etas que lhe são perpendiculares. Logo, o ângulo formado por α β é, por definição, o ângulo formado por r e s. Mas r e s são erpendiculares, já que r é perpendicular a β. Portanto, α e β são e fato perpendiculares.

Nos exemplos vistos no final da seção anterior aparecem vá-os pares de planos perpendiculares. Em cada caso, o argumento ara justificar o perpendicularismo entre os planos consiste em entificar uma reta em um dos planos que seja perpendicular ao itro e aplicar o teorema anterior.

Assim, as faces laterais de um prisma reto são perpendicula-s ao plano da base, já que cada face lateral contém uma aresta teral perpendicular à base. O plano contendo as alturas VO e AP) tetraedro regular VABC é perpendicular às faces ABC e VBC, que as alturas são perpendiculares às respectivas bases. Os anos definidos por cada par de eixos em um sistema de eixos or-gonais tridimensional são mutuamente perpendiculares, já que da um desses planos contém um eixo que é perpendicular a cada n dos outros dois e, em conseqüência, ao plano formado por eles.

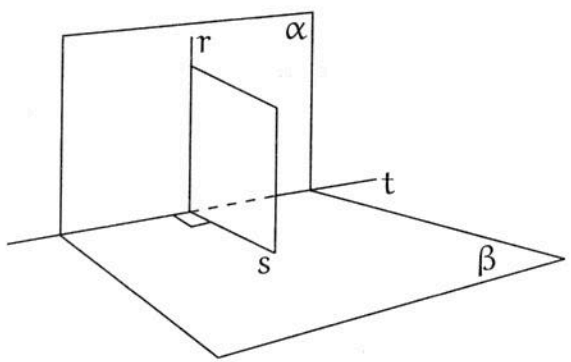

Fig. 8.16 - Critério de perpendicularismo de planos.

5 Atividades em Sala de Aula

professor pode explorar o perpendicularismo de retas e planos mundo que cerca o aluno: paredes, encontro de paredes, etc.

Devem ser feitos exercícios com vistas de objetos tridimensionais, quer pedindo aos alunos que desenhem as vistas de um objeto, quer pedindo que eles reconheçam objetos a partir de suas vistas.

Exercícios

1. É verdade que duas retas distintas ortogonais a uma terceira são sempre paralelas entre si?

2. Demonstre as seguintes propriedades:
a) Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Toda reta paralela a r é perpendicular a α; todo plano paralelo a α é perpendicular a r.
b) Duas retas distintas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas entre si. Dois planos distintos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

3. O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em um plano α. Sobre a perpendicular a α traçada por C tomamos um ponto D. Por C traçamos, por sua vez, as perpendiculares CE e CF a AD e BD, respectivamente. Mostre que:
a) AB é perpendicular a AD
b) CE é perpendicular a EF
c) DF é perpendicular a EF

4. Seja r uma reta do espaço e P um ponto exterior a r. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P aos planos que contém r?

5. Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um tetraedro regular? de um cubo? de um octaedro regular?

6. Sejam VA, VB e VC três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

7. Mostre que dois planos são perpendiculares se e só se duas

·tas respectivamente perpendiculares a cada um deles são orto-
›nais.

Se um plano α contém uma reta perpendicular a um plano β, ıtão o plano β contém uma reta perpendicular ao plano α. Certo ı errado?

Dada uma reta r e um plano α, diga se é sempre possivel nstruir um plano perpendicular a α contendo r.

›. Mostre que um plano é perpendicular a dois planos secantes e somente se ele é perpendicular à reta de interseção dos dois anos.

. Em um cubo ABCDEFGH mostre que os planos diagonais 3HG e EFDC são perpendiculares.

. Desenhe as vistas frontal, superior e de perfil dos sólidos aixo.

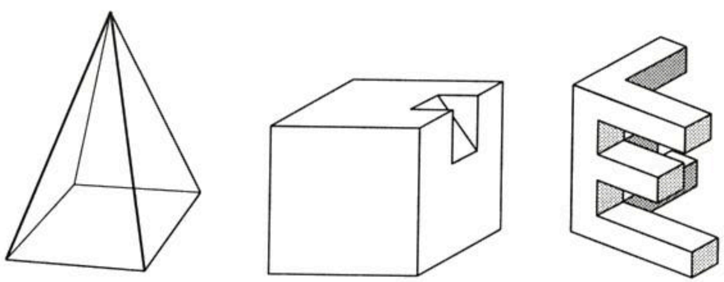

Figura 8.17

Desenhe um sólido cujas vistas frontal, superior e de perfil am as dadas a seguir.

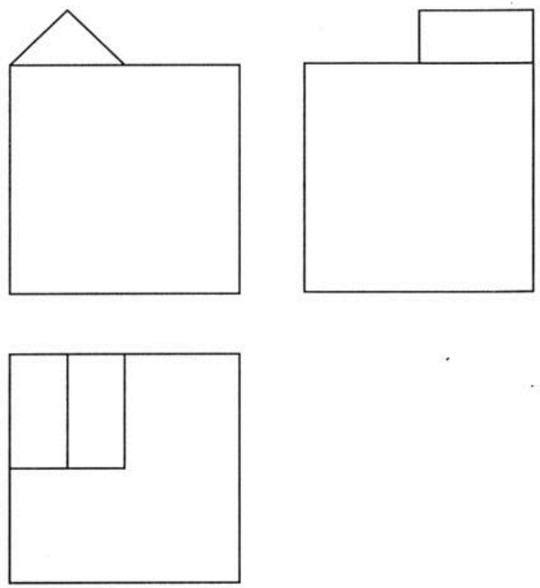

Figura 8.18

14. A figura 8.19 abaixo representa as vistas frontal e superior de um sólido. Que sólidos você consegue imaginar que tenham essas vistas? Para cada caso, forneça a vista de perfil.

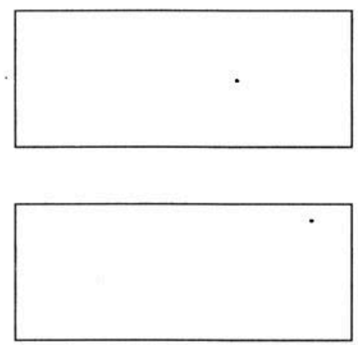

Figura 8.19

15. Dizemos que um plano α é um plano de simetria de uma figura F quando a imagem de F pela reflexão em torno de α é igual a F. Encontre os planos de simetria (se existirem) das seguintes figuras

) cubo
) tetraedro regular
) pirâmide quadrangular regular
cilindro de revolução
cone de revolução

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ em um sistema de coordenadas
ogonais, encontre as coordenadas:
da projeção de P no plano xy
da projeção de P no eixo Oz
do simétrico de P em relação ao plano xz

A figura 8.20 abaixo mostra a planta de um quarto, com lireito igual a 3 m. Deseja-se instalar um fio conectando uma pada, localizada no centro do teto, ao interruptor, situado a 80 le altura, junto à porta indicada na planta (cuja altura é 1,95

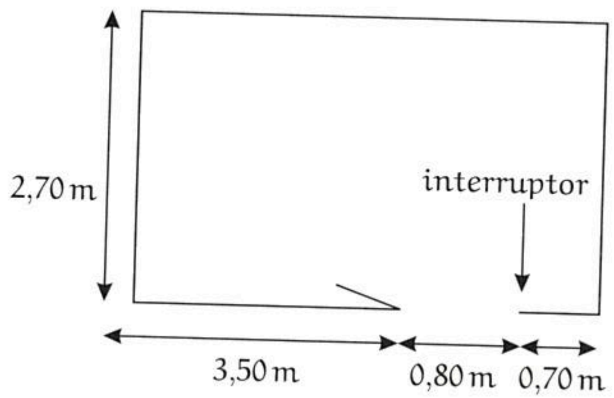

Figura 8.20

rmine o comprimento de fio necessário nos seguintes casos:
) fio deve se manter, tanto no teto como na parede, paralelo uma das três direções principais.
) fio, na parede, deve ficar colocado segundo a vertical.
) fio pode ficar em qualquer posição na parede e no teto.

Capítulo 9

Medindo Distâncias e Ângulos

O objetivo deste capítulo é colocar em prática os conceitos desenvolvidos nas seções anteriores para estudar problemas métricos no espaço, envolvendo cálculo de ângulos e distâncias. É importante destacar que praticamente todas as ferramentas que utilizaremos vêm da Geometria Plana. O segredo, na maior parte dos casos, está em identificar um ou mais planos contendo elementos relevantes dos problemas.

9.1 Distância Entre Dois Pontos

A distância entre dois pontos A e B é simplesmente a medida do segmento AB. No plano, a distância entre dois pontos é freqüentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras. Isto ocorre porque muitas vezes dispomos das medidas das projeções de um segmento segundo duas direções perpendiculares. Esta situação freqüentemente ocorre também no espaço. Novamente, a ferramenta a utilizar é o Teorema de Pitágoras.

Diagonal de um paralelepípedo. Consideremos o problema de calcular a diagonal $BH = d$ de um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH de arestas $AB = a, AD = b$ e $AE = c$ (figura 9.1). Resolvemos o problema utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD e BDH (este segundo triângulo é retângulo porque BH é perpendicular ao plano da base e, assim, perpendicular à reta BD que está contida nesta base).

Temos: $BD^2 = a^2 + b^2$ (no triângulo ABD) e $d^2 = BD^2 + c^2$ (no triângulo BDH). Logo, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Em um outro capítulo, quando estivermos estudando as superfícies de revolução, calcularemos as áreas da zona e das calotas esféricas. As fórmulas são simples e mesmo que não puderem ser demonstradas, fornecerão elementos para interessantes problemas.

11. Termos como "equador", "meridiano", "pólo norte", etc. devem ser utilizados nos problemas porque são conhecidos e sobretudo úteis para a localização de pontos sobre a esfera. O professor poderá explicar que fixando um equador e um meridiano, qualquer ponto da superfície da esfera fica determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude.

12. Dois meridianos delimitam uma região da superfície esférica chamada fuso esférico. Esses meridianos estão contidos em dois semi-planos cuja interseção contém um diâmetro da esfera e o ângulo entre eles é o ângulo do fuso.

Todos conhecem a expressão "fuso horário". Teoricamente, a superfície da Terra está dividida em 24 fusos, correspondendo a cada um, uma hora do dia. Essa situação sugere o interessante problema de determinar que horas são em determinada cidade do nosso planeta, no momento que essa pergunta estiver sendo feita no Rio de Janeiro. Para responder, basta saber as longitudes das duas cidades e conhecer como os fusos horários foram construídos. Essa construção se encontra no exercício 22 desse capítulo.

Imaginamos que essas atividades sejam feitas na forma de exercícios para não tornar a teoria ainda mais extensa. Isso se justifica porque, na verdade, não há nenhum teorema novo envolvido. Tudo o que se precisa utilizar são os teoremas iniciais da Geometria Espacial e as propriedades e relações métricas da geometria plana.

Exercícios

1. Mostre que as arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.

2. Considere os pontos médios das arestas BC, CD, BF, DH, EF e EH de um cubo. Mostre que esses seis pontos estão no mesmo plano.

3. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares?

4. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados? E se os planos forem paralelos?

5. Um pedaço de papel em forma de um quadrado ABCD é dobrado ao longo da diagonal AC de modo que os lados AB e AD passem a formar um ângulo de $60°$. A seguir, ele é colocado sobre uma mesa, apoiado sobre esses lados. Nessas condições, calcule o ângulo que a reta AC e o plano ABC formam com o plano horizontal.

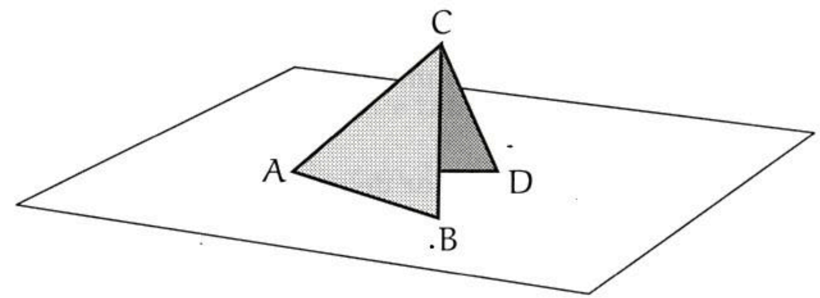

Figura 9.19

6. Um tetraedro pode ser construído a partir de um envelope da forma descrita abaixo.

a) Tome um envelope comum, feche-o e trace as diagonais do retângulo por ele determinado.
b) A seguir, corte o envelope como indicado, removendo seu quarto superior (b).
c) Agora, dobre o envelope, encaixando uma borda na outra. Pronto! Temos um tetraedro.

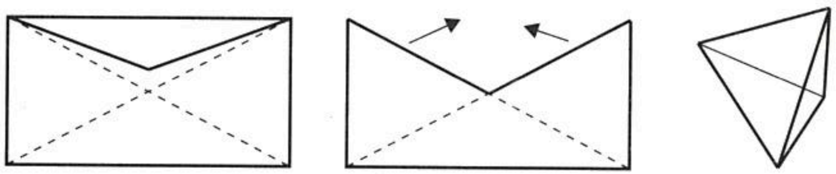

Figura 9.20

Que propriedades interessantes possui o tetraedro formado? Sob que condições ele é um tetraedro regular?

7. Considere três retas mutuamente perpendiculares x, y e z, concorrentes em O. Uma reta r passa por O e forma ângulos iguais a α, β e γ com x, y e z. Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

8. Sejam α e β dois planos secantes. Considere uma reta r qualquer contida em α. Mostre que o ângulo entre r e β é máximo quando r é perpendicular à interseção de α e β (retas de um plano α que são perpendiculares à sua interseção com o plano β são, por esta razão, chamadas de retas de máximo declive de α em relação a β.)

9. Considere um octaedro regular de aresta a. Determine:
a) A distância entre duas faces opostas.
b) O ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.

10. As moléculas de metano (CH_4) têm o formato de um tetraedro regular, com um átomo de hidrogênio em cada vértice, cada um deles ligado ao átomo de carbono no centro do tetraedro. Calcule o ângulo formado por duas dessas ligações.

12. Sejam r e s duas retas reversas ortogonais e MN o segmento da perpendicular comum. Tomam-se um ponto A sobre r e um ponto B sobre s. Calcular o comprimento do segmento AB em função de $MA = a, NB = b$ e $MN = c$.

13. Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é a perpendicular comum a elas.

14. Qual é a seção determinada em um tetraedro regular ABCD por um plano paralelo às arestas AB e CD e passando pelo ponto médio da aresta AC?

15. Sejam dois pontos A e B não diametralmente opostos de uma esfera. Mostre que existe um e somente um círculo máximo da esfera passando por A e B.

16. Sejam A e B pontos do espaço. Qual é o lugar geométrico dos pontos P do espaço tais que o ângulo APB seja reto?

17. Seja P um ponto exterior a um plano α e Q um ponto de α. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P às retas de α que passam por Q?

18. Em um tetraedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

19. Em um octaedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

20. Quatro esferas de raio 1 são tangentes entre si exteriormente três a três e tangenciam internamente uma esfera de raio R. Determine R.

21. Considere nove esferas de raio R, interiores a um cubo de aresta a, sendo uma com centro no centro do cubo e cada uma das demais tangentes a três faces e à esfera central. Calcule R em função de a.

22. O nosso planeta é dividido em regiões chamadas "fusos horários" de modo que, em cada uma delas, teoricamente todos os relógios devem marcar a mesma hora no mesmo instante. Qual é o ângulo central correspondente a um fuso horário?

23. O fuso horário de referência (chamado GMT-O) é a região compreendida entre as longitudes $-7,5°$ e $+7,5°$. Abaixo estão as ıgitudes de seis cidades:

Nova York	$-74°$
Rio de Janeiro	$-43°$
Paris	$2°$
Atenas	$24°$
Bagdá	$45°$
Calcultá	$88°$

são 12 horas no Rio, que horas serão nas outras cinco cidades?

Capítulo 10

Poliedros

10.1 Introdução

No programa de Geometria Espacial, este capítulo é quase independente dos demais. Vamos aqui estudar, de uma forma geral, os sólidos formados por "faces", os chamados poliedros. Antes de mais nada, é preciso estabelecer uma definição adequada para o nível de estudo que se pretende. Dizer apenas que poliedros são sólidos formados por faces (partes limitadas de um plano), pode dar uma idéia do que eles sejam, mas não serve absolutamente como definição. Aliás, uma das causas da dificuldade que os matemáticos do passado tiveram para demonstrar teoremas sobre poliedros, estava justamente na falta de uma definição precisa do significado dessa palavra. Por isso, vamos recomendar para o estudante do 2º grau, uma definição, que não permita grandes generalidades, mas seja suficiente para demonstrar os teoremas e propriedades importantes.

Uma primeira idéia para definir os poliedros é a seguinte:
"*Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono".

Cada um desses polígonos chama-se uma *face* do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado *vértice* do poliedro.