

Com  $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$  provamos que esta expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese,  $V' - A' + F' = 1$  vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

o que prova a relação preliminar.

b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com  $V_a$  vértices,  $A_a$  arestas e  $F_a$  faces) para a qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

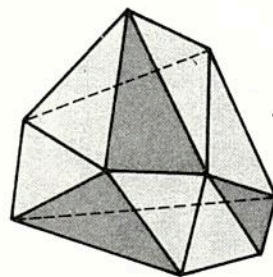
como

$$V_a = V, \quad A_a = A \quad \text{e} \quad F_a = F - 1, \quad \text{vem} \quad V - A + (F - 1) = 1 \quad \text{ou seja:}$$

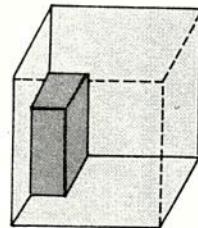
$$V - A + F = 2$$

**Nota:** O Teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o de poliedro convexo, razão pela qual vale para estes.

EXEMPLOS:

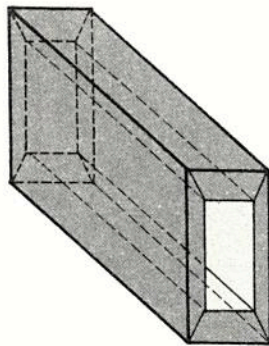


$$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$$



$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

Veja ao lado a figura de um poliedro para o qual não vale a relação de Euler.



Note que ele possui:

$$V = 16, \quad A = 32 \quad \text{e} \quad F = 16.$$

Então:

$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

## 116. Poliedro Euleriano

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros Eulerianos.

Todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.

## EXERCÍCIOS

J.172 Um poliedro convexo de onze faces, tem seis faces triangulares, cinco faces quadrangulares. Calcular o número de arestas e de vértices do poliedro.

**Solução**

Número de arestas:

nas 6 faces triangulares temos  $6 \times 3$  arestas e nas 5 faces quadrangulares  $5 \times 4$  arestas.

Cada aresta é comum a duas faces, todas as arestas foram contadas 2 vezes. Então:

$$2A = 6 \times 3 + 5 \times 4 \implies 2A = 38 \implies A = 19$$

Número de vértices:

com  $F = 11$  e  $A = 19$  na relação  $V - A + F = 2$ , temos:

$$V - 19 + 11 = 2, \quad \text{ou seja,} \quad V = 10$$

J.173 Determinar o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

J.174 Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

J.175 Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices de 6 unidades. Calcular o número de faces desse poliedro.

J.176 Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo-se que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é igual a 5.

J.177 Um poliedro convexo tem 11 vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

J.178 Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares de um poliedro com 20 arestas e 10 vértices.

J.179 Um poliedro de sete vértices tem cinco ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Quantas arestas e quantas faces tem o poliedro?

#### Solução

Arestas: o número de arestas dos 5 ângulos tetraédricos é  $5 \times 4$  e o número de arestas dos 2 pentaédricos é  $2 \times 5$ ; notando que cada aresta foi contada duas vezes pois é comum a dois ângulos poliédricos, temos:

$$2A = 5 \times 4 + 2 \times 5 \Rightarrow 2A = 30 \Rightarrow A = 15$$

Faces: com  $V = 7$  e  $A = 15$  em  $V - A + F = 2$ , vem  $F = 10$ .

J.180 Achar o número de faces de um poliedro convexo que possui 16 ângulos triedros.

J.181 Determinar o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por 5 triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos?

J.182 Um poliedro convexo possui 1 ângulo pentaédrico, 10 ângulos tetraédricos, e os demais triedros. Sabendo que o poliedro tem: número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares, 11 faces pentagonais, e no total 21 faces; calcule o número de vértices do poliedro convexo.

J.183 O "cubo-octaedro" possui seis faces quadradas e oito triangulares. Determinar o número de faces, arestas e vértices desse sólido que é euleriano.

J.184 Idem para o "tetra-hexaedro" (4 triângulos e 6 hexágonos).

J.185 Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que os números de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números 2 e 3 e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.

J.186 Num poliedro convexo, 4 faces são quadriláteros e as outras triângulos. O número de arestas é o dobro do número de faces triangulares. Quantas são as faces?

J.187 Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o de faces pentagonais de duas unidades. Calcular os números de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 7 vértices.

J.188 Um poliedro convexo de 24 arestas é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Seccionado por um plano convenientemente escolhido, dele se pode destacar um novo poliedro convexo, sem faces triangulares, com uma face quadrangular a mais e um vértice a menos que o poliedro primitivo. Calcular o número de faces do poliedro primitivo.

J.189 Achar o número de vértices de um poliedro convexo que tem  $a$  faces de  $\lambda$  lados,  $b$  faces de  $m$  lados e  $c$  faces de  $n$  lados. Discutir.

#### 117. Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é

$$S = (V - 2) \cdot 4r$$

onde  $V$  é o número de vértices e  $r$  é um ângulo reto.

#### Demonstração

$V$ ,  $A$  e  $F$  são nesta ordem os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Sejam  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$  os números de lados das faces  $1, 2, 3, \dots, F$ , ordenadamente. A soma dos ângulos de uma face é  $(n - 2) \cdot 2r$ .

Para todas as faces temos:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 2r + (n_2 - 2) \cdot 2r + (n_3 - 2) \cdot 2r + \dots + (n_F - 2) \cdot 2r = \\ &= n_1 \cdot 2r - 4r + n_2 \cdot 2r - 4r + n_3 \cdot 2r - 4r + \dots + n_F \cdot 2r - 4r = \\ &= (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F) \cdot 2r - 4r - 4r - \dots - 4r \end{aligned}$$

Sendo  $F$  vezes

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F = 2A$$

(pois cada aresta foi contada duas vezes em  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F$ ), substituindo, vem

$$S = 2A \cdot 2r - F \cdot 4r \Rightarrow S = (A - F) \cdot 4r \quad (1)$$

Como vale a relação de Euler

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 2 = A - F \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos:

$$S = (V - 2) \cdot 4r$$



## 122. Observação

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

## EXERCÍCIOS

J.190 Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces tem de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos?

### Solução

$$S = 32r \Rightarrow (V - 2) \cdot 4r = 32r \Rightarrow V = 10$$

$$(A = 15, V = 10, V - A + F = 2) \Rightarrow F = 7$$

x faces quadrangulares e y pentagonais, então

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = 2$$

J.191 Calcular em graus a soma dos ângulos das faces de um:

- a) tetraedro ; b) hexaedro ; c) octaedro ; d) dodecaedro ; e) icosaedro.

J.192 Um poliedro convexo de 28 arestas possui faces triangulares e heptagonais. Quantas tem de cada espécie, se a soma dos ângulos das faces é 64 retos?

J.193 A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é  $720^\circ$ . Calcular o número de faces, sabendo que é os  $2/3$  do número de arestas.

J.194 Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a  $2160^\circ$ . Determinar o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo-se que ele tem 15 arestas.

J.195 Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais tiram-se as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcular o número de arestas, faces e vértices da superfície poliédrica aberta que resta.

J.196 Generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro Euleriano.

### Solução

Seja um poliedro convexo onde:

- $F_3$  representa o número de faces triangulares,
- $F_4$  representa o número de faces quadrangulares,
- $F_5$  representa o número de faces pentagonais,
- $F_6$  representa o número de faces hexagonais,
- $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$

$$\text{Então } F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \dots \quad (1)$$

Sendo cada aresta comum a duas faces teremos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \dots \quad (2)$$

J.197 Demonstrar que em qualquer poliedro convexo, é par o número de faces que tem número ímpar de lados.

Tese  $\{ F_3 + F_5 + F_7 + \dots \}$  é par

De fato, da relação (2) temos:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + \dots = 2A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 + F_5 + F_7 + \dots = 2A - 2F_4 - 4F_6 - 6F_8 - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 + F_5 + F_7 + \dots = 2(A - F_4 - 2F_6 - 3F_8 - \dots)$$

o que prova a tese.

J.198 Seja um poliedro convexo onde:

- $V_3$  representa o número de ângulos triédricos,
- $V_4$  representa o número de ângulos tetraédricos,
- $V_5$  representa o número de ângulos pentaédricos,
- $V_6$  representa o número de ângulos hexaédricos,
- $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$   $\cdot$

Então:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \dots \quad (3)$$

Sendo que cada aresta une dois vértices, teremos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \dots \quad (4)$$

**J.199** Demonstrar que em qualquer poliedro convexo, é par o número de ângulos poliédricos que tem número ímpar de arestas.

**J.200** Demonstrar que em qualquer poliedro convexo vale a relação:

$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \dots$$

**J.201** Demonstrar que em qualquer poliedro convexo vale a relação:

$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 6F_7 + \dots$$

#### Solução

Tomando-se as relações (1) e (2) de J.196, a relação de Euler e, eliminando  $A$  nessas relações obtemos:

$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + \dots$$

**J.202** Em qualquer poliedro euleriano, a soma do número de faces triangulares com o número de triedros é superior ou igual a 8.

**J.203** Demonstre que os números  $F$ ,  $V$ ,  $A$ , das faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer estão limitados por:

$$a) A + 6 \leq 3F \leq 2A$$

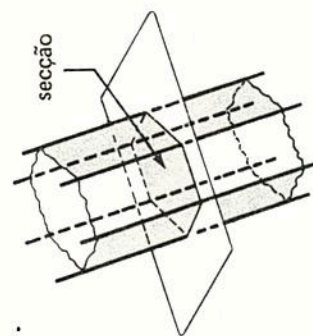
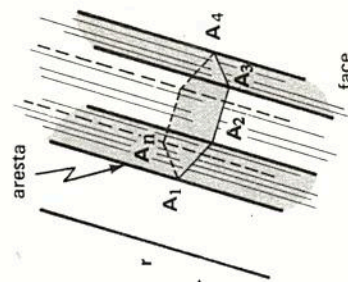
$$b) A + 6 \leq 3V \leq 2A$$

## I. PRISMA ILIMITADO.

### 123. Definição

Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo)  $A_1 A_2 \dots A_n$  de  $n$  lados e uma reta  $r$  não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se *prisma ilimitado convexo* ou *prisma convexo indefinido* à reunião das retas paralelas a  $r$  e que passam pelos pontos da região poligonal dada.

Se a região poligonal (polígono)  $A_1 A_2 \dots A_n$  for côncava o prisma ilimitado resultará côncavo.



### 124. Elementos

Um prisma ilimitado convexo possui:  $n$  arestas,  $n$  diedros e  $n$  faces (que são faixas de plano).

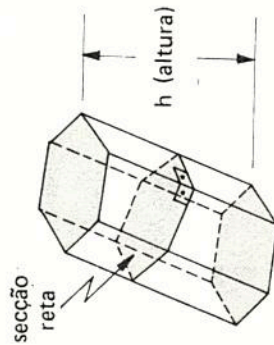
130. A altura de um prisma é a distância  $h$  entre os planos das bases.

Devemos observar que para o prisma é válida a Relação de Euler:

$$V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$

### 131. Seções

Seção de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a seção de um prisma é um polígono com um vértice em cada aresta lateral.



Seção reta ou seção normal é uma seção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

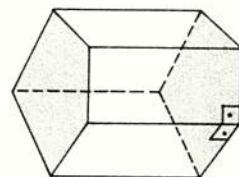
### 132. Superfícies

Superfície lateral é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_L$ .

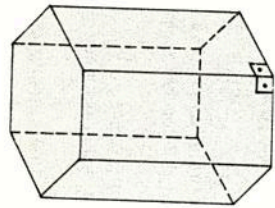
Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada área total e indicada por  $A_t$ .

### 133. Classificação

Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.



Prisma reto (pentagonal)



Prisma regular (hexagonal)

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

### 134. Natureza de um prisma

Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc, conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

### EXERCÍCIOS

J.204 Achar a natureza de um prisma sabendo-se que ele possui:

- a) 7 faces      b) 8 faces      c) 15 arestas      d) 24 arestas

J.205 Provar que a soma dos ângulos de todas as faces de um prisma de  $n$  faces laterais vale  $S = (n - 1) \cdot 8r$ , onde  $r = 90^\circ$ .

#### 1ª Solução

Se o prisma tem  $n$  faces laterais, sua base é um polígono convexo de  $n$  lados, e a soma dos ângulos internos desse polígono é dada por  $(n - 2) \cdot 2r$ .

Cada face lateral é um paralelogramo e a soma dos ângulos internos de cada uma é  $4r$ .

Como o prisma possui 2 bases e  $n$  faces laterais, vem:

$$S = 2 \cdot (n - 2) \cdot 2r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 4r - 8r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 8r - 8r \Rightarrow S = (n - 1) \cdot 8r$$

#### 2ª Solução

O prisma possui  $2n$  vértices. Sendo a soma dos ângulos das faces dada por  $S = (V - 2) \cdot 4r$ , temos:

$$S = (2n - 2) \cdot 4r \Rightarrow S = (n - 1) \cdot 8r$$

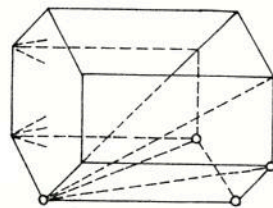


- J.206 Achar a natureza de um prisma sabendo-se que a soma dos ângulos das faces é 72 retos.
- J.207 Achar a natureza de um prisma sabendo-se que a soma dos ângulos das faces é 32 retos.
- J.208 Calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma oblíquo, sabendo que o prisma tem 8 faces.
- J.209 A soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma é igual a  $96r$ . Calcular a soma dos ângulos internos de uma de suas bases.

J.210 Quantas diagonais possui um prisma cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados?

#### Solução

Observemos que, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Seja então um prisma cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados.



Unindo-se um vértice de uma das bases aos vértices da outra base temos  $(n - 3)$  diagonais, (eliminamos 2 diagonais de face e uma aresta).

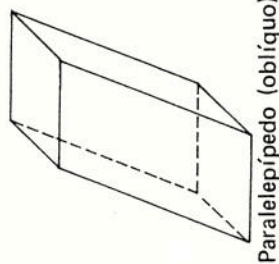
Como existem  $n$  vértices na base tomada o número total de diagonais do prisma é  $n \cdot (n - 3)$ .

J.211 Prove que o número de diagonais de um prisma é igual ao dobro do número de diagonais de uma de suas bases.

J.212 Calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma que possui 40 diagonais.

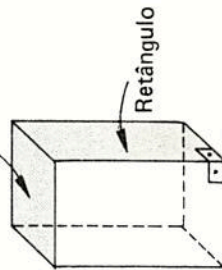
J.213 Calcular a soma dos ângulos diedros de um prisma que tem por base um polígono convexo de  $n$  lados.

### III. PARELELEPÍEDOS E ROMBOEDROS



Paralelepípedo (oblíquo)

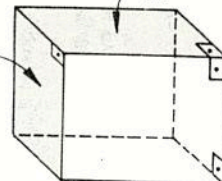
paralelogramo



Retângulo

paralelepípedo reto

retângulo



Retângulo

paralelepípedo reto-retângulo

134. *Paralelepípedo* é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

135. *Paralelepípedo reto* é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

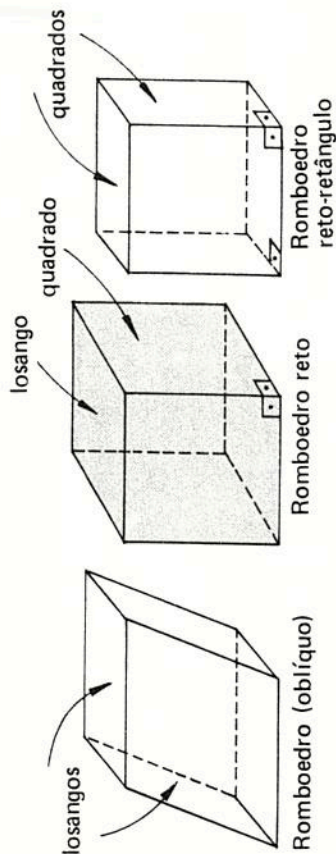
136. *Paralelepípedo reto-retângulo* ou *paralelepípedo retângulo*, ou *ortóedro* é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.

137. *Cubo* é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

138. *Romboedro* é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos.

139. *Romboedro reto* é um paralelepípedo reto, que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).

140. *Romboedro reto-retângulo* ou *cubo* é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.

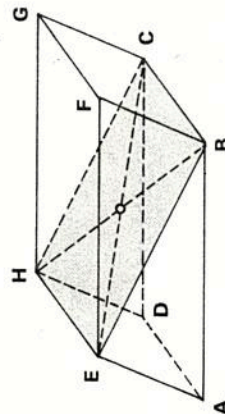


#### EXERCÍCIOS

- J.214 Calcular a soma dos ângulos das faces de um paralelepípedo.  
 J.215 Calcule a soma dos diedros formados pelas faces de um paralelepípedo.  
 J.216 Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo são congruentes.  
 J.217 Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo interceptam-se nos respectivos pontos médios.

#### Solução

Pelas arestas opostas (BC e EH, AD e FG) passam planos diagonais que determinam no paralelepípedo seções que são paralelogramos. As diagonais do paralelepípedo são diagonais desses paralelogramos. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam nos respectivos pontos médios, as diagonais do paralelepípedo também o fazem.

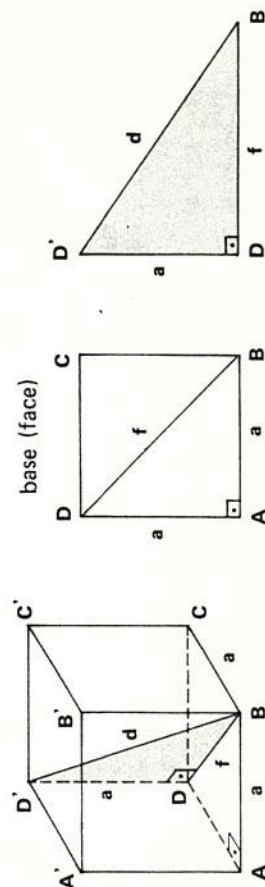


J.218 Mostre que a seção feita em um paralelepípedo, por um plano que intercepta 4 arestas paralelas é um paralelogramo.

#### IV. DIAGONAL E ÁREA

141. Dado um cubo de aresta  $a$ , calcular sua diagonal  $d$  e sua área total  $S$ .

#### Solução



a) Cálculo de  $d$

Inicialmente calculemos a medida  $f$  de uma diagonal de face

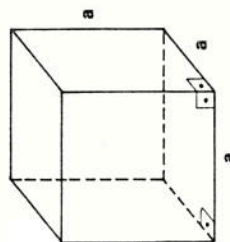
$$\text{No } \triangle BAD: f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$$

$$\text{No } \triangle BDD': d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = a\sqrt{3}$$

b) Cálculo de  $S$

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado  $a$ . A área de cada um é  $a^2$ . Então, a área total do cubo é:

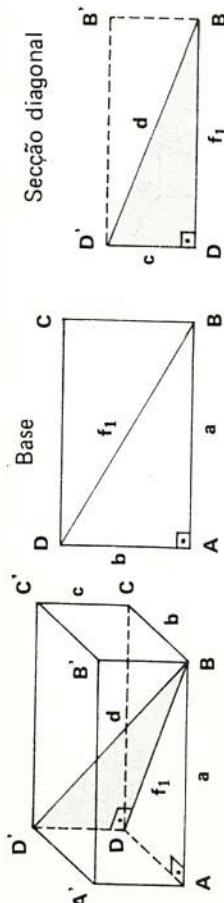


$$S = 6a^2$$



142. Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , calcular as diagonais  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  das faces, a diagonal do paralelepípedo e sua área total  $S$ .

*Solução*



- a) Cálculo de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ .

Seendo  $f_1$  a diagonal da face  $ABCD$  (ou  $A'B'C'D'$ ), temos:

$$f_1^2 = a^2 + b^2 \implies f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Seendo  $f_2$  a diagonal da face  $ABB'A'$  (ou  $DCC'D'$ ) e  $f_3$  a diagonal da face  $ADD'A'$  (ou  $BCC'B'$ ) temos:

$$f_2^2 = a^2 + c^2 \implies f_2 = \sqrt{a^2 + c^2} \quad f_3^2 = b^2 + c^2 \implies f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- b) Cálculo de  $d$ .

$$\text{No } \triangle BDD': d^2 = f_1^2 + c^2 \implies d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \implies d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- c) Cálculo da área total  $S$ .

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois de lados  $(ABCD, A'B'C'D')$  com dimensões  $a$  e  $b$ , outros dois  $(ABB'A', DCC'D')$  com dimensões  $a$  e  $c$  e os últimos dois  $(ADD'A', BCC'B')$  com dimensões  $b$  e  $c$ . Logo,

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \implies$$

$$\implies S = 2(ab + ac + bc)$$

## EXERCÍCIOS

- J.219 Calcular a medida da aresta de um cubo, sabendo-se que a diagonal do cubo excede de  $2 \text{ cm}$  a diagonal da face.

*Solução*

$$d - f = 2 \implies a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 2 \implies a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \implies a = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Resposta:  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \text{ cm}$

- J.220 Sabe-se que a diagonal de um cubo mede  $2,5 \text{ cm}$ . De quanto se deve aumentar a aresta desse cubo para que sua diagonal passe a medir  $5,5 \text{ cm}$ ?

- J.221 A aresta de um cubo mede  $2 \text{ cm}$ . De quanto se deve aumentar a diagonal desse cubo de modo que a aresta do novo cubo seja igual a  $3 \text{ cm}$ ?

- J.222 De quanto diminui a aresta de um cubo quando a diagonal diminui de  $3\sqrt{3} \text{ cm}$ ?

- J.223 Calcular a medida da diagonal e a área total de um cubo, cuja soma das medidas das arestas vale  $30 \text{ cm}$ .

- J.224 Calcular a medida da diagonal de um cubo, sabendo-se que a sua área total mede  $37,5 \text{ cm}^2$ .

- J.225 Calcular a medida da diagonal e a área total de um cubo, sabendo-se que a diagonal de uma face mede  $5\sqrt{2} \text{ cm}$ .

- J.226 Expressar a área total de um cubo:

- a) em função da medida da diagonal da face ( $f$ ).  
b) em função da medida da sua diagonal ( $d$ ).

- J.227 Se aumentarmos a aresta de um cubo de  $2\sqrt{3} \text{ cm}$ , obtemos um outro cubo cuja diagonal mede  $30 \text{ cm}$ . Determinar a área total do cubo primitivo.

- J.228 A diferença entre as áreas totais de dois cubos é  $164,64 \text{ cm}^2$ . Calcular a diferença entre as suas diagonais, sabendo que a aresta do menor mede  $3,5 \text{ cm}$ .

- J.229 Aumentando-se a medida da diagonal de um cubo de  $5 \text{ cm}$ , a sua área total aumentará de  $110 \text{ cm}^2$ . Determinar a medida de sua diagonal.

- J.230 O que ocorre com a área total de um cubo se:

- a) sua aresta dobra  
b) sua aresta é multiplicada por  $k$ .

- J.231 Calcular a aresta de um cubo, sabendo-se que a soma dos comprimentos de todas as arestas com todas as diagonais e com as diagonais das seis faces vale  $32 \text{ cm}$ .



J.232 Calcular a diagonal e área total de um paralelepípedo retângulo sabendo que as suas dimensões são 5 cm, 7 cm e 9 cm.

J.233 Calcular a medida da terceira dimensão de um paralelepípedo sabendo que duas delas medem 4 cm e 7 cm, e que sua diagonal mede  $3\sqrt{10}$  cm.

J.234 Determinar a diagonal de um paralelepípedo sendo  $62 \text{ cm}^2$  sua área total e 10 cm a soma de suas dimensões.

J.235 Determinar a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede  $25\sqrt{2}$  cm, sendo a soma de suas arestas igual a 60 cm.

J.236 Determinar as dimensões de um paralelepípedo retângulo sabendo que são proporcionais aos números 1, 2, 3 e que a área total do paralelepípedo é  $352 \text{ cm}^2$ .

#### Solução

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow (a = k, b = 2k, c = 3k) \quad (1)$$

$$S = 352 \Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 352 \Rightarrow ab + ac + bc = 176 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) vem:

$$1k \cdot 2k + 1k \cdot 3k + 2k \cdot 3k = 176 \Rightarrow 11k^2 = 176 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$$

Retornando à (1) temos:  $a = 4$ ,  $b = 8$  e  $c = 12$ .

Resposta: As dimensões medem 4 cm, 8 cm e 12 cm.

J.237 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo-se que são proporcionais aos números 5, 8, 10, e que a diagonal mede 63 cm.

J.238 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que elas são proporcionais aos números 2, 3 e 6 e que a diagonal mede 35 cm.

J.239 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 3, 6 e 9. Calcular essas dimensões e a área total, sabendo que a diagonal mede 63 cm.

J.240 As dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$  de um ortoedro são proporcionais a 6, 3 e 2. Sabendo-se que a área total é  $288 \text{ cm}^2$ , calcular as dimensões e a diagonal.

J.241 As dimensões de um paralelepípedo são inversamente proporcionais aos números 6, 4 e 3. Determiná-las, sabendo que a área total deste paralelepípedo é  $208 \text{ m}^2$ .

J.242 A altura de um ortoedro mede 10 cm e as bases são quadrados de diagonal  $5\sqrt{2}$  cm. Calcular a área da superfície lateral.

J.243 Determinar a área total de um paralelepípedo retângulo cuja base é um losango de diagonais 12 cm e 14 cm, sendo 6 cm a altura do paralelepípedo.

J.244 Determinar a área total de um paralelepípedo reto cuja base é um paralelogramo de lados consecutivos 8 dm e 12 dm sendo  $30^\circ$  o ângulo entre os lados, dado a altura 6 dm do paralelepípedo.

J.245 Com uma corda disposta em cruz, deseja-se amarrar um pacote em forma de ortoedro, cujas dimensões são 1,40 m, 0,60 m e 0,20 m. Se para se fazer os nós gastam-se 20 cm, perguntase: Quantos metros de corda serão necessários para amarrar o pacote?

J.246 Determinar a área de uma placa de metal necessária para a construção de um depósito em forma de ortoedro (aberto em cima), sabendo-se que o depósito tem 2m de largura, 1,50 m de altura, e 1,20 m de comprimento.

J.247 Em um paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.

J.248 Dois paralelepípedos retângulos têm diagonais iguais, e a soma das 3 dimensões de um é igual à soma das três do outro. Provar que as áreas totais de ambos são iguais.

J.249 As dimensões  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um paralelepípedo retângulo são proporcionais à  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Dada a diagonal  $d$ , calcular essas dimensões.

J.250 As dimensões de um ortoedro são inversamente proporcionais à  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Calcular essas dimensões dada a diagonal  $d$ .

#### Solução

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{r} k \quad y = \frac{1}{s} k \quad z = \frac{1}{t} k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{st}{rst} k$$

$$y = \frac{rt}{rst} k$$

$$z = \frac{rs}{rst} k$$

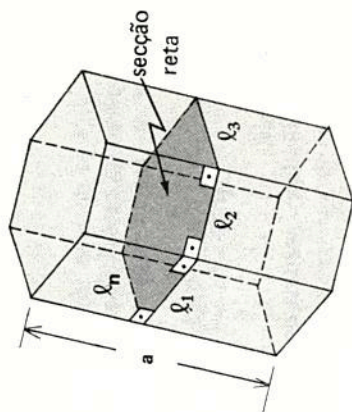
Mudando a constante para  $K = \frac{k}{rst}$  vem:

$$x = stK \quad y = rtK \quad z = rsK \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1): K^2(s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2) = d^2 \Rightarrow$$

## V. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL DO PRISMA

143. A área lateral ( $A_L$ ) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.



Seja um prisma de aresta lateral medindo  $a$  e  $l_1, l_2, \dots, l_n$  as medidas dos lados de uma seção reta. Cada face lateral é um paralelogramo de base  $a$  e altura igual a um lado da seção reta.

Assim,

$$A_L = a l_1 + a l_2 + \dots + a l_n = (l_1 + l_2 + \dots + l_n) \cdot a \Rightarrow A_L = 2p \cdot a$$

onde

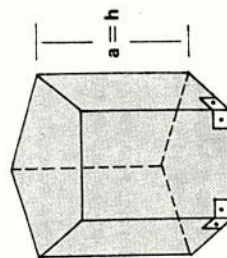
$2p$  é a medida do perímetro da seção reta  $a$  é a medida da aresta lateral.

144. A área total de um prisma é a soma das áreas das faces laterais ( $A_L$ ) com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

$$A_T = A_L + 2B \Rightarrow A_T = 2p \cdot a + 2B$$

onde  $B$  é a área de uma base.



145. No prisma reto a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base é seção reta. Então:

$$A_L = 2p \cdot a \Rightarrow A_L = 2ph$$

$$A_T = A_L + 2B \Rightarrow A_T = 2p \cdot a + 2B \Rightarrow A_T = 2p \cdot h + 2B$$

$$\Rightarrow K = \frac{d}{\sqrt{s^2 t^2 + r^2 t^2 + r^2 s^2}}$$

Substituindo em (2), vem a resposta:

$$x = \frac{std}{\sqrt{s^2 t^2 + r^2 t^2 + r^2 s^2}}; \quad y = \frac{rtd}{\sqrt{s^2 t^2 + r^2 t^2 + r^2 s^2}}$$

$$z = \frac{rsd}{\sqrt{s^2 t^2 + r^2 t^2 + r^2 s^2}}$$

J.251 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais a  $r, s, t$ . Calcular essas dimensões, sabendo que a área é  $S$ .

J.252 As áreas de três faces adjacentes de um ortoedro estão entre si como  $p, q$  e  $r$ . A área total é  $2Q^2$ . Determinar as três dimensões.

J.253 A área de um paralelepípedo reto-retângulo é  $720 \text{ cm}^2$ ; determinar suas dimensões sabendo que sua soma vale  $34 \text{ cm}$  e que a diagonal de uma das faces vale  $20 \text{ cm}$ .

### Solução

Sendo  $x, y$  e  $z$  as dimensões temos:

$$S = 720 \Rightarrow xy + xz + yz = 360 \quad (1)$$

$$x + y + z = 34 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = f_1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 \quad (3)$$

De (2) vem:

$$(x + y + z)^2 = 34^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{400} + 2(xy + xz + yz) = 1156$$

Com (3) e (1) temos:

$$400 + z^2 + 720 = 1156 \Rightarrow z^2 = 36 \Rightarrow z = 6$$

Substituindo  $z = 6$  em (2) ficamos com:  $x + y = 28$

$$(x + y = 28, x^2 + y^2 = 400) \Rightarrow x = 16 \text{ e } y = 12 \text{ (ou } x = 12 \text{ e } y = 16)$$

Resposta: As dimensões medem  $6 \text{ cm}, 12 \text{ cm}$  e  $16 \text{ cm}$ .

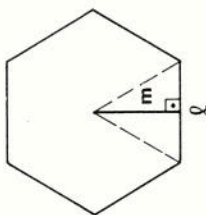
J.254 Determinar as dimensões de um ortoedro, sendo a soma de suas dimensões igual a  $45 \text{ cm}$ , a diagonal da base igual a  $25 \text{ cm}$  e a área total igual a  $1300 \text{ cm}^2$ .

J.255 Determinar as dimensões de um paralelepípedo retângulo, dada a sua soma  $43a$ , a diagonal  $25a$ , e a área de uma face  $180a^2$ .

J.256 Calcular as dimensões de um ortoedro cuja diagonal mede  $13 \text{ cm}$ , de área total  $192 \text{ cm}^2$  e sabendo que a área da seção, por um plano por duas arestas opostas é  $60 \text{ cm}^2$ .



146. No *prisma regular* a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base, que é seção reta, é um polígono regular.



A área da base ( $B$ ) é a soma de  $n$  triângulos de base  $l$  (medida do lado) e altura  $m$  (medida do apótema). Então:

$$B = n \cdot \left( \frac{l \cdot m}{2} \right) \Rightarrow B = \frac{(n \cdot l) \cdot m}{2}$$

mas,  
 $n \cdot l = 2p =$  medida do perímetro

Daí,

$$B = \frac{2p \cdot m}{2} \Rightarrow B = p \cdot m$$

$$A_l = 2p \cdot a \Rightarrow A_l = 2p \cdot h$$

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot h + 2p \cdot m \Rightarrow A_t = 2p(h + m)$$

## EXERCÍCIOS

J.257 A altura de um prisma reto mede 15 cm e a base é um triângulo cujos lados medem 20 cm, 30 cm e 40 cm. Calcular a área lateral do sólido.

J.258 Um prisma pentagonal regular tem 8 cm de altura sendo 7 cm a medida da aresta da base. Calcular a área lateral desse prisma.

J.259 Determinar a área lateral de um prisma reto de 25 cm de altura, cuja base é um hexágono regular de apótema  $4\sqrt{3}$  cm.

J.260 A aresta lateral de um prisma reto mede 12 m; a base é um triângulo retângulo de  $150 \text{ m}^2$  de área e cuja hipotenusa mede 25 m. Calcular a área lateral desse prisma.

J.261 Num prisma oblíquo a aresta lateral mede 5 cm, a seção reta é um trapézio isósceles cuja altura mede 8 cm e as bases medem 7 cm e 19 cm, respectivamente. Calcular a área lateral desse prisma.

J.262 Calcular a medida da aresta lateral de um prisma cuja área lateral mede  $72 \text{ dm}^2$ , sendo os lados da seção reta respectivamente 3 dm, 4 dm e 5 dm.

J.263 Determinar a área lateral de um prisma triangular oblíquo, sendo a sua seção reta um triângulo equilátero de  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$  de área e um dos lados da seção igual a aresta lateral do prisma.

J.264 Calcular a área lateral do prisma oblíquo, cuja seção reta é um triângulo equilátero de  $4\sqrt{3} \text{ m}^2$  de área, sabendo que a aresta lateral é igual ao perímetro da seção reta.

J.265 Calcular a área total de um prisma hexagonal regular de 12 m de aresta lateral e 4 m de aresta da base.

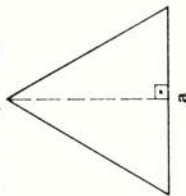
J.266 Um prisma hexagonal regular tem a área da base igual a  $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Calcular a área lateral sabendo que sua altura é igual ao apótema da base.

J.267 A aresta da base de um prisma hexagonal regular mede 8 cm. De quanto se deve diminuir a altura desse prisma de modo que se tenha um novo prisma com área total igual à área lateral do prisma dado?

J.268 Um prisma triangular regular tem a aresta da base medindo 10 dm. De quanto se deve aumentar a altura, conservando-se a mesma base, para que a área lateral do novo prisma seja igual à área total do prisma dado?

### Solução

Área de um triângulo equilátero de lado  $a$

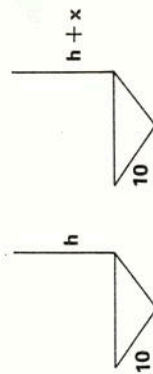


$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Sejam  $A_{l_1}$  e  $A_{t_1}$  as áreas lateral e total do prisma e  $A_{l_2}$  a área lateral do novo prisma.

Sendo  $B$  a área da base, temos:

$$B = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$



Supondo que a altura  $h$  do prisma teve um aumento  $x$ , vem:

$$A_{t_1} = A_{l_1} + 2B \Rightarrow A_{t_1} = 3(10 \cdot h) + 2 \cdot 25\sqrt{3} \Rightarrow A_{t_1} = 30h + 50\sqrt{3}$$

$$A_{l_2} = 3(10 \cdot h_2) \Rightarrow A_{l_2} = 30(h + x)$$

$$A_{t_1} = A_{l_2} \Rightarrow 30h + 50\sqrt{3} = 30(h + x) \Rightarrow 30x = 50\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Resposta:  $\frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ dm}$ .

J.269 Calcular a área total do prisma reto, cuja base é um losango de diagonais respectivamente iguais a 6 m e 8 m, sabendo que sua aresta lateral vale o quíntuplo da distância entre duas de suas faces laterais opostas.

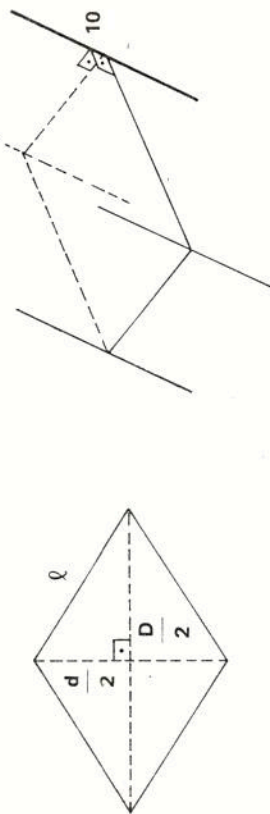
J.270 Um prisma reto tem por base um losango em que uma de suas diagonais é os 3/4 da outra, e a soma de ambas é 14 cm. Calcular a área total desse prisma, sabendo que sua altura é igual ao semiperímetro da base.

J.271 Calcular a área lateral do prisma hexagonal regular, cuja altura é igual ao diâmetro do círculo circunscrito à base, sabendo que as menores diagonais da base medem 15 dm.

J.272 A seção reta de um prisma oblíquo é um losango, cujas diagonais são diretamente proporcionais a 3 e 4. Calcular a área lateral do prisma, sabendo que sua aresta lateral mede 10 cm e que a área de sua seção reta é igual a 54 cm<sup>2</sup>.

#### Solução

Seja  $B$  a área,  $\ell$  o lado,  $d$  e  $D$  as diagonais do losango, temos:



$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{d}{3} = k \\ B &= 54, \quad B = \frac{D \cdot d}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4k \cdot 3k}{2} = 54 \Rightarrow k = 3$$

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = 4k^2 + \frac{9}{4}k^2 = \frac{25k^2}{4} \Rightarrow \ell = \frac{5k}{2} \\ \ell &= \frac{5k}{2} \Rightarrow \ell = \frac{5 \cdot 3}{2} \Rightarrow \ell = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Seja  $A_\ell$  a área lateral, temos:

$$A_\ell = 4(\ell \cdot a) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 300$$

Resposta: 300 cm<sup>2</sup>

J.273 Calcular a área lateral de um prisma oblíquo sendo 8 cm a medida de sua aresta lateral, a seção reta do prisma um losango de 125 cm<sup>2</sup> de área e, a razão das diagonais desse losango igual a 2/5.

J.274 Quer-se construir um depósito de cereais fechado, em forma de prisma reto hexagonal regular, de modo que sua superfície lateral seja 6 vezes a da base. Sabendo-se que esse depósito será construído com uma prancha de alumínio de 210 m<sup>2</sup>, determinar a altura desse depósito.

J.275 Calcular os senos dos ângulos formados pelos pares de faces laterais de um prisma oblíquo, cuja seção reta é um triângulo sabendo que dois dos lados da seção medem respectivamente 8 m e 10 m e que a aresta lateral e a área lateral do prisma são respectivamente iguais a 12 m e 288 m<sup>2</sup>.

J.276 Um prisma reto de 5 cm de altura tem por base um trapézio isósceles cujas bases medem 15 cm e 12 cm. Sabendo que um dos ângulos da base maior do trapézio mede 60°, calcular:

- a) a área da base do prisma
- b) a área lateral do prisma
- c) a área total do prisma.

J.277 Determinar a área da base e a área total de um prisma cuja base é um trapézio isósceles que tem a soma das bases igual a 18 m sendo a base menor do trapézio os 4/5 da maior, sendo 45° um dos ângulos da base maior do trapézio e a altura do prisma os 3/4 da base menor do trapézio.

#### VI. VOLUME DE UM SÓLIDO

147. Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

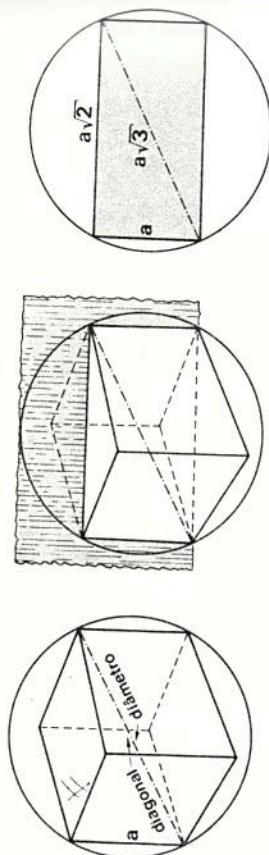
- 1º) sólidos congruentes têm volumes iguais;
- 2º) se um sólido  $S$  é a reunião de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  que não têm pontos interiores comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  com  $S_2$ .

Os sólidos são medidos por uma unidade que, em geral, é um cubo. Assim, o volume deste cubo é 1. Se sua aresta mede 1 cm (um centímetro), seu volume será 1 cm<sup>3</sup> (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1 m, seu volume será 1 m<sup>3</sup>.

148. Dois sólidos são equivalentes, se e somente se, eles têm volumes iguais na mesma unidade de volume.



2. Cálculo do raio (R) da esfera circunscrita a um cubo de aresta  $a$ .



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo.

$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

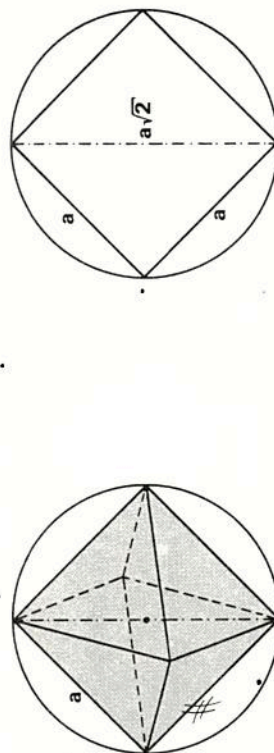
## EXERCÍCIOS

- J.956 Determinar o volume de uma esfera inscrita em um cubo de  $1 \text{ dm}$  de aresta.
- J.957 Determinar o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de  $12 \text{ cm}$  de aresta.
- J.958 Determinar o volume de um cubo inscrito em uma esfera de  $8 \text{ cm}$  de raio.
- J.959 Determinar a área lateral e o volume de um cubo circunscrito a uma esfera de  $25 \pi \text{ cm}^2$  de superfície.
- J.960 Determinar o volume de uma esfera circunscrita a um cubo cuja área total mede  $54 \text{ cm}^2$ .
- J.961 Determinar o volume de um cubo inscrito em uma esfera cujo volume mede  $2,304\pi \text{ cm}^3$ .
- J.962 Determinar a razão entre a área da esfera e a do cubo inscrito nessa esfera.
- J.963 Calcular a razão entre os volumes de dois cubos, o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a uma mesma esfera.
- J.964 Determinar a razão entre o volume da esfera inscrita e da esfera circunscrita a um cubo de aresta  $a$ .

- J.965 Calcular o volume de um cubo inscrito em uma esfera cujo raio mede  $r$ .
- J.966 Determinar o volume de um cubo inscrito em uma esfera em função da medida  $A$  da superfície da esfera.
- J.967 Determinar o volume de um cubo inscrito em uma esfera em função da medida  $V$  do volume da esfera.
- J.968 Determinar a área da superfície esférica circunscrita a um cubo, em função da medida  $A$  da área total do cubo.
- J.969 Determinar a distância do centro de uma esfera inscrita em um cubo a um dos vértices do cubo, sabendo que a superfície da esfera mede  $54,76 \pi \text{ cm}^2$ .
- J.970 Determinar a diagonal de um cubo circunscrito a uma esfera na qual uma cunha de  $60^\circ$  tem área total igual a  $60 \pi \text{ cm}^2$ .
- J.971 Uma esfera está inscrita em um cubo. Calcule o volume do espaço compreendido entre a esfera e o cubo, sabendo que a área lateral do cubo mede  $144 \pi \text{ cm}^2$ .
- J.972 Cada vértice de um cubo é centro de uma esfera de raio igual a  $4 \text{ cm}$ , sendo  $8 \text{ cm}$  a medida da aresta do cubo, calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

## II. ESFERA E OCTAEDRO REGULAR

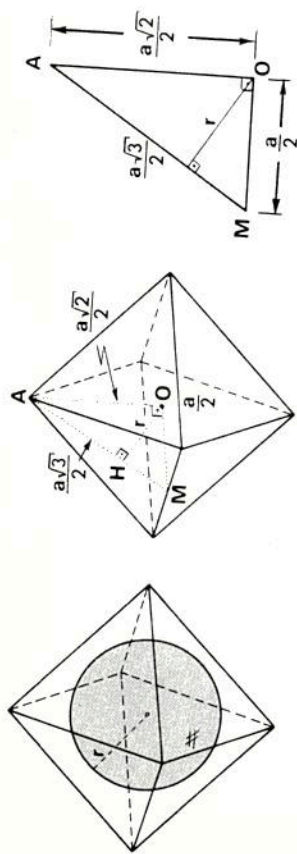
1. Cálculo do raio (R) da esfera circunscrita a um octaedro regular de aresta  $a$ .



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do octaedro (diagonal do quadrado).

$$2R = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

2. Cálculo do raio ( $r$ ) da esfera inscrita num octaedro regular de aresta  $a$ .



O raio da inscrita é a altura OH do triângulo retângulo AOM.  
Aplicando relações métricas no  $\triangle AOM$  (hipotenusa x altura = produto dos catetos.).

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

**Nota:** A distância entre duas faces paralelas do octaedro regular é  $2r$ .

### EXERCÍCIOS

- J.973** Calcule o volume de um octaedro regular inscrito em uma esfera de volume igual a  $36\pi \text{ cm}^3$ .
- J.974** Determinar o volume compreendido entre uma esfera de raio  $r$ , e um octaedro regular inscrito nessa esfera.
- J.975** Determinar a área total do octaedro regular inscrito em uma esfera cujo círculo máximo tem  $36\pi \text{ cm}^2$  de área.
- J.976** Duas esferas são circunscrita e inscrita a um mesmo octaedro. Calcular a razão entre seus volumes.
- J.977** Calcular o perímetro  $P$  e a área  $S$  da seção produzida num octaedro regular circunscrito a uma esfera de  $\sqrt{6} \text{ dm}$  de diâmetro pelo plano que contém o centro dessa esfera e que é paralelo a uma das faces do octaedro.
- J.978** Dada uma esfera de  $6\sqrt{2} \text{ m}$  de diâmetro, considere um octaedro regular nela inscrito, bem como o plano paralelo a duas faces opostas do octaedro, tal que suas distâncias a essas duas faces sejam diretamente proporcionais aos números 1 e 2. Calcule a área da seção que o plano considerado produz no octaedro regular.

### III. ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

1. Inicialmente, vejamos uma propriedade dos tetraedros regulares:  
"Num tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer a quatro faces é igual à altura do tetraedro".

Sendo  $I$  um ponto interior;  $x, y, z$  as respectivas distâncias às faces  $ABC, ABD, ACD$  e  $BCD$  devemos provar que:

$$x + y + z + t = h$$

onde  $h$  é a altura do tetraedro.

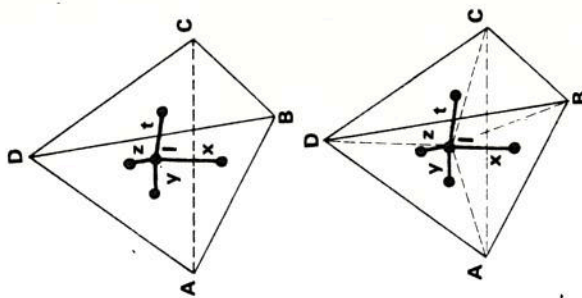
De fato, a soma dos volumes das pirâmides  $IABC, IABD, IACD$  e  $IBCD$  é igual ao volume de  $ABCD$ .

Sendo  $S$  a área de uma face do tetraedro, vem:

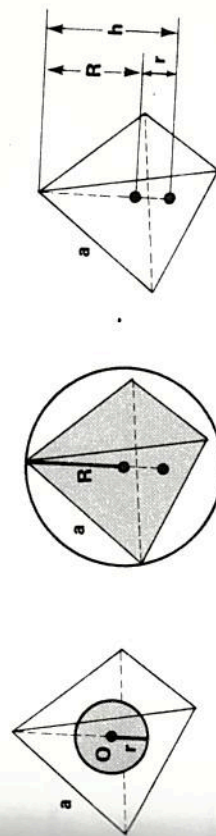
$$\frac{1}{3} Sx + \frac{1}{3} Sy + \frac{1}{3} Sz + \frac{1}{3} St = \frac{1}{3} Sh$$

então:

$$x + y + z + t = h$$



2. Cálculo do raio da esfera inscrita ( $r$ ) e da esfera circunscrita ( $R$ ):



Sendo o centro ( $O$ ) um ponto interior do tetraedro regular, vale a propriedade acima, isto é:

$$x + y + z + t = h \text{ e com } x = y = z = t = r, \text{ vem}$$

$$4r = h \Rightarrow r = \frac{1}{4} h$$



e como  $R + r = h$ , então:  $R = \frac{3}{4}h$

Sendo  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$  temos:

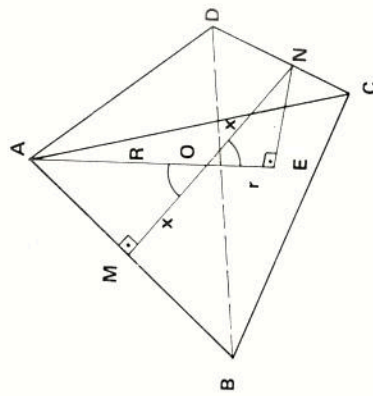
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \quad \text{e} \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

3. O raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular é média geométrica (ou média proporcional) entre os raios das esferas inscrita e circunscrita ao mesmo tetraedro.

*Solução*

$R$ ,  $r$  e  $x$  são os respectivos raios da circunscrita, inscrita e tangente.

$$\begin{aligned} \triangle AMO \sim \triangle NEO &\Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{R}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = R \cdot r \end{aligned}$$



## EXERCÍCIOS

J.979 Um tetraedro regular é inscrito numa esfera de 12 cm de diâmetro. Qual o volume do tetraedro.

J.980 Um tetraedro regular é circunscrito a uma esfera. Se a área da superfície da esfera é  $3\pi \text{ m}^2$ , calcular o volume do tetraedro.

J.981 Determinar a área total e o volume de um tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio  $R$ .

J.982 Determinar o volume da esfera inscrita num tetraedro regular de aresta  $a$ .

J.983 Calcular a área da superfície da esfera circunscrita a um tetraedro regular de aresta  $a$ .

J.984 Calcular as áreas e os volumes das esferas inscrita e circunscrita num tetraedro regular de aresta  $a$ .

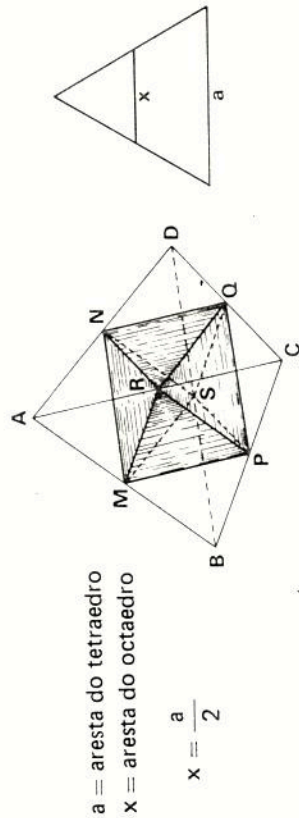
J.985 Determinar a medida da aresta de um tetraedro regular em função do volume  $V$  da esfera circunscrita.

J.986 Em uma esfera inscreve-se um tetraedro regular, e neste tetraedro regular uma nova esfera. Determinar a relação entre as superfícies das esferas.

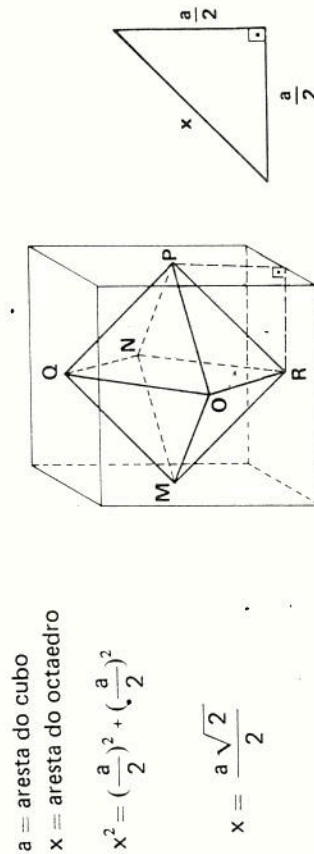
J.987 Em um tetraedro regular inscreve-se uma esfera, e nesta esfera inscreve-se um novo tetraedro regular. Determinar a relação entre os volumes dos dois tetraedros.

## IV. INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO ENVOLVENDO POLIEDROS REGULARES.

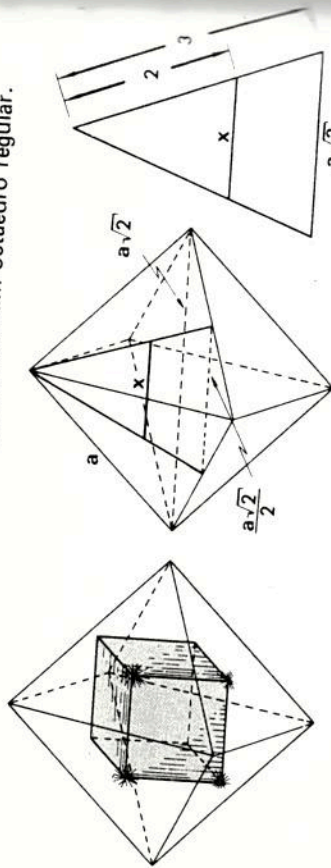
1. Octaedro regular determinado pelos pontos médios das arestas de um tetraedro regular.



2. Octaedro determinado pelos centros das faces de um cubo.



3. Cubo determinado pelos centros das faces de um octaedro regular.

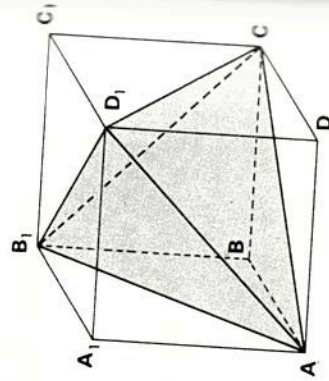


$a$  = aresta do octaedro

$x$  = aresta do cubo

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

4. Tetraedro regular com vértices nos vértices de um cubo.



$ACB_1D_1$  é tetraedro regular

$a$  = aresta do cubo

$x$  = aresta do tetraedro

$$x = a\sqrt{2}$$

## EXERCÍCIOS

- J.988 Dado um tetraedro regular de aresta  $a$ , determinar:

- a aresta do octaedro cujos vértices são pontos médios das arestas do tetraedro.
- a aresta do cubo cujos vértices são centros das faces do octaedro obtido acima.
- a aresta de um novo octaedro, cujos vértices são centros das faces do cubo obtido acima.

- J.989 Determinar o volume de um tetraedro regular inscrito num cubo de  $3\text{ m}$  de aresta.

- J.990 O segmento  $AB$  de medida  $8\text{ cm}$  é uma das diagonais de um octaedro regular. Calcular a área total do hexaedro convexo, cujos vértices são os pontos médios das arestas do octaedro dado.

- J.991 Calcular a razão entre as áreas totais  $A$  e  $B$ , respectivamente de um cubo e do octaedro regular nele inscrito.

- J.992 (EPUSP-65) Escolha 4 dos vértices de um cubo de modo a formar um tetraedro regular. Sendo  $V$  o volume do cubo, qual o volume desse tetraedro?

- J.993 (IESCSP-55) Dado um tetraedro regular, estudar o poliedro  $P$  que tem como vértices os pontos médios das arestas do tetraedro. Se  $\ell$  é o lado do tetraedro, calcular a área total e o volume de  $P$ .

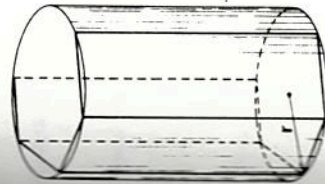
- J.994 (IESCSP-56) Dado um cubo de aresta igual a  $\ell$ , considera-se o octaedro que tem por vértices os centros das faces do cubo. Calcular a área da superfície esférica inscrita no octaedro.

- J.995 Dados um cubo e um tetraedro regular nele inscrito, considere o plano que contém o centro do cubo e que é paralelo a uma das faces do tetraedro. Calcule a razão entre as áreas das secções que esse plano produz nos dois sólidos, dados.

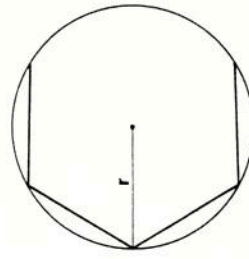
## PRISMA E CILINDRO

1. Prisma inscrito em cilindro.

Eles têm a mesma altura. Basta trabalhar nas bases.

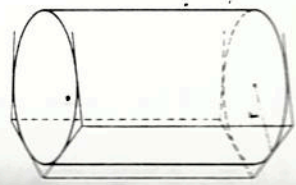


Base

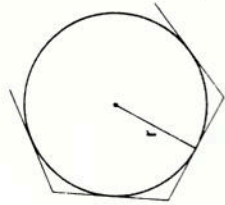


O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma.

2. Cilindro inscrito em prisma.



Base



O raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma.