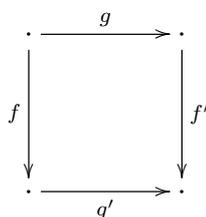


Teoria de Categorias - Lista 2

1. Mostre que toda categoria \mathbf{n} , com $n \in \mathbb{N}$ é uma categoria livre.
2. Dado um grafo $E^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} E^0$. Mostre que é possível construir um grupóide livre a ele associado. Enuncie e demonstre a sua propriedade universal.
3. Determine a categoria livre gerada pelo grafo



Determine também a categoria obtida do mesmo grafo, mas com a relação $g' \circ f = f' \circ g$.

4. Seja G um grupo e N um subgrupo normal de G . Caracterize a projeção canônica $p : G \rightarrow G/N$ como uma flecha universal de um objeto apropriado sobre um functor apropriado $F : \underline{Grp} \rightarrow \underline{Set}$.
5. Use a propriedade universal da projeções construídas no exercício anterior para mostrar os seguintes resultados clássicos de grupos:
 - a) Se M e N são subgrupos normais de G , com $M \subseteq N$ então $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.
 - b) Se S e N são subgrupos de G , com N normal, então $SN/N \cong S/(S \cap N)$.
6. Encontre a flecha universal de $*$ sobre o functor $\mathcal{P} : \underline{Set}^{op} \rightarrow \underline{Set}$ (que associa a cada conjunto seu conjunto de subconjuntos).
7. Mostre que o kernel de um homomorfismo (em \underline{Ab} , \underline{Grp} , \underline{Ring} , ${}_R\mathcal{M}$, etc) pode ser visto como uma flecha universal de $*$ sobre um functor contravariante apropriado.
8. Mostre que a construção do anel polinomial $R[x]$ sobre um anel comutativo R é uma construção universal.