Teoria de Categorias - Lista 1

1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto inicial em $\mathcal{C}$ é um objeto $X \in \mathcal{C}^0$ tal que, para todo objeto $A \in \mathcal{C}^0$, existe um único morfismo $f \in \mathcal{C}(X, A)$. Mostre que, se existir objeto inicial em $\mathcal{C}$, este é único a menos de isomorfismo.

2. Defina objeto final em uma categoria e mostre sua unicidade a menos de isomorfismo.

3. Seja S um conjunto fixo e seja X^S o conjunto de todas as funções de $h : S \to X$. Mostre que $(\_\_)^S : \underline{Set} \to \underline{Set}$ associando cada conjunto X ao conjunto X^S define um funtor (tem que definir o que faz nos morfismos). Mostre também que a classe de funções $e_X : X^S \times S \to X$ dada por $e_X(h, s) = h(s)$ determina uma transformação natural $e : (\_\_)^S \times S \Rightarrow \mathrm{Id}_{\underline{Set}}$, em que $S : \underline{Set} \to \underline{Set}$ é o funtor constante que associa todo conjunto Y ao conjunto X e toda função $f : X \to Y$ à identidade de S.

4. Seja H um grupo fixo. Mostre que $H \times \_\_ : \underline{Grp} \to \underline{Grp}$ que associa a cada grupo G o grupo $H \times G$ define um funtor. Se $f : H \to K$ é um morfismo de grupos, mostre que este morfismo define uma transformação natural $f : H \times \_\_ \Rightarrow K \times \_\_$.

5. Sejam G e H grupos (vistos como categorias com um único objeto) e $f, g : G \to H$ dois funtores (i.e. morfismos de grupos). Mostre que existe uma transformação natural $f \Rightarrow g$ se, e somente se existir $x \in H$ tal que $g(r) = x f(r) x^{-1}$ para todo $r \in G$.

6. Seja k um corpo. Defina $\underline{Mat_k}$ como a categoria pequena cujos objetos são números naturais e o conjunto de morfismos entre n e m é o conjunto das matrizes $M_{m\times n}(k)$, a composição de morfismos é a multiplicação matricial quando estiver definida. O único morfismo de 0 para n é o vetor coluna $n \times 1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e o único morfismo entre n e 0 é o vetor linha $1 \times n$, $(0, \dots, 0)$. Mostre que a categoria $\underline{Vect_k^f}$ dos k-espaços vetoriais de dimensão finita é equivalente a $\underline{Mat_k}$.

7. Mostre que a composição de monomorfismos é um monomorfismo, e de igual forma, para epimorfismos.

8. Mostre que em $\underline{Grp}$ todo epimorfismo é sobrejetor.

9. Considere a categoria $\mathcal{C}$ cujos objetos são triplas (X, e, s) onde X é um conjunto $e \in X$ e $s : X \to X$ é uma função, e cujos morfismos $f : (X, e, s) \to (Y, e', t)$ são funções $f : X \to Y$ tais que $f(e) = e'$, e $f \circ s = t \circ f$. Mostre que esta categoria possui como objeto inicial $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$, onde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função sucessor.

10. Mostre que se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor fiel e $F(f) : F(X) \to F(Y)$ é um monomorfismo, então $f : X \to Y$ é um monomorfismo.

11. Seja G um grupo topológico. Dadas duas curvas $\gamma, \delta : [0, 1] \to G$ tais que $\gamma(0) = \gamma(1) = \delta(0) = \delta(1) = e$, defina $\gamma * \delta : [0, 1] \to G$ como a curva

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \delta(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1)7 \text{ se} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e defina $(\gamma \cdot \delta)(t) = \gamma(t)\delta(t)$. Mostre que $(\gamma_2 * \delta_2) \cdot (\gamma_1 * \delta_1) = (\gamma_2 \cdot \gamma_1) * (\delta_2 \cdot \delta_1)$.

12. (Teorema de Eckmann-Hilton) Seja S um conjunto onde estejam definidas duas operações $\cdot : S \times S \to S$ e $* : S \times S \to S$, satisfazendo

$$(s \cdot t) * (s' \cdot t') = (s * s') \cdot (t * t'), \qquad \forall s, s', t, t' \in S.$$

Sejam e e E, respectivamente, os elementos neutros com respeito às operações $\cdot$ e $*$.

a) Mostre que $e = E$.

b) Mostre que as operações $\cdot$ e $*$ coincidem e que são comutativas.

13. Considerando os dois exercícios anteriores, mostre que o grupo fundamental de um grupo topológico é um grupo abeliano.