Teoria de Categorias - Lista 2

1. Mostre que toda categoria $\mathbf{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ é uma categoria livre.

2. Dado um grafo $\begin{tikzcd} E^1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & E^0 \end{tikzcd}$. Mostre que é possível construir um grupóide livre a ele associado. Enuncie e demonstre a sua propriedade universal.

3. Determine a categoria livre gerada pelo grafo

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f'"] \\ \cdot \arrow[r, "g'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

   Determine também a categoria obtida do mesmo grafo, mas com a relação $g' \circ f = f' \circ g$.

4. Seja G um grupo e N um subgrupo normal de G. Caracterize a projeção canônica $p : G \to G/N$ como uma flecha universal de um objeto apropriado sobre um funtor apropriado $F : \underline{Grp} \to \underline{Set}$.

5. Use a propriedade universal da projeções construídas no exercício anterior para mostrar os seguintes resultados clássicos de grupos:

   a) Se M e N são subgrupos normais de G, com $M \subseteq N$ então $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.

   b) Se S e N são subgrupos de G, com N normal, então $SN/N \cong S/(S \cap N)$.

6. Encontre a flecha universal de $*$ sobre o funtor $\mathcal{P} : \underline{Set}^{op} \to \underline{Set}$ (que associa a cada conjunto seu conjunto de subconjuntos).

7. Mostre que o kernel de um homomorfismo (em $\underline{Ab}$, $\underline{Grp}$, $\underline{Ring}$, ${}_R\mathcal{M}$, etc) pode ser visto como uma flecha universal de $*$ sobre um funtor contravariante apropriado.

8. Mostre que a construção do anel polinomial $R[x]$ sobre um anel comutativo R é uma construção universal.