1} : Y' \to X'$ e vale que:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \otimes g^{-1})(f \otimes g) &= f^{-1}f \otimes g^{-1}g &= id_X \otimes id_{X'} \\ &= \otimes(id_X, id_{X'}) &= \otimes(id_{(X,X')}) \\ &= id_{\otimes(X,X')} &= id_{X\otimes X'}.\end{aligned}$$

E ainda, $(f \otimes g)(f^{-1} \otimes g^{-1}) = id_{Y\otimes Y'}$. Logo, $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Observação 2.5 *Como $id_X \otimes g'f' = (id_X \otimes g')(id_X \otimes f')$. Então, para $X,\ Y\ \in \mathcal{C}$, podemos considerar os funtores:*

- *$X \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tais que $(X \otimes -)(Z) = X \otimes Z$ e $(X \otimes -)(f) = id_X \otimes f$, para todo $Z \in \mathcal{C}$ e f morfismo em $\mathcal{C}$;*

- *$- \otimes Y : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tais que $(- \otimes Y)(Z) = Z \otimes Y$ e $(- \otimes Y)(f) = f \otimes id_Y$, para todo $Z \in \mathcal{C}$ e f morfismo em $\mathcal{C}$.*

Com isso, temos que se $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal, então a categoria oposta $(\mathcal{C}^{op}, \otimes, \mathbf{1}, a^{-1}, l^{-1}, r^{-1})$ também é uma categoria monoidal. Uma outra categoria monoidal associada a $\mathcal{C}$ é a categoria reversa, definida abaixo.

Definição 2.6 *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A categoria reversa a $\mathcal{C}$ é a categoria monoidal $(\mathcal{C}^{rev}, \otimes^{rev}, \mathbf{1}^{rev}, a^{rev}, l^{rev}, r^{rev})$ em que:*
(i) $\mathcal{C}^{rev} = \mathcal{C}$;
(ii) $\otimes^{rev} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é o funtor definido por*

$$X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X \quad e \quad f \otimes^{rev} g = g \otimes f,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e f, g morfismos em $\mathcal{C}$;
(iii) $\mathbf{1}^{rev} = \mathbf{1}$;
(iv) $a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$, $l^{rev}_X = r_X$ *e* $r^{rev}_X = l_X$, *para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.*

Abaixo trazemos alguns exemplos de categoria monoidal.

Exemplo 2.7 *<u>Set</u>. Considere a sêxtupla $(Set, \times, \{*\}, a, l, r)$, em que $\times : Set \times Set \to Set$ é o produto cartesiano, $\{*\}$ é qualquer conjunto unitário e, para X, Y, Z conjuntos, temos* *os isomorfismos naturais:*

$$\begin{array}{rrcl} a_{X,Y,Z}: & (X \times Y) \times Z & \to & X \times (Y \times Z), \\ & ((x,y),z) & \mapsto & (x,(y,z)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} l_X: & \{*\} \times X & \to & X \\ & (*,x) & \mapsto & x \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rrcl} r_X: & X \times \{*\} & \to & X \\ & (x,*) & \mapsto & x \end{array}$$

e é fácil ver que satisfazem os axiomas do pentágono e do triângulo, e portanto $(Set, \times, \{*\}, a, l, r)$ *é uma categoria monoidal.*

Exemplo 2.8 *$\underline{Vect_k}$. Considere a sêxtupla $(Vect_k, \otimes_k, k, a, l, r)$, em que k é um corpo, $\otimes_k : Vect_k \times Vect_k \to Vect_k$ é o produto tensorial sobre k e, para X, Y, Z conjuntos, temos os isomorfismos naturais:*

$$\begin{array}{rrcl} a_{X,Y,Z}: & (X \otimes Y) \otimes Z & \to & X \otimes (Y \otimes Z), \\ & (x \otimes y) \otimes z & \mapsto & x \otimes (y \otimes z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} l_X: & k \otimes X & \to & X \\ & 1 \otimes x & \mapsto & x \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rrcl} r_X: & X \otimes k & \to & X \\ & x \otimes 1 & \mapsto & x \end{array}$$

então $(Vect_k, \otimes_k, k, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

Exemplo 2.9 *$\underline{\mathcal{C}(G,\omega)}$. Sejam k um corpo, G um grupo e ω um 3-cociclo, ou seja, $\omega : G \times G \times G \to k \setminus \{0\} = k^\times$, é uma função tal que, para quaisquer $a, b, c, d \in G$,*

$$\omega(a,b,c)\omega(a,bc,d)\omega(b,c,d) = \omega(ab,c,d)\omega(a,b,cd).$$

A categoria $\mathcal{C}(G,\omega)$ é dada por objetos sendo k-espaços vetoriais G-graduados ($X \in \mathcal{C}(G,\omega)$ se X é um k-espaço vetorial e $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$, em que X_g são k-subespaços de X) e morfismos $f : X \to Y$ sendo transformações k-lineares tais que $f(X_g) \subseteq Y_g$, para todo $g \in G$, em que $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$ e $Y = \bigoplus_{g \in G} Y_g \in \mathcal{C}(G,\omega)$.

Ainda, dados $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$ e $Y = \bigoplus_{g \in G} Y_g \in \mathcal{C}(G,\omega)$, temos que $X \otimes Y \in \mathcal{C}(G,\omega)$ com graduação $X \otimes Y = \bigoplus_{g \in G} (X \otimes Y)_g$, em que $(X \otimes Y)_g = \bigoplus_{ab=g} X_a \otimes Y_b$.

O objeto $\mathbf{1} \in \mathcal{C}(G,\omega)$ é o corpo k com graduação $k = \bigoplus_{g \in G} \delta_{1,g} k$, em que $\delta_{1,g}$ é o delta de Kronecker e $\otimes = \otimes_k$.

Por fim, sejam $X, Y, Z \in \mathcal{C}(G,\omega)$. Para quaisquer $a, b, c \in G$, $x \in X_a, y \in Y_b$ e

$z \in Z_c$, *consideramos as seguintes transformações k-lineares*

$$\begin{array}{rccl} a_{X,Y,Z}: & (X \otimes Y) \otimes Z & \to & X \otimes (Y \otimes Z), \\ & (x \otimes y) \otimes z & \mapsto & \omega(a,b,c)x \otimes (y \otimes z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} l_X: & k \otimes X & \to & X \\ & 1 \otimes x & \mapsto & \omega(1,1,a)^{-1}x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccl} r_X: & X \otimes k & \to & X. \\ & x \otimes 1 & \mapsto & \omega(a,1,1)x \end{array}$$

Então $(\mathcal{C}(G,\omega), \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ *é uma categoria monoidal.*

Os resultados que veremos a seguir, embora apresentados aqui, são de grande importância na demonstração do Teorema principal deste trabalho. Por se tratarem de resultados básicos, apresentaremos a demonstração dos mais importantes e indicaremos os demais.

Proposição 2.10 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria monoidal e* $f, g : X \to Y$ *morfismos em* $\mathcal{C}$ *tais que* $Id_{\mathbf{1}} \otimes f = Id_{\mathbf{1}} \otimes g$. *Então* $f = g$.

Demonstração: Note que, pela naturalidade de l, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, shift right, "Id_{\mathbf{1}}\otimes g"'] \arrow[d, shift left, "Id_{\mathbf{1}}\otimes f"] & X \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ \mathbf{1} \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

ou seja, $fl_X = l_Y(Id_{\mathbf{1}} \otimes f) = l_Y(Id_{\mathbf{1}} \otimes g) = gl_X$.

Logo, $fl_X = gl_X$, e como l_X é um isomorfismo, temos que $f = g$. Do mesmo modo, $f \otimes Id_{\mathbf{1}} = g \otimes Id_{\mathbf{1}}$ o que implica $f = g$. ■

Proposição 2.11 *Sejam* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ *uma categoria monoidal e* $X, Y \in \mathcal{C}$. *Então os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes Id_Y"'] & & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X\otimes Y}"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{X\otimes Y}"'] & & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "Id_X \otimes r_Y"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd}$$

Demonstração: Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes X)\otimes Y \arrow[rrrr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\otimes Id_Y"] \arrow[drr, "(r_{\mathbf{1}}\otimes Id_X)\otimes Id_Y"'] \arrow[dd, "a_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},X,Y}"] & & \arrow[d, phantom, "(1)"] & & (\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X))\otimes Y \arrow[dll, "(Id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)\otimes Id_Y"] \arrow[dd, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}"] \\
\arrow[rr, phantom, "(2)"] & & (\mathbf{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[d, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[rr, phantom, "(3)"] & & \\
(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes(X\otimes Y) \arrow[rr, "r_{\mathbf{1}}\otimes Id_{X\otimes Y}"'] \arrow[drr, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X\oplus Y}"'] & \arrow[d, phantom, "(4)"] & \mathbf{1}\otimes(X\otimes Y) & \arrow[d, phantom, "(*)"] & \mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes X)\otimes Y) \arrow[ll, "Id_{\mathbf{1}}\otimes(l_X\otimes Id_Y)"] \arrow[dll, "Id_{\mathbf{1}}\otimes a_{\mathbf{1},X,Y}"] \\
& & \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes(X\otimes Y)) \arrow[u, "Id_{\mathbf{1}}\otimes l_{X\otimes Y}"] & \arrow[r, phantom, "(5)"] &
\end{tikzcd}$$

em que (5) é o diagrama formado pelas flechas da borda.

A comutatividade do diagrama (1) é dada pelo axioma do triângulo para $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ e X, (2) e (3) da naturalidade de a para os objetos $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, X, Y e $\mathbf{1}$, X, Y respectivamente, (4) do axioma do triângulo para $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ e $X\otimes Y$ e (5) do axioma do pentágono para $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, X e Y.

Assim, é fácil ver que $(*)$ é comutativo, e como $a_{\mathbf{1},\mathbf{1}\otimes X,Y}$ e $a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\otimes Id_Y$ são isomorfismos, segue que $Id_{\mathbf{1}}\otimes(l_X\otimes Id_Y) = (Id_{\mathbf{1}}\otimes l_{X\otimes Y})(Id_{\mathbf{1}}\otimes a_{\mathbf{1},X,Y})$, ou seja, tem-se que $Id_{\mathbf{1}}\otimes(l_X\otimes Id_Y) = Id_{\mathbf{1}}\otimes l_{X\otimes Y}a_{\mathbf{1},X,Y}$, e daí, pela Proposição 2.10, segue que $l_X\otimes Id_Y = l_{X\otimes Y}a_{\mathbf{1},X,Y}$. Logo, o primeiro diagrama comuta. Já a comutatividade do segundo diagrama segue da comutatividade do primeiro diagrama para $\mathcal{C}^{rev}$. ■

Para os próximos dois resultados, indicamos [1] para a demonstração.

Proposição 2.12 *Seja* $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1},a,l,r)$ *uma categoria monoidal. Então*

(i) $l_{\mathbf{1}\otimes X} = Id_{\mathbf{1}}\otimes l_X$, *para todo* $X\in\mathcal{C}$;

(ii) $r_{X\otimes\mathbf{1}} = r_X\otimes Id_{\mathbf{1}}$, *para todo* $X\in\mathcal{C}$;

(iii) $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

□

Podemos verificar também que o objeto unidade é único, a menos de isomorfismo. Mais especificamente, para ternas $(\mathbf{1},l,r)$ e $(\mathbf{1}',l',r')$, existe um único isomorfismo ι que respeita os isomorfismos de unidade. O resultado é dado pela seguinte proposição.

Proposição 2.13 *Sejam* $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1},a,l,r)$, $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1}',a,l',r')$ *categorias monoidais e* $X\in\mathcal{C}$. *Então existe um único isomorfismo* $\iota:\mathbf{1}\to\mathbf{1}'$ *tal que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
(1 \otimes X) \arrow[rr, "\iota \otimes Id_X"] \arrow[dr, "l_X"'] & & 1' \otimes X \arrow[dl, "l'_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes 1 \arrow[rr, "Id_X \otimes \iota"] \arrow[dr, "r_X"'] & & X \otimes 1' \arrow[dl, "r'_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

comutam. Tal isomorfismo é único com a propriedade do primeiro ou segundo diagramas comutarem.

$\square$

Como categorias monoidais possuem propriedades adicionais, podemos definir os funtores que preservam tais propriedades.

Definição 2.14 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias monoidais. Um funtor monoidal entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma terna (F, ζ, ϕ), em que:*
(i) *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor;*
(ii) *$\zeta : \otimes \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural, isto é, dados $X, Y \in \mathcal{C}$, temos $\zeta_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$;*
(iii) *$\phi : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$;*
e além disso, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd}
& (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[dl, "\zeta_{X,Y} \otimes Id_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"] & \\
F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "\zeta_{X \otimes Y, Z}"'] & & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[d, "Id_{F(X)} \otimes \zeta_{Y,Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[dl, "\zeta_{X, Y \otimes Z}"] \\
& F(X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "\phi \otimes Id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(\mathbf{1}) \otimes F(X) \arrow[r, "\zeta_{\mathbf{1},X}"'] & F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "Id_{F(X)} \otimes \phi"'] & F(X) \\
F(X) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "\zeta_{X,\mathbf{1}}"'] & F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

Observação 2.15 *Dados $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ morfismos em $\mathcal{C}$, o diagrama de naturalidade de ζ é*

$$\begin{tikzcd} F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\zeta_{X,Y}"] \arrow[d, "F(f)\otimes F(g)"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\ F(X')\otimes F(Y') \arrow[r, "\zeta_{X',Y'}"'] & F(X'\otimes Y'). \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.16 *Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A terna $(Id_{\mathcal{C}}, \zeta^{Id_{\mathcal{C}}}, \phi^{Id_{\mathcal{C}}})$ é um funtor monoidal, em que $\zeta^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$, para $X, Y \in \mathcal{C}$ e $\phi^{Id_{\mathcal{C}}} = Id_{\mathbf{1}}$.*

Definição 2.17 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias monoidais, e funtores monoidais $(F, \zeta^F, \phi^F) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. A composição de (G, ζ^G, ϕ^G) e (F, ζ^F, ϕ^F) é dada pela terna $(G \circ F, \zeta^{G\circ F}, \phi^{G\circ F})$, em que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, as composições $\zeta^{G\circ F}_{X,Y}$ e $\phi^{G\circ F}$ são dadas por:*

$$\begin{tikzcd} G(F(X))\otimes G(F(Y)) \arrow[rr, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y}"] \arrow[dr, "\zeta^G_{F(X),F(Y)}"'] & & G(F(X\otimes Y)) \\ & G(F(X)\otimes F(Y)) \arrow[ur, "G(\zeta^F_{X,Y})"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[rr, "\phi^{G\circ F}"] \arrow[dr, "\phi^G"'] & & G(F(\mathbf{1})) \\ & G(\mathbf{1}) \arrow[ur, "G(\phi^F)"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\zeta^{G\circ F}_{X,Y} = G(\zeta^F_{X,Y})\zeta^G_{F(X),F(Y)} \quad e \quad \phi^{G\circ F} = G(\phi^F)\phi^G.$$

Proposição 2.18 *A composição de funtores monoidais é um funtor monoidal.*

Demonstração: Claramente valem os itens (i), (ii) e (iii) da Definição 2.14, restando provarmos a comutatividade dos diagramas dados na definição, ou seja,

$$
\begin{tikzcd}
 & (G\circ F(X)\otimes G\circ F(Y))\otimes G\circ F(Z) \arrow[dl, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y}\otimes Id_{G\circ F(Z)}"'] \arrow[dr, "a_{G\circ F(X),G\circ F(Y),G\circ F(Z)}"] & \\
G\circ F(X\otimes Y)\otimes G\circ F(Z) \arrow[d, "\zeta^{G\circ F}_{X\otimes Y,Z}"'] & & G\circ F(X)\otimes (G\circ F(Y)\otimes G\circ F(Z)) \arrow[d, "Id_{G\circ F(X)}\otimes\zeta^{G\circ F}_{Y,Z}"] \\
G\circ F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dr, "G\circ F(a_{X,Y,Z})"'] & & G\circ F(X)\otimes G\circ F(Y\otimes Z) \arrow[dl, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & G\circ F(X\otimes (Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes G\circ F(X) \arrow[r, "l_{G\circ F(X)}"] \arrow[d, "\phi^{G\circ F}\otimes Id_{G\circ F(X)}"] & G\circ F(X) \\
G\circ F(\mathbf{1})\otimes G\circ F(X) \arrow[r, "\zeta^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}"'] & G\circ F(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[u, "G\circ F(l_X)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G\circ F(X)\otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{G\circ F(X)}"] \arrow[d, "Id_{G\circ F(X)}\otimes\phi^{G\circ F}"] & G\circ F(X) \\
G\circ F(X)\otimes G\circ F(\mathbf{1}) \arrow[r, "\zeta_{X,\mathbf{1}}"'] & G\circ F(X\otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "G\circ F(r_X)"]
\end{tikzcd}
$$

são comutativos, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. De fato, como F e G são funtores monoidais, e utilizando a definição de $\zeta^{G\circ F}$, o diagrama do hexágono se torna

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (G(F(X)) \otimes G(F(Y))) \otimes G(F(Z)) \arrow[rrr, "a_{G(F(X)),G(F(Y)),G(F(Z))}"] \arrow[dl, "\zeta^{G}_{F(X),F(Y)} \oplus Id_{G\circ F(Z)}"'] \arrow[ddll, bend right, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y} \oplus Id_{G\circ F(Z)}"'] & & & G(F(X)) \otimes (G(F(Y)) \otimes G(F(Z))) \arrow[dr, "Id_{G\circ F(X)} \oplus \zeta^{G}_{F(Y),F(Z)}"] \arrow[ddrr, bend left, "Id_{G\circ F(X)} \oplus \zeta^{G\circ F}_{Y,Z}"] & & \\
 & G(F(X) \otimes F(Y)) \otimes G(F(Z)) \arrow[dl, "G(\zeta^{F}_{X,Y}) \oplus Id_{G\circ F(Z)}"'] \arrow[dr, "\zeta^{G}_{F(X)\oplus F(Y),F(Z)}"] & & (2) & & & G(F(X)) \otimes G(F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[dl, "\zeta^{G}_{F(X),F(Y)\oplus F(Z)}"'] \arrow[dr, "Id_{G\circ F(X)} \oplus G(\zeta^{F}_{Y,Z})"] & \\
G(F(X \otimes Y)) \otimes G(F(Z)) \arrow[dr, "\zeta^{G}_{F(X\oplus Y),F(Z)}"'] \arrow[ddrr, bend right, "\zeta^{G\circ F}_{X\otimes Y,Z}"'] & (4) & G((F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z)) \arrow[rrr, "G(a_{F(X),F(Y),F(Z)})"] \arrow[dl, "G(\zeta^{F}_{X,Y} \oplus Id_{F(Z)})"] & & & G(F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z))) \arrow[dr, "G(Id_{F(X)} \oplus \zeta^{F}_{Y,Z})"'] & (1) & G(F(X)) \otimes G(F(Y \otimes Z)) \arrow[dl, "\zeta^{G}_{F(X),F(Y\oplus Z)}"] \arrow[ddll, bend left, "\zeta^{G\circ F}_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & G(F(X \otimes Y) \otimes F(Z)) \arrow[dr, "G(\zeta^{F}_{X\oplus Y,Z})"'] & & (3) & & & G(F(X) \otimes F(Y \otimes Z)) \arrow[dl, "G(\zeta^{F}_{X,Y\oplus Z})"] & \\
 & & G(F((X \otimes Y) \otimes Z)) \arrow[rrr, "G\circ F(a_{X,Y,Z})"'] & & & G(F(X \otimes (Y \otimes Z))) & &
\end{tikzcd}
$$

que é comutativo, visto que (1) e (4) o são, pela naturalidade de ζ^g, (2) comuta pois G é um funtor monoidal e (3) pois F é funtor monoidal e G funtor. Da mesma forma, utilizando a definição de $\phi^{G\circ F}$ e $l_{G\circ F(X)}$, o primeiro diagrama do quadrado se torna

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes G(F(X)) \arrow[rr, "l_{G\circ F(X)}"] \arrow[d, "\phi^G\otimes Id_{G(F(X))}"] \arrow[dd, bend right=60, "\phi^{G\circ F}\otimes Id_{G(F(X))}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & & G(F(X)) \\
G(\mathbf{1})\otimes G(F(X)) \arrow[r, "\zeta^G_{\mathbf{1},F(X)}"] \arrow[d, "G(\phi^F)\otimes Id_{G(F(X))}"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & G(\mathbf{1}\otimes F(X)) \arrow[ur, "G(l_{F(X)})"] \arrow[d, "G(\phi^F\otimes Id_{F(X)})"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \\
G(F(\mathbf{1}))\otimes G(F(X)) \arrow[r, "\zeta^G_{F(\mathbf{1}),F(X)}"'] \arrow[rr, bend right=30, "\zeta^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}"'] & G(F(\mathbf{1})\otimes F(X)) \arrow[r, "G(\zeta^F_{\mathbf{1},X})"'] & G(F(\mathbf{1}\otimes X)) \arrow[uu, "G(F(l_X))"']
\end{tikzcd}$$

em que (1) é comutativo pois G é funtor monoidal, (2) pois F é funtor monoidal e G é funtor, e (3) comuta por conta do axioma de naturalidade de ζ^G. Portanto, o diagrama formado pelas flechas de fora é comutativo. Analogamente, provamos que $r_{G\circ F(X)}$ é comutativo e portanto, a composição de funtores monoidais é um funtor monoidal. ■

Definição 2.19 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias monoidais e (F, ζ^F, ϕ^F), $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores monoidais. Uma transformação natural monoidal entre (F, ζ^F, ϕ^F) e (G, ζ^G, ϕ^G) é uma transformação natural $\mu : F \to G$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\mu_X\otimes\mu_Y"] \arrow[d, "\zeta^F_{X,Y}"'] & G(X)\otimes G(Y) \arrow[d, "\zeta^G_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\mu_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[dl, "\phi^F"'] \arrow[dr, "\phi^G"] & \\
F(\mathbf{1}) \arrow[rr, "\mu_{\mathbf{1}}"'] & & G(\mathbf{1})
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\zeta^G_{X,Y}(\mu_X \otimes \mu_Y) = \mu_{X\otimes Y}\zeta^F_{X,Y} \quad e \quad \phi^G = \mu_{\mathbf{1}}\phi^F.$$

Um *isomorfismo natural monoidal* é uma transformação natural monoidal que é um isomorfismo natural. Ainda, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditos monoidalmente equivalentes se existem funtores monoidais $(F, \zeta^F, \phi^F) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $(G, \zeta^G, \phi^G) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais monoidais $\mu : G \circ F \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\nu : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$.

3 Mac Lane's Strictness Theorem

No capítulo anterior, introduzimos a noção de categoria monoidal, e apresentamos definições e resultados pertinentes a este trabalho. Agora, nos dedicaremos a definir uma categoria monoidal estrita e demonstrar que toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.

Este teorema garante que muitos problemas e propriedades de categorias monoidais podem ser reduzidos ao caso em que tais categorias são estritas, cujas estruturas monoidais são mais simples.

Definição 3.1 *Uma categoria monoidal estrita é uma terna* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$*, em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor e* $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ *tal que, para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z), \ \mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$$

e as transformações naturais a, l *e* r *são as respectivas transformações naturais identidade.*

Exemplo 3.2 Dada uma categoria qualquer $\mathcal{C}$, podemos construir a categoria $End(\mathcal{C}) = Fun(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, cujos objetos são os funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e $Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{C})}(F, G) = Nat(F, G)$. O morfismo identidade do funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é a transformação natural $Id_F : F \to F$. A composição é dada pela composição vertical de transformações naturais. É fácil ver que $(End(\mathcal{C}), \otimes, Id_{\mathcal{C}})$ é uma categoria monoidal estrita, em que $\otimes : End(\mathcal{C}) \times End(\mathcal{C}) \to End(\mathcal{C})$ é definido por

$$\otimes(G, F) = G \circ F \quad \text{e} \quad \otimes(\beta, \alpha) = \beta * \alpha,$$

para quaisquer $F, G \in End(\mathcal{C})$ e β, α transformações naturais.

3.1 Construção de uma categoria monoidal estrita

Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. A ela podemos associar uma categoria monoidal estrita, denotada por $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e definida pelo que segue:

(i) Objetos: são pares (F, c), em que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor e $c : \otimes \circ (F \times Id_{\mathcal{C}}) \to F \circ \otimes$ é um isomorfismo natural, ou seja, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$c_{X,Y} : F(X) \otimes Y \to F(X \otimes Y),$$

e de forma que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, os diagramas abaixo comutam,

$$\begin{tikzcd}
 & & (F(X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[dll, "c_{X,Y}\otimes id_Z"'] \arrow[drr, "a_{F(X),Y,Z}"] & & \\
F(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[dr, "c_{X\otimes Y,Z}"'] & & & & F(X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dl, "c_{X,Y\otimes Z}"] \\
 & F((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[rr, "F(a_{X,Y,Z})"'] & & F(X\otimes(Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{F(X)}"] \arrow[dr, "c_{X,\mathbf{1}}"'] & & F(X) \\
 & F(X\otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "F(r_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
c_{X,Y\otimes Z}a_{F(X),Y,Z} &= F(a_{X,Y,Z})c_{X\otimes Y,Z}(c_{X,Y}\otimes Id_Z) \\
\text{e}\;\; r_{F(X)} &= F(r_X)c_{X,\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

(ii) Morfismos: para $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, um morfismo de (F, c^F) em (G, c^G) é uma transformação natural $\alpha : F \to G$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes Y \arrow[r, "\alpha_X\otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^F_{X,Y}"'] & G(X)\otimes Y \arrow[d, "c^G_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\alpha_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

(iii) Morfismo identidade: para cada $(F, c) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, o morfismo identidade é a transformação natural $Id_F : F \to F$.

(iv) Composição de morfismos: é a composição vertical de transformações naturais.

Note que a composição está bem definida. De fato, dados (F, c^F), (G, c^G), $(H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\alpha : F \to G,\ \beta : G \to H$ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, então para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes Y \arrow[r, "\alpha_X\otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^F_{X,Y}"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta\circ\alpha)_X\otimes Id_Y"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & G(X)\otimes Y \arrow[r, "\beta_X\otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^G_{X,Y}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H(X)\otimes Y \arrow[d, "c^H_{X,Y}"] \\
F(X\otimes Y) \arrow[r, "\alpha_{X\otimes Y}"'] \arrow[rr, bend right, "(\beta\circ\alpha)_{X\otimes Y}"'] & G(X\otimes Y) \arrow[r, "\beta_{X\otimes Y}"'] & H(X\otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, visto que (1) e (2) o são (β e α são morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$). E assim, $\beta\circ\alpha : F\to H$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

O produto tensorial em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, é definido por:

$$\begin{array}{rccl}
\otimes: & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\times End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) & \to & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \\
 & ((G,c^G),(F,c^F)) & \mapsto & \otimes((G,c^G),(F,c^F)) = (G,c^G)\otimes(F,c^F) = (G\circ F, c^{G\circ F}), \\
 & (\beta,\alpha) & \mapsto & \otimes(\beta,\alpha) = \beta\otimes\alpha = \beta*\alpha
\end{array}$$

para quaisquer $(G,c^G)\otimes(F,c^F)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e β,α morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Ainda, para quaisquer $X,Y\in\mathcal{C}$, $c^{G\circ F}_{X,Y}$, é definido pela composição

$$\begin{tikzcd}
G(F(X))\otimes Y \arrow[rr, "c^{G\circ F}_{X,Y}"] \arrow[dr, "c^G_{F(X),Y}"'] & & G(F(X\otimes Y)) \\
 & G(F(X)\otimes Y) \arrow[ur, "G(c^F_{X,Y})"'] &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$c^{G\circ F}_{X,Y} = G(c^F_{X,Y})c^G_{F(X),Y}.$$

Devemos mostrar que $\otimes$ é de fato um funtor. De fato, basta ver que $\otimes$ está bem definido, pois é fácil ver que $\otimes(Id_{((G,c^G),(F,c^F))}) = Id_{\otimes((G,c^G),(F,c^F))}$ e $\otimes((\beta,\beta')\circ(\alpha,\alpha')) = \otimes(\beta,\beta')\circ\otimes(\alpha,\alpha')$, para quaisquer $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Para vermos que $\times$ está bem definido, mostraremos que $(G\circ F, c^{G\circ F})\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\beta*\alpha$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para quaisquer $(F,c^F),(G,c^G)\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e α,β morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Já vimos que $G\circ F$ é funtor monoidal e ainda, e $c^{G\circ F}$ é um isomorfismo natural. Resta vermos que vale a comutatividade dos diagramas dados na definição dos objetos de $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. De fato, para quaisquer X, Y e $Z \in \mathcal{C}$, temos que:

$$\begin{tikzcd}
 & & (G(F(X)) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dll, "c^{G\circ F}_{X,Y} \otimes Id_Z"'] \arrow[d, "c^G_{F(X),Y} \otimes Id_Z"] \arrow[drr, "a_{G(F(X)),Y,Z}"] \arrow[drr, phantom, shift right=10ex, "(3)"] & & \\
G(F(X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "c^G_{F(X \otimes Y),Z}"] \arrow[dd, bend right=40, "c^{G\circ F}_{X \otimes Y,Z}"'] \arrow[drr, phantom, "(1)"] & & G(F(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[ll, "G(c^F_{X,Y}) \otimes Id_Z"'] \arrow[d, "c^G_{F(X) \otimes Y,Z}"] & & G(F(X)) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "c^G_{F(X),Y \otimes Z}"'] \arrow[dd, bend left=40, "c^{G\circ F}_{X,Y \otimes Z}"] \\
G(F(X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "G(c^F_{X \otimes Y,Z})"] & & G(F(X) \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[ll, "G(c^F_{X,Y} \otimes Id_Z)"'] \arrow[rr, "G(a_{F(X),Y,Z})"'] \arrow[d, phantom, "(2)"] & & G(F(X) \otimes Y) \otimes Z)) \arrow[d, "G(c^F_{X,Y \otimes Z})"'] \\
G(F((X \otimes Y) \otimes Z)) \arrow[rrrr, "G(F(a_{X,Y,Z}))"'] & & {} & & G(F(X \otimes (Y \otimes Z)))
\end{tikzcd}$$

em que os triângulos são válidos pela composição, (1) vale pela naturalidade de c^G e (2) e (3) são respectivamente o axioma do pentágono para c^F e c^G, logo, vale a comutatividade do diagrama e $c^{G\circ F}_{X,Y\otimes Z} a_{(G\circ F)(X),Y,Z} = (G \circ F)(a_{X,Y,Z}) c^{G\circ F}_{X \otimes Y,Z}(c^{G\circ F}_{X,Y} \otimes id_Z)$. E também,

$$\begin{tikzcd}
G \circ F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{G(F(X))}"] \arrow[dr, "c^G_{F(X),\mathbf{1}}"] \arrow[ddr, "c^{G\circ F}_{X,\mathbf{1}}"'] & {} \arrow[d, phantom, "(3)"] & G \circ F(X) \\
{} & G(F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[ur, "G(r_{F(X)})"] \arrow[d, "G(c^F_{X,\mathbf{1}})"] \arrow[l, phantom, "(1)"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & {} \\
 & G(F(X \otimes \mathbf{1})) \arrow[uur, "G(F(r_X))"'] &
\end{tikzcd}$$

em que (1) é a definição de $c^{G\circ F}$, (2) e (3) valem pois (F, c^F), (G, c^G) $\in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ respectivamente, ou seja, $r_{(G\circ F)(X)} = (G \circ F)(r_X) c^{G\circ F}_{X,\mathbf{1}}$.

Mostremos agora que $\beta * \alpha$ é morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. De fato, sejam (F, c^F), (G, c^G),

(J, c^J), $(H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, $\alpha : F \to G$ e $\beta : J \to H$ morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, temos que:

$$\begin{tikzcd}
J(F(X)) \otimes Y \arrow[r, "\beta_{F(X)} \otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^J_{F(X),Y}"] \arrow[rr, bend left=30, "(\beta * \alpha)_X \otimes Id_Y"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "(1)"] \arrow[dd, bend right=50, "c^{J \circ F}_{X,Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & H(F(X)) \otimes Y \arrow[r, "H(\alpha_X) \otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^H_{F(X),Y}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H(G(X)) \otimes Y \arrow[d, "c^H_{G(X),Y}"] \arrow[dd, bend left=50, "c^{H \circ G}_{X,Y}"] \\
J(F(X) \otimes Y) \arrow[r, "\beta_{F(X) \otimes Y}"'] \arrow[d, "J(c^F_{X,Y})"] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & H(F(X) \otimes Y) \arrow[r, "H(\alpha_X \otimes Id_Y)"'] \arrow[d, "H(c^F_{X,Y})"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & H(G(X) \otimes Y) \arrow[d, "H(c^G_{X,Y})"] \\
J(F(X \otimes Y)) \arrow[r, "\beta_{F(X \otimes Y)}"'] \arrow[rr, bend right=30, "(\beta * \alpha)_{X \otimes Y}"'] & H(F(X \otimes Y)) \arrow[r, "H(\alpha_{X \otimes Y})"'] & H(G(X \otimes Y))
\end{tikzcd}$$

em que (1) vem do fato que $(\beta * \alpha)_X = H(\alpha_X)\beta_{F(X)}$, (2) vale por causa da naturalidade de C^H, (3) por $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, (4) pois $\beta \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e (5) vem da naturalidade de β, logo, o diagrama de fora é comutativo e vale que $c^{H \circ G}_{X,Y}((\beta * \alpha)_X \otimes id_Y) = (\beta * \alpha)_{X \otimes Y} c^{J \circ F}_{X,Y}$.

No par $(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}})$, consideramos $c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. E é claro que $(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Lema 3.3 $(End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}), \otimes, (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}))$ *como definida anteriormente, é uma categoria monoidal estrita.*

Demonstração: Sejam $(F, c^F), (G, c^G), (H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Devemos mostrar que:

$$((H, c^H) \otimes (G, c^G)) \otimes (F, c^F) = (H, c^H) \otimes ((G, c^G) \otimes (F, c^F))$$

$$(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes (F, c^F) = (F, c^F) = (F, c^F) \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}).$$

O que, pela definição de $\otimes$, significa provar que:

$$((H \circ G) \circ F, c^{(H \circ G) \circ F}) = (H \circ (G \circ F), c^{H \circ (G \circ F)})$$

$$(Id_{\mathcal{C}} \circ F, c^{Id_{\mathcal{C}} \circ F}) = (F, c^F) = (F \circ Id_{\mathcal{C}}, c^{F \circ Id_{\mathcal{C}}}).$$

Sabemos que $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ e $Id_{\mathcal{C}} \circ F = F = F \circ Id_{\mathcal{C}}$. Provemos então que $c^{(H \circ G) \circ F} = c^{H \circ (G \circ F)}$ e $c^{Id_{\mathcal{C}} \circ F} = c^F = c^{F \circ Id_{\mathcal{C}}}$. Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, como $c^{(H \circ G) \circ F} := H \circ G(c^F_{X,Y}) \circ c^{H \circ G}_{F(X),Y}$ e $c^{H \circ (G \circ F)} := H(c^{G \circ F}_{X,Y}) \circ c^H_{G(F(X)),Y}$, temos que:

$$\begin{tikzcd}
H(G(F(X))) \otimes Y \arrow[r, "c^{H \circ G}_{F(X),Y}"] \arrow[dr, "c^H_{G(F(X)),Y}"'] & H(G(F(X) \otimes Y)) \arrow[r, "H \circ G(c^F_{X,Y})"] & H(G(F(X \otimes Y))) \\
 & H(G(F(X)) \otimes Y) \arrow[u, "H(c^G_{F(X),Y})"'] \arrow[ur, "H(c^{G \circ F}_{X,Y})"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, uma vez que os triângulos são comutativos pela definição de $c^{H \circ F}$ e $H(c^{G \circ F})$. Da mesma forma, como $c^{Id_{\mathcal{C}} \circ F}_{X,Y} := Id_{\mathcal{C}}(c^F_{X,Y})$ e $c^{F \circ Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y} := F(c^{Id_{\mathcal{C}}} c^F_{Id_{\mathcal{C}}(X),Y} = F(Id_{X \otimes Y} c^F_{Id_{\mathcal{C}}(X),Y}$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[dr, "F(c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y}) = F(Id_{X \otimes Y})"'] & F(X) \otimes Y \arrow[l, "c^F_{X,Y}"'] \arrow[r, "c^{Id_{\mathcal{C}}}_{F(X),Y} = Id_{F(X) \otimes Y}"] \arrow[d, "c^F_{X,Y}"] & F(X) \otimes Y \arrow[dl, "Id_{\mathcal{C}}(c^F_{X,Y}) = c^F_{X,Y}"] \\
 & F(X \otimes Y) &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e vale que $c^{Id_{\mathcal{C}} \circ F} = c^F = c^{F \circ Id_{\mathcal{C}}}$.

Portanto, $(End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}), \otimes, (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}))$ é uma categoria monoidal estrita. $\blacksquare$

3.2 Teorema de Mac Lane

A partir de agora, nos dedicaremos a mostrar que existe uma relação de equivalência entre uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e sua respectiva categoria monoidal estrita $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Teorema 3.4 *Toda categoria monoidal é monoidalmente equivalente a uma categoria monoidal estrita.*

Demonstração: Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ a categoria monoidal estrita definida no Lema 3.3. Temos de mostrar que existem funtores monoidais

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{C} & \to & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \\ \mathcal{G}: & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) & \to & \mathcal{C} \end{array}$$

tais que

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathcal{G} \circ \mathcal{F} & \to & Id_{\mathcal{C}} \\ \beta: & \mathcal{F} \circ \mathcal{G} & \to & Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})} \end{array}$$

são isomorfismos naturais monoidais.

De fato, defina

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{C} & \to & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \\ & W & \to & (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \\ & g & \to & \mathcal{F}(g) : \mathcal{F}_W \to \mathcal{F}_V, \end{array}$$

para quaisquer $W \in \mathcal{C}$ e $g : W \to V$ morfismo em $\mathcal{C}$, em que $\mathcal{F}_W = W \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{F}_W(X) = W \otimes X$ e $\mathcal{F}_W(g) = id_W \otimes g$, e assim,

$$c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} : \mathcal{F}_W(X) \otimes Y = (W \otimes X) \otimes Y \to \mathcal{F}_W(X \otimes Y) = W \otimes (X \otimes Y),$$

ou seja, $c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} = a_{W,X,Y}$ e também

$$\mathcal{F}(g)_X : \mathcal{F}_W(X) = W \otimes X \to \mathcal{F}_V(X) = V \otimes X,$$

ou seja, $\mathcal{F}(g)_X = g \otimes Id_X$.

Mostremos que $\mathcal{F}$ está bem definido e é um funtor. Iniciamos provando que $\mathcal{F}$ está bem definido, ou seja, $\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para $W \in \mathcal{C}$ e g um morfismo em $\mathcal{C}$. De fato, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, note que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{F}_W(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y} \otimes Id_Z"'] \arrow[dr, "a_{\mathcal{F}_W(X),Y,Z}"] & \\
\mathcal{F}_W(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X \otimes Y, Z}"'] & & \mathcal{F}_W(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X, Y \otimes Z}"] \\
\mathcal{F}_W((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "\mathcal{F}_W(a_{X,Y,Z})"'] & & \mathcal{F}_W(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{\mathcal{F}_W(X)}"] \arrow[dr, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,\mathbf{1}}"'] & & \mathcal{F}_W(X) \\
& \mathcal{F}_W(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "\mathcal{F}_W(r_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos, pois, se usarmos a definição de $\mathcal{F}$, eles tornam-se

$$\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W,X,Y} \otimes Id_Z"'] \arrow[dr, "a_{W \otimes X, Y, Z}"] & \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W, X \otimes Y, Z}"'] & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a_{W,X,Y \otimes Z}"] \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "Id_W \otimes a_{X,Y,Z}"'] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes X) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{W \otimes X}"] \arrow[dr, "a_{W,X,\mathbf{1}}"'] & & W \otimes X \\
& W \otimes (X \otimes \mathbf{1}) \arrow[ur, "Id_W \otimes r_X"'] &
\end{tikzcd}$$

que são comutativos, pois são os respectivos axioma do pentágono para os objetos W, X, Y, Z e o segundo diagrama da Proposição 2.11. Portanto, $(\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Ainda, seja $g : W \to V$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Para mostrarmos que $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, resta vermos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W(X) \otimes Y \arrow[r, "\mathcal{F}(g)_X \otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_V(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_V}_{X,Y}"] \\
\mathcal{F}_W(X \otimes Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_V(X \otimes Y).
\end{tikzcd}$$

comuta, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, o que é verdade pois pela definição de $\mathcal{F}$, ele torna-se

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "(g \otimes Id_X) \otimes Id_Y"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}"'] & (V \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "a_{V,X,Y}"] \\
W \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "g \otimes Id_{X \otimes Y}"'] & V \otimes (X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

que é comutativo pois representa a naturalidade de a para $((g, Id_X), Id_Y)$ uma vez que $Id_{X \otimes Y} = Id_X \otimes Id_Y$. Assim, $\mathcal{F}(g)$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e segue que $\mathcal{F}$ está bem definido.

Por fim, é fácil ver que $\mathcal{F}$ é um funtor. De fato, seja $W \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{F}(Id_W) : \mathcal{F}_W \to \mathcal{F}_W$ e assim, para cada $X \in \mathcal{C}$, temos que $\mathcal{F}(id_W)_X = (id_{\mathcal{F}(W)})_X$ e portanto, $\mathcal{F}(id_W) = id_{\mathcal{F}(W)}$. Do mesmo modo, para quaisquer morfismos $g : W \to V$ e $h : V \to U$ em $\mathcal{C}$ e $X \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{F}(hg)_X = (\mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g))_X$ e portanto $\mathcal{F}(hg) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g)$.

Nosso próximo passo será definir uma estrutura monoidal para $\mathcal{F}$, ou seja, queremos estabelecer ζ e ϕ satisfazendo as condições da Definição 2.14. Definimos então:

$$\begin{array}{rccc}
\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} : & \mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{F}(W \otimes V) \\
\\
\phi^{\mathcal{F}} : & Id_{\mathcal{C}} & \to & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}.
\end{array}$$

Lembramos que, pela estrutura monoidal de $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ para $W, V \in \mathcal{C}$, temos

$$\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V) = (\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) \otimes (\mathcal{F}_V, c^{\mathcal{F}_V}) = (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V, c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V})$$

e

$$\mathcal{F}(W \otimes V) = (\mathcal{F}_{W \otimes V}, c^{\mathcal{F}_{W \otimes V}})$$

e que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$c^{\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V}_{X,Y} = (Id_W \otimes a_{V,X,Y}) a_{W,V \otimes X,Y}$$

e

$$c^{\mathcal{F}_{W \otimes V}}_{X,Y} = a_{W \otimes V,X,Y}.$$

Assim, para todo $X \in \mathcal{C}$, definimos

$$(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X : \quad (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) = W \otimes (V \otimes X) \quad \to \quad \mathcal{F}_{W \otimes V}(X) = (W \otimes V) \otimes X$$

$$\phi^{\mathcal{F}}_X : \quad X \quad \to \quad \mathbf{1} \otimes X$$

por $(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X = a^{-1}_{W,V,X}$ e $\phi^{\mathcal{F}}_X = l^{-1}_X$, respectivamente.

Provemos que $\zeta^{\mathcal{F}} : \otimes \circ (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \to \mathcal{F} \circ \otimes$ é um isomorfismo natural, ou seja, que $\zeta^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural e que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para quaisquer $W, V \in \mathcal{C}$. De fato, sejam $g : W \to W'$ e $h : V \to V'$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos que o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(g)\otimes\mathcal{F}(h)=\mathcal{F}(g)*\mathcal{F}(h)"'] & \mathcal{F}_{W \otimes V} \arrow[d, "\mathcal{F}(g\otimes h)"] \\
\mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'} \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W',V'}"'] & \mathcal{F}_{W' \otimes V'}
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Pois, como $\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h) : \mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'}$, para $X \in \mathcal{C}$, temos que $(\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h))_X = g \otimes (h \otimes Id_X)$, e assim, o diagrama acima se torna:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X}"] \arrow[d, "g\otimes(h\otimes Id_X)"'] & \mathcal{F}_{W \otimes V}(X) \arrow[d, "(g\otimes h)\otimes Id_X"] \\
(\mathcal{F}_{W'} \circ \mathcal{F}_{V'})(X) \arrow[r, "a^{-1}_{W',V',X}"'] & \mathcal{F}_{W' \otimes V'}(X)
\end{tikzcd}$$

para $X \in \mathcal{C}$, que é comutativo pela naturalidade de a^{-1} para $(g, (h, id_X))$. Portanto, $\zeta^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural.

Também é fácil mostrar que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. De fato, $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$: $\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_{W \otimes V}$ é uma transformação natural, pois, para $f : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$, o diagrama da esquerda comuta,

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X"] \arrow[d, "(\mathcal{F}_W\circ\mathcal{F}_V)(f)"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \arrow[d, "\mathcal{F}_{W\otimes V}(f)"] \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(Y) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_Y"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(Y).
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \otimes (V \otimes X) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,X}"] \arrow[d, "Id_W\otimes(Id_V\otimes f)"'] & (W \otimes V) \otimes X \arrow[d, "Id_{W\otimes V}\otimes f"] \\
W \otimes (V \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{W,V,Y}"'] & (W \otimes V) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

uma vez que, usando as definições de $\mathcal{F}$ e de $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$, o diagrama da esquerda torna-se o diagrama da direita, que por sua vez é comutativo devido à naturalidade de a^{-1} para $(Id_W, (Id_V, f))$. Assim, $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é uma transformação natural e como $(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X = a^{-1}_{W,V,X}$ é um isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$, segue que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo natural.

Finalizamos mostrando que $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, ou seja, que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X) \otimes Y \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_X\otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_W\circ\mathcal{F}_V}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}}_{X,Y}"] \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V)(X \otimes Y) \arrow[r, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{X\otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{W\otimes V}(X \otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

é comutativo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Mas, note que, pela definição de $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ e de $c^{\mathcal{F}_{W\otimes V}}_{X,Y}$ e $c^{\mathcal{F}_W\circ\mathcal{F}_V}_{X,Y}$ ($c^{\mathcal{F}_W\circ\mathcal{F}_V}_{X,Y} = (Id_W \otimes a_{V,X,Y})a_{W,V\otimes X,Y}$), o diagrama passa a ser

$$
\begin{tikzcd}
 & (W \otimes (V \otimes X)) \otimes Y \arrow[dl, "a_{W,V\otimes X,Y}"'] \arrow[dr, "a^{-1}_{W,V,X}\otimes Id_Y"] & \\
W \otimes ((V \otimes X) \otimes Y) \arrow[d, "(Id_W\otimes a_{V,X,Y})"'] & & ((W \otimes V) \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "a_{W\otimes V,X,Y}"] \\
W \otimes (V \otimes (X \otimes Y)) \arrow[rr, "a^{-1}_{W,V,X\otimes Y}"'] & & (W \otimes V) \otimes (X \otimes Y)
\end{tikzcd}
$$

que é o axioma do pentágono para os objetos W, V, X, Y, e então, comutativo. Portanto, $\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Provemos agora que $\phi^{\mathcal{F}} : Id_{\mathcal{C}} \to \mathcal{F}_{\mathbf{1}}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

É fácil ver que $\phi^{\mathcal{F}}$ é uma transformação natural e, ainda, para todo $X \in \mathcal{C}$, $\phi^{\mathcal{F}}_X$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Resta mostrarmos que $\phi^{\mathcal{F}}$ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, ou seja,

$$\begin{tikzcd}
Id_{\mathcal{C}}(X) \otimes Y \arrow[r, "\phi^{\mathcal{F}}_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{Id_{\mathcal{C}}}_{X,Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X) \otimes Y \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{\mathbf{1}}}_{X,Y}"] \\
Id_{\mathcal{C}}(X \otimes Y) \arrow[r, "\phi^{\mathcal{F}}_{X \otimes Y}"'] & \mathcal{F}_{\mathbf{1}}(X \otimes Y),
\end{tikzcd}$$

é comutativo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. De fato, utilizando as definições, vemos que o diagrama acima torna-se

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[rr, "l^{-1}_X \otimes Id_Y"] \arrow[dr, "Id_{X \otimes Y}"'] & & (\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[dd, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \\
& X \otimes Y \arrow[dr, "l^{-1}_{X \otimes Y}"'] & \\
& & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

e é comutativo devido ao primeiro diagrama da Proposição 2.11. Assim, $\phi^{\mathcal{F}}$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Para mostrarmos que $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ é um funtor monoidal, resta mostrarmos a comutatividade dos diagramas da Definição 2.14, ou seja, que para $W, V, U \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
& (\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V)) \otimes \mathcal{F}(U) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} \otimes Id_{\mathcal{F}(U)}"'] \arrow[dr, "a_{\mathcal{F}(W),\mathcal{F}(V),\mathcal{F}(U)}"] & \\
\mathcal{F}(W \otimes V) \otimes \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W \otimes V,U}"'] & & \mathcal{F}(W) \otimes (\mathcal{F}(V) \otimes \mathcal{F}(U)) \arrow[d, "Id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U}"] \\
\mathcal{F}((W \otimes V) \otimes U) \arrow[dr, "\mathcal{F}(a_{W,V,U})"'] & & \mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(V \otimes U) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V \otimes U}"] \\
& \mathcal{F}(W \otimes (V \otimes U)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes \mathcal{F}(W) \arrow[r, "l_{\mathcal{F}(W)}"] \arrow[d, "\phi^{\mathcal{F}} \otimes Id_{\mathcal{F}(W)}"'] & \mathcal{F}(W) \\
\mathcal{F}(\mathbf{1}) \otimes \mathcal{F}(W) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{\mathbf{1},W}"'] & \mathcal{F}(\mathbf{1} \otimes W) \arrow[u, "\mathcal{F}(l_W)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W) \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \arrow[r, "r_{\mathcal{F}(W)}"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \phi^{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F}(W) \\
\mathcal{F}(W) \otimes \mathcal{F}(\mathbf{1}) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{F}}_{W,\mathbf{1}}"'] & \mathcal{F}(W \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "\mathcal{F}(r_W)"']
\end{tikzcd}$$

comutam. De fato, iniciamos lembrando que $(\beta * \alpha)_X = H(\alpha_X)\beta_{F(X)}$, e assim, para cada $X \in \mathcal{C}$, temos

$$(id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U})_X = (id_{\mathcal{F}_W} * \zeta^{\mathcal{F}}_{V,U})_X = id_W \otimes a^{-1}_{V,U,X},$$

$$(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} \otimes id_{\mathcal{F}(U)})_X = (\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V} * id_{\mathcal{F}_U})_X = a^{-1}_{W,V,U\otimes X},$$

$$(\phi^{\mathcal{F}} \otimes id_{\mathcal{F}(W)})_X = (\phi^{\mathcal{F}} * id_{\mathcal{F}_W})_X = l^{-1}_{W\otimes X},$$

$$(id_{\mathcal{F}(W)} \otimes \phi^{\mathcal{F}})_X = (id_{\mathcal{F}_W} * \phi^{\mathcal{F}})_X = id_W \otimes l^{-1}_X,$$

Logo, como $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ é estrita e utilizando as definições de $\mathcal{F}$, do produto tensorial em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, de $\zeta^{\mathcal{F}}$ e de $\phi^{\mathcal{F}}$, os diagramas se tornam:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& W \otimes (V \otimes (U \otimes X)) \arrow[d, equal] & \\
& ((\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V) \circ \mathcal{F}_U)(X) \arrow[dl, "a^{-1}_{W,V,U\otimes X}"'] \arrow[dr, "Id_{(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U)(X)}"] & \\
(W \otimes V) \otimes (U \otimes X) \arrow[d, equal] & & W \otimes (V \otimes (U \otimes X)) \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{F}_{W\otimes V} \circ \mathcal{F}_U)(X) \arrow[d, "a^{-1}_{W\otimes V,U,X}"'] & & (\mathcal{F}_W \circ (\mathcal{F}_V \circ \mathcal{F}_U))(X) \arrow[d, "Id_W \otimes a^{-1}_{V,U,X}"] \\
\mathcal{F}_{(W\otimes V)\otimes U}(X) \arrow[d, equal] & & (\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_{V\otimes U})(X) \arrow[d, equal] \\
((W \otimes V) \otimes U) \otimes X \arrow[dr, "a_{W,V,U} \otimes Id_X"'] & & W \otimes ((V \otimes U) \otimes X) \arrow[dl, "a^{-1}_{W,V\otimes U,X}"] \\
& \mathcal{F}_{W\otimes(V\otimes U)(X)} \arrow[d, equal] & \\
& (W \otimes (V \otimes U)) \otimes X &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
W \otimes X \arrow[d, equal] & & \\
(Id_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}_W)(X) \arrow[dr, "Id_{\mathcal{F}_W(X)}"] \arrow[dd, "l^{-1}_{W\otimes X}"'] & & \\
& \mathcal{F}_W(X) = W \otimes X \arrow[dr, "l_W \otimes Id_X"] & \\
(\mathcal{F}_{\mathbf{1}} \circ \mathcal{F}_W)(X) \arrow[rr, "a^{-1}_{\mathbf{1},W,X}"'] \arrow[d, equal] & & \mathcal{F}_{\mathbf{1}\otimes W}(X) \arrow[d, equal] \\
\mathbf{1} \otimes (W \otimes X) & & (\mathbf{1} \otimes W) \otimes X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \otimes X \arrow[d, equal] & & \\
(\mathcal{F}_W \circ Id_{\mathcal{C}})(X) \arrow[dr, "Id_{W\otimes X}"] \arrow[dd, "Id_W \otimes l^{-1}_X"'] & & \\
& \mathcal{F}_W(X) = W \otimes X & \\
(\mathcal{F}_W \circ \mathcal{F}_{\mathbf{1}})(X) \arrow[rr, "a^{-1}_{W,\mathbf{1},X}"'] \arrow[d, equal] & & \mathcal{F}_{W\otimes \mathbf{1}}(X) \arrow[ul, "r_W \otimes Id_X"'] \arrow[d, equal] \\
W \otimes (\mathbf{1} \otimes X) & & (W \otimes \mathbf{1}) \otimes X
\end{tikzcd}
$$

E estes são comutativos, em que a comutatividade do hexágono segue do axioma do pentágono para os objetos W, V, U, X e a dos quadrados segue, respectivamente, da Proposição 2.11 e do axioma do triângulo para os objetos $W, \mathbf{1}, X$. Portanto, $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ é um funtor monoidal.

Definimos agora

$$
\begin{array}{rccl}
\mathcal{G}: & End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) & \to & \mathcal{C} \\
& (F, c) & \to & F(\mathbf{1}) \\
& \alpha & \to & \alpha_{\mathbf{1}}
\end{array}
$$

para quaisquer $(F, c) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e α um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Claramente, $\mathcal{G}$ é um funtor e definimos:

$$
\begin{array}{rccl}
\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}: & \mathcal{G}(G) \otimes \mathcal{G}(F) & \to & \mathcal{G}(G \otimes F) \\
\\
\phi^{\mathcal{G}}: & \mathbf{1} & \to & \mathcal{G}(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}})
\end{array}
$$

ou seja,

$$
\begin{array}{rccl}
\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}: & G(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1}) & \to & G(F(\mathbf{1})) \\
\\
\phi^{\mathcal{G}}: & \mathbf{1} & \to & Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}
\end{array}
$$

por

$$\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F} = G(l_{F(\mathbf{1})}) c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})},$$

$$\phi^{\mathcal{G}} = Id_{\mathbf{1}},$$

para quaisquer $F = (F, c^F), G = (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Claramente $\phi^{\mathcal{G}}$ é um isomorfismo natural.

Note ainda que $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ é um isomorfismo natural, pois dados $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, temos que $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ é uma composição de isomorfismos, e portanto, também é isomorfismo e ainda, para (F, c^F), (G, c^G), $(F', c^{F'})$, $(G', c^{G'}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\alpha : (F, c^F) \to (F', c^{F'})$, $\beta : (G, c^G) \to (G', c^{G'})$ morfismos em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(G, c^G) \otimes \mathcal{G}(F, c^F) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\nu)\otimes\mathcal{G}(\mu)=\mathcal{G}(\nu*\mu)"'] & \mathcal{G}((G, c^G) \otimes (F, c^F)) \arrow[d, "\mathcal{G}(\nu\otimes\mu)=\mathcal{G}(\nu*\mu)"] \\
\mathcal{G}(G', c^{G'}) \otimes \mathcal{G}(F', c^{F'}) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{G',F'}"'] & \mathcal{G}((G', c^{G'}) \otimes (F', c^{F'}))
\end{tikzcd}$$

se torna,

$$\begin{tikzcd}
G(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "c^{G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}"] \arrow[d, "\beta_{\mathbf{1}}\otimes Id_{F(\mathbf{1})}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & G(\mathbf{1} \otimes F(\mathbf{1})) \arrow[r, "G(l_{F(\mathbf{1})})"] \arrow[d, "\beta_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1})}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & G(F(\mathbf{1})) \arrow[d, "\beta_{F(\mathbf{1})}"] \\
G'(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "c^{G'}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}"] \arrow[d, "G'(Id_{\mathbf{1}})\otimes\alpha_{\mathbf{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & G'(\mathbf{1} \otimes F(\mathbf{1})) \arrow[r, "G'(l_{F(\mathbf{1})})"] \arrow[d, "G'(Id_{\mathbf{1}}\otimes\alpha_{\mathbf{1}})"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & G'(F(\mathbf{1})) \arrow[d, "G'(\alpha_{\mathbf{1}})"] \\
G'(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "c^{G'}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}"] & G'(\mathbf{1} \otimes F'(\mathbf{1})) \arrow[r, "G'(l_{F'(\mathbf{1})})"] & G'(F'(\mathbf{1}))
\end{tikzcd}$$

em que (1), (2) e (4) são comutativos pela naturalidade de β, l e $c^{G'}$, respectivamente e (3) comuta pois $\beta \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Assim, o diagrama comuta e portanto, $\zeta^{\mathcal{G}}$ é uma transformação natural.

Da mesma forma que para $\mathcal{F}$, mostremos agora que $(\mathcal{G}, \zeta^{\mathcal{G}}, \phi^{\mathcal{G}})$ é um funtor monoidal, ou seja, que é válida a comutatividade dos diagramas abaixo, para quaisquer (F, c^F), (G, c^G), $(H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{G}(H) \otimes \mathcal{G}(G)) \otimes \mathcal{G}(F) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes Id_{\mathcal{G}(F)}"'] \arrow[dr, "a_{\mathcal{G}(H),\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)}"] & \\
\mathcal{G}(H \otimes G) \otimes \mathcal{G}(F) \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H \otimes G,F}"'] & & \mathcal{G}(H) \otimes (\mathcal{G}(G) \otimes \mathcal{G}(F)) \arrow[d, "Id_{\mathcal{G}(H)} \otimes \zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}"] \\
\mathcal{G}((H \otimes G) \otimes F) \arrow[dr, "\mathcal{G}(a_{H,G,F})"'] & & \mathcal{G}(H) \otimes \mathcal{G}(G \otimes F) \arrow[dl, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G \otimes F}"] \\
 & \mathcal{G}(H \otimes (G \otimes F)) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes \mathcal{G}(H) \arrow[r, "l_{\mathcal{G}(H)}"] \arrow[d, "\phi^{\mathcal{G}} \otimes Id_{\mathcal{G}(H)}"'] & \mathcal{G}(H) \\
(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes \mathcal{G}(H) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}),H}"'] & \mathcal{G}((Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \otimes H) \arrow[u, "\mathcal{G}(l_H)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(H) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{\mathcal{G}(H)}"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{G}(H)} \otimes \phi^{\mathcal{G}}"'] & \mathcal{G}(H) \\
\mathcal{G}(H) \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \arrow[r, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}})}"'] & \mathcal{G}(H \otimes (Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}})) \arrow[u, "\mathcal{G}(r_H)"']
\end{tikzcd}
$$

De fato, pela definição de $\mathcal{G}$, $\zeta^{\mathcal{G}}$ e $\phi^{\mathcal{G}}$, e como $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ é estrita, ou seja, as transformações naturais a, l e r são as respectivas transformações naturais identidade, os diagramas dos quadrados se tornam:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes H(\mathbf{1}) \arrow[rr, "l_{H(\mathbf{1})}"] \arrow[dd, "Id_{\mathbf{1}} \otimes Id_{H(\mathbf{1})}"'] & & H(\mathbf{1}) \\
 & Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1} \otimes H(\mathbf{1})) \arrow[dr, "Id_{\mathcal{C}}(l_{H(\mathbf{1})})"] & \\
Id_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \otimes H(\mathbf{1}) \arrow[ur, "c^{Id_{\mathcal{C}}}_{\mathbf{1},H(\mathbf{1})}"] \arrow[rr, "\zeta^{\mathcal{G}}_{Id_{\mathcal{C}},H}"'] & & Id_{\mathcal{C}}(H(\mathbf{1})) \arrow[uu, "(l_H)_{\mathbf{1}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "r_{H(\mathbf{1})}"] \arrow[dd, "Id_{H(\mathbf{1}) \otimes Id_{\mathbf{1}}}"'] & & H(\mathbf{1}) \\
 & H(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \arrow[dr, "H(l_{\mathbf{1}})"] & \\
H(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \arrow[ur, "c^{H}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}"] \arrow[rr, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,\mathbf{1}}"'] & & H(\mathbf{1}) \arrow[uu, "(r_H)_{\mathbf{1}}"']
\end{tikzcd}
$$

e são comutativos pois (H, c^H) e $(Id_{\mathcal{C}}, c^{Id_{\mathcal{C}}}) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, ou seja, satisfazem o diagrama do triângulo dado na construção da categoria $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Ainda, o diagrama do hexágono se torna:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (H(\mathbf{1}) \otimes G(\mathbf{1})) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[rrr, "a_{\mathcal{G}(H),\mathcal{G}(G),\mathcal{G}(F)}"] \arrow[dl, "c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})} \otimes Id_{F(\mathbf{1})}"'] \arrow[ddll, bend right, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G} \otimes Id_{F(\mathbf{1})}"'] \arrow[drr, phantom, "(3)"] & & & H(\mathbf{1}) \otimes (G(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1})) \arrow[dl, "c^H_{\mathbf{1},G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})}"'] \arrow[ddr, "Id_{\mathcal{G}(H)} \otimes \zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}"] \arrow[dd, phantom, "(1)"] & \\
 & H(\mathbf{1} \otimes G(\mathbf{1})) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[dr, "c^H_{\mathbf{1}\otimes G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}"] \arrow[dl, "H(l_{G(\mathbf{1})}) \otimes Id_{F(\mathbf{1})}"'] & & & H((\mathbf{1} \otimes G(\mathbf{1})) \otimes F(\mathbf{1})) \arrow[ddl, "H(l_{G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1})})"'] \arrow[ddddr, "H(Id_{\mathbf{1}} \otimes \zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})"] & & \\
 & \arrow[dr, phantom, "(5)"] & & H(\mathbf{1} \otimes (G(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1}))) \arrow[ur, "H(a_{\mathbf{1},G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})})"] \arrow[dd, "H(l_{G(\mathbf{1})} \otimes Id_{F(\mathbf{1})})"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & & & \\
H(G(\mathbf{1})) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[drrr, "c^H_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})}"] \arrow[dr, "c^{H\circ G}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}"] \arrow[ddrr, bend right, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H\otimes G,F}"'] & & & & & & H(\mathbf{1}) \otimes G(F(\mathbf{1})) \arrow[dl, "c^H_{\mathbf{1},G(F(\mathbf{1}))}"] \arrow[ddll, bend left, "\zeta^{\mathcal{G}}_{H,G\otimes F}"] \\
 & & & H(G(\mathbf{1}) \otimes F(\mathbf{1})) \arrow[dll, "H(c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})})"'] \arrow[dr, "H(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & & & \\
 & H(G(\mathbf{1} \otimes F(\mathbf{1}))) \arrow[dr, "H(G(l_{F(\mathbf{1})}))"] & & & & H(\mathbf{1} \otimes G(F(\mathbf{1}))) \arrow[dl, "H(l_{G(F(\mathbf{1}))})"] & \\
 & & H(G(F(\mathbf{1}))) \arrow[rr, "\mathcal{G}(a_{H,G,F})=(Id_{(H\circ G)\circ F})_{\mathbf{1}}"'] & & H(G(F(\mathbf{1}))) & &
\end{tikzcd}
$$

E o mesmo é comutativo, uma vez que (1) é comutativo pela naturalidade de c^H, (2) pela naturalidade de l com o morfismo $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ e H funtor, (3) comuta pois $(H, c^H) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, (4) por causa do primeiro diagrama da Proposição 2.11 e (5) novamente pela naturalidade de C^H. As demais comutatividade ocorrem pela definição de $c^{H\circ G}$ e definição de $\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}$ com H funtor, respectivamente.

Encerramos a demonstração do teorema provando que $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ são monoidalmente equivalentes. Para isso, lembramos que $\alpha : \mathcal{G}\circ\mathcal{F} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : \mathcal{F}\circ\mathcal{G} \to Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$, e como $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W) = \mathcal{G}(\mathcal{F}_W, c^{\mathcal{F}_W}) = \mathcal{F}_W(\mathbf{1}) = W \otimes \mathbf{1}$ e $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(F, c^F) = \mathcal{F}(F(\mathbf{1})) = (\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}, c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}})$, para quaisquer $W \in \mathcal{C}$ e $(F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, temos que

$$\begin{array}{rccc} \alpha_W : & W \otimes \mathbf{1} & \to & W \\ \beta_{(F,c^F)} : & \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})} & \to & F \end{array}$$

são definidos por $\alpha_W = r_W$ e $(\beta_{(F,c^F)})_X = F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X}$, para $X \in \mathcal{C}$.

Vejamos que α e β são isomorfismos naturais monoidais. De fato, já sabemos que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $Id_{\mathcal{C}}$ e $Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ são funtores monoidais, o que prova parte da equivalência entre $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Provemos que α é um isomorfismo natural monoidal, ou seja, uma transformação natural monoidal que é um isomorfismo natural. Claramente α é um isomorfismo natural e ainda, é uma transformação natural monoidal, pois, para quaisquer $W, V \in \mathcal{C}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W) \otimes (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(V) \arrow[r, "\alpha_W \otimes \alpha_V"] \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}_{W,V}"'] & Id_{\mathcal{C}}(W) \otimes Id_{\mathcal{C}}(V) \arrow[d, "id_{W \otimes V}"] \\
(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(W \otimes V) \arrow[r, "\alpha_{W \otimes V}"'] & Id_{\mathcal{C}}(W \otimes V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, "Id_{\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "\phi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}"'] & & \mathbf{1} \\
& (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(\mathbf{1}) \arrow[ur, "\alpha_{\mathbf{1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

comutam, afinal, aplicando as definições de $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, α, temos

$$\begin{tikzcd}
(W \otimes \mathbf{1}) \otimes (V \otimes \mathbf{1}) \arrow[rr, "r_W \otimes Id_{V \otimes \mathbf{1}}"] \arrow[dr, "a_{W,\mathbf{1},(V\otimes\mathbf{1})}"'] \arrow[rrr, bend left, "r_W \otimes r_V"] \arrow[dd, "\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}(W),\mathcal{F}(V)}"'] & \arrow[d, phantom, "(1)"] & W \otimes (V \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "Id_W \otimes r_V"] \arrow[dd, "a^{-1}_{W,\mathbf{1},(V\otimes\mathbf{1})}"] \arrow[ddr, phantom, "(2)"] & W \otimes V \arrow[dd, "Id_{W \otimes V}"] \\
& W \otimes (\mathbf{1} \otimes (V \otimes \mathbf{1})) \arrow[ur, "Id_W \otimes l_{V \otimes \mathbf{1}}"'] \arrow[d, phantom, "(3)"] & & \\
W \otimes (V \otimes \mathbf{1}) \arrow[rr, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{W,V})_{\mathbf{1}} = a^{-1}_{W,\mathbf{1},(V\otimes\mathbf{1})}"'] & \, & (W \otimes V) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{W \otimes V}"'] & W \otimes V
\end{tikzcd}$$

que é comutativo, uma vez que (1) comuta pelo axioma do triângulo, (2) pela Proposição 2.11 e (3) pela definição de $\zeta^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}$ juntamente com o fato que $\zeta^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}(W),\mathcal{F}(V)} = \mathcal{F}_W(l_{\mathcal{F}_V(\mathbf{1})})c^{\mathcal{F}_W}_{\mathbf{1},\mathcal{F}_V(\mathbf{1})}$ e por sua vez, $\mathcal{F}_W(l_{\mathcal{F}_V(\mathbf{1})}) = Id_W \otimes l_{V\otimes\mathbf{1}}$, $c^{\mathcal{F}_W}_{\mathbf{1},\mathcal{F}_V(\mathbf{1})} = a_{W,\mathbf{1},(V\otimes\mathbf{1})}$. E também,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, "Id_{\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "\phi^{\mathcal{G}}=Id_{\mathbf{1}}"] \arrow[ddr, "\phi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}"'] & & \mathbf{1} \\
& \mathbf{1} \arrow[d, "\mathcal{G}(\phi^{\mathcal{F}})=l_{\mathbf{1}}^{-1}"] & \\
& \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[uur, "\alpha_{\mathbf{1}}=r_{\mathbf{1}}=l_{\mathbf{1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

que é comutativo pela definição de $\phi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{F}}$ e da Proposição 2.12 (iii).

Provemos agora que β é um isomorfismo natural monoidal. Inicialmente, mostraremos que $\beta_{(F,c^F)} : \mathcal{F}_{F(\mathbf{1})} \to F$ é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, para $(F, c^F) \in End^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. De fato, é fácil ver que $(\beta_{(F,c^F)})_X = F(l_X)c^F_{\mathbf{1},X}$ é um isomorfismo, para todo $X \in \mathcal{C}$. E ainda, escrevendo β_F por $\beta_{(F,c^F)}$ para facilitar a notação, temos que β_F é uma transformação natural, pois, para $f : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$ o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X) \arrow[r, "(\beta_F)_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(Y) \arrow[r, "(\beta_F)_Y"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

se torna

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1})\otimes X \arrow[r, "c^F_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "F(Id_{\mathbf{1}})\otimes f"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta_F)_X"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & F(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[r, "F(l_X)"] \arrow[d, "F(Id_{\mathbf{1}}\otimes f)"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(\mathbf{1})\otimes Y \arrow[r, "c^F_{\mathbf{1},Y}"] \arrow[rr, bend right, "(\beta_F)_Y"'] & F(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[r, "F(l_Y)"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

que é comutativo, pois (1) e (2) o são, visto a naturalidade de l e naturalidade de c^F

respectivamente. Provemos também que β_F é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X) \otimes Y \arrow[r, "(\beta_F)_X \otimes id_Y"] \arrow[d, "c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}}_{X,Y}"'] & F(X) \otimes Y \arrow[d, "c^F_{X,Y}"] \\
\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}(X \otimes Y) \arrow[r, "(\beta_F)_{X\otimes Y}"'] & F(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. Mas, utilizando as definições de $\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}$, β_F e $c^{\mathcal{F}_{F(\mathbf{1})}}$, o mesmo se torna:

$$\begin{tikzcd}
(F(\mathbf{1}) \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "c^F_{\mathbf{1},X} \otimes Id_Y"] \arrow[d, "a_{F(\mathbf{1}),X,Y}"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta_F)_X \otimes id_Y"] \arrow[dd, phantom, shift left=20ex, "(3)"] & F(\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "F(l_X) \otimes Id_Y"] \arrow[d, "c^F_{\mathbf{1}\otimes X,Y}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F(X) \otimes Y \arrow[dd, "c^F_{X,Y}"] \\
 & F((\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y) \arrow[d, "F(a_{\mathbf{1},X,Y})"'] \arrow[dr, "F(l_X \otimes Id_Y)"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "(2)"] & \\
F(\mathbf{1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "c^F_{\mathbf{1},X\otimes Y}"'] \arrow[rr, bend right, "(\beta_F)_{X\otimes Y}"'] & F(\mathbf{1} \otimes (X \otimes Y)) \arrow[r, "F(l_{X\otimes Y})"'] & F(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

que é comutativo, pois (1) comuta devido a naturalidade de c^F, (2) pela Proposição 2.11 e que F é um funtor e (3) pelo fato de que $(F, c^F) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Portanto, temos que β_F é um isomorfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e nos resta verificar que β é uma transformação natural monoidal.

Sejam $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ e $\mu : F \to G$ um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. É fácil ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(F, c^F) \arrow[r, "\beta_F"] \arrow[d, "(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})(\mu)"'] & Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(F, c^F) \arrow[d, "Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(\mu)"] \\
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(G, c^G) \arrow[r, "\beta_G"'] & Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}(G, c^G)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois, utilizando as definições de $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ e $Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$, ele se torna, para todo $X \in \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1}) \otimes X \arrow[r, "c^F_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "\mu_{\mathbf{1}} \otimes Id_X"'] \arrow[rr, bend left, "(\beta_F)_X"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "F(l_X)"] \arrow[d, "\mu_{\mathbf{1} \otimes X}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
G(\mathbf{1}) \otimes X \arrow[r, "c^G_{\mathbf{1},X}"] \arrow[rr, bend right, "(\beta_G)_X"'] & G(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "G(l_X)"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

em que (1) é comutativo pela naturalidade de μ e em (2) pelo fato de que μ é um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Portanto, o diagrama comuta e temos que β é uma transformação natural. Logo, já mostramos que β é um isomorfismo natural (β é transformação natural e β_F é isomorfismo natural em $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.

Por fim, provemos que β é uma transformação natural monoidal. Sejam $(F, c^F), (G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, vejamos que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(G, c^G) \otimes (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(F, c^F) \arrow[r, "\beta_G * \beta_F"] \arrow[d, "\zeta^{\mathcal{F} \circ \mathcal{G}}_{G,F}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & (G, c^G) \otimes (F, c^F) \arrow[d, "Id_{G \circ F}"] \\
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})((G, c^G) \otimes (F, c^F)) \arrow[r, "\beta_{G \circ F}"'] & (G, c^G) \otimes (F, c^F)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & Id_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\phi^{\mathcal{F} \circ \mathcal{G}}"'] \arrow[dr, "Id_{Id_{\mathcal{C}}}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \\
(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Id_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\beta_{Id_{\mathcal{C}}}"'] & {} & Id_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

comutam. De fato, para todo $X \in \mathcal{C}$, o diagrama (I) se torna:

$$
\begin{tikzcd}
G(\mathbf{1})\otimes(F(\mathbf{1})\otimes X) \arrow[rrrr, "\beta_G*\beta_F"] \arrow[d, "(\zeta^{\mathcal{F}}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1})})_X \,=\, a^{-1}_{G(\mathbf{1}),F(\mathbf{1}),X}"'] \arrow[drr, "c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1}),X}"] \arrow[drrr, "(\beta_G)_{F(\mathbf{1})\otimes X}"'] & & & {} \arrow[d, phantom, "(1)"] & G(F(X)) \arrow[ddd, "Id_{G(F(X))}"] \\
(G(\mathbf{1})\otimes F(\mathbf{1}))\otimes X \arrow[dr, "c^G_{\mathbf{1},F(\mathbf{1})}\otimes Id_X"] \arrow[ddrr, bend right, "\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F}\otimes Id_X=\mathcal{F}(\zeta^{\mathcal{G}}_{G,F})_X"'] & {} \arrow[d, phantom, "(5)"] & G(\mathbf{1}\otimes(F(\mathbf{1})\otimes X)) \arrow[r, "G(l_{F(\mathbf{1})\otimes X})"] \arrow[d, "G(a^{-1}_{\mathbf{1},F(\mathbf{1}),X})"] \arrow[u, phantom, "(3)"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & G(F(\mathbf{1})\otimes X) \arrow[ur, "G((\beta_F)_X)"] \arrow[dd, "G(c^F_{\mathbf{1},X})"] & \\
& G(\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1}))\otimes X \arrow[r, "c^G_{\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1}),X}"] \arrow[dr, "G(l_{F(\mathbf{1})})\otimes Id_X"] & G((\mathbf{1}\otimes F(\mathbf{1}))\otimes X) \arrow[ur, "G(l_{F(\mathbf{1})}\otimes Id_X)"] \arrow[d, phantom, "(6)"] & {} \arrow[d, phantom, "(7)"] \arrow[r, phantom, "(2)"] & {} \\
& & G(F(\mathbf{1}))\otimes X \arrow[r, "c^{G\circ F}_{\mathbf{1},X}"] \arrow[uur, "c^G_{F(\mathbf{1}),X}"] & G(F(\mathbf{1}\otimes X)) \arrow[r, "G(F(l_X))"] & G(F(X))
\end{tikzcd}
$$

em que (1), (2) e (3) são respectivamente as definições de $\beta_G * \beta_F$, β_F, com o fato de que G é um funtor, e β_G, (4) advém da Proposição 2.11 e G funtor, (5) é válido pois $(G, c^G) \in End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$, em (6) usamos a naturalidade de c^G, e em (7) usamos a definição de $c^{G\circ F}$.

E o diagrama (II), utilizando as definições de $(\phi^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}})_X$, $(\beta_{Id_{\mathcal{C}}})_X$ se torna

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[ddd, "(\phi^{\mathcal{F}\circ\mathcal{G}})_X"'] \arrow[dr, "\phi^{\mathcal{F}}_X=l_X^{-1}"] \arrow[dddrrr, "Id_X=Id_{Id_{\mathcal{C}}(X)}(Id_{Id_{\mathcal{C}}})_X"] & & & \\
& \mathbf{1}\otimes X \arrow[ddl, "\mathcal{F}(\phi^{\mathcal{G}})"'] \arrow[dr, "Id_{\mathbf{1}\otimes X}"] & & \\
& & Id(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[dr, "Id_{\mathcal{C}}(l_X)"] & \\
Id(\mathbf{1})\otimes X \arrow[urr, "c^{Id}_{\mathbf{1},X}"] \arrow[rrr, "(\beta_{Id_{\mathcal{C}}})_X"'] & & & X
\end{tikzcd}
$$

que é comutativo, o que conclui nossa prova de que β é um isomorfismo natural monoidal.

Portanto, existem funtores monoidais $(\mathcal{F}, \zeta^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{F}})$ e $(\mathcal{G}, \zeta^{\mathcal{G}}, \phi^{\mathcal{G}})$ e isomorfismos naturais monoidais $\alpha : \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to Id_{\mathcal{C}}$ e $\beta : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to Id_{End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}$ que garantem a equivalência monoidal de $\mathcal{C}$ e $End_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. ■

Referências

[1] ANDRADE, Gabriel Samuel de. **Categorias monoidais e o teorema de Mac Lane para a condição estrita**. 2016. 124 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2016. Disponível em: <http://www.bu.ufsc.br/teses/PMTM0210-D.pdf>

[2] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**, Mathematical Surveys and Monographs, Providence, Rhode Island: AMS, 343p. (2015).

[3] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**, Springer, (1971).