

Cálculo II - Lista 1

1. Suponha que $a < b < c < d$ e que f é integrável em $[a, d]$. Mostre que f é integrável em $[b, c]$.

2. (a) Mostre que se f é integrável em $[a, b]$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(b) Mostre que se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

3. Mostre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

4. Mostre que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c \int_a^b f(ct).$$

5. (a) Mostre que se f é integrável em $[a, b]$ e $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in X$, então

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu$$

para algum número μ com $m \leq \mu \leq M$.

(b) Mostre que se f é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

para algum $\xi \in [a, b]$.

(c) Suponha f é contínua em $[a, b]$ e g é integrável e não negativa em $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

para algum ξ em $[a, b]$. Esse resultado é chamado de Teorema do Valor Médio para Integrais.

6. Suponha que f é integrável em $[a, b]$. Mostre que existe um número x em $[a, b]$ tal que $\int_a^x f(x)dx = \int_x^b f(x)dx$.

7. Suponha que f é contínua em $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ para todas as funções contínuas g em $[a, b]$. Mostre que f é identicamente nula
8. Seja $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = 0$ para x irracional.
- (a) Calcule $L(f, P)$ para todas as partições P de $[0, 1]$.
 - (b) Encontre $\inf\{U(f, P) \mid P \text{ partição de } [0, 1]\}$.
9. Seja $f(x) = x$. Calcule $\int_a^b f(x)dx$.
10. Seja $f(x) = x^2$. Calcule $\int_a^b f(x)dx$.