As Coisas que Ensinamos

RPM 03

Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos

Zoroastro Azambuja Filho

Por intermédio de um colega, tomei conhecimento do artigo intitulado "O Teorema de Euler sobre poliedros", escrito pelo Professor Elon Lages Lima e publicado no número de outubro de 1982 do "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática".

Sou professor de Matemática e já perdi a conta do número de vezes que demonstrei - ou julguei tê-lo feito - em classe o Teorema de Euler para poliedros. Por isso fiquei muito chocado ao saber que a demonstração que sempre usei, e que consta de todos os livros-texto que conheço, não está certa.

Na esperança de aprender uma demonstração correta, li com grande atenção o referido artigo. Estou agora convencido de que a argumentação que eu utilizava é insuficiente. Infelizmente, a maneira sugerida pelo autor do artigo para corrigir o que ele chama "a demonstração de Cauchy" me parece excessivamente elaborada e longa para o nível dos alunos de nossos colégios. Por outro lado, num trecho do seu trabalho, o Professor Elon menciona uma demonstração particular, válida apenas para poliedros convexos, e faz referência a um livro de autores alemães, traduzido para o inglês, onde se encontra tal prova.

Consegui uma cópia xerox daquela demonstração e, depois de meditar assunto, decidi que prestaria um serviço aos meus colegas divulgando a minha maneira de ver essa prova do Teorema de Euler.

O teorema a demonstrar é o seguinte:

Seja P um poliedro convexo com F faces. A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $F - A + V = 2$.

Para que não haja ambigüidade quanto aos termos que empregaremos, é conveniente relembrar algumas definições.

Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se *convexo* quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C.

Um *poliedro* é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados as *faces* do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se *arestas* do poliedro e os vértices: dos polígonos são também chamados *vértices do poliedro*. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia.

Diz-se que um poliedro é *convexo* quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro. Aceitaremos este fato como parte da definição, embora saibamos que ele pode ser demonstrado a partir dela.

Para demonstrar o Teorema de Euler começamos escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e é perpendicular a reta r. O plano H será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas retas verticais. H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado o semi-espaço superior; diremos que seus pontos estão acima de H.

Para melhor ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando à pino sobre o semi-espaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto x do semi-espaço superior corresponde um ponto x em H, chamado a sombra de x, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x. A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras das pontos de X.

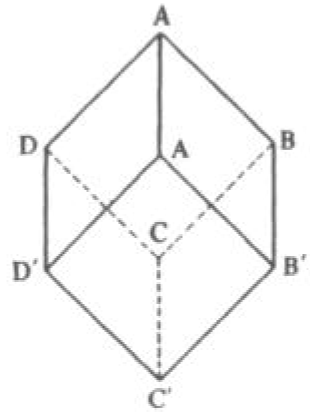
A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

A observação acima pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P.

Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno γ' é a sombra de uma poligonal fechada γ, formada por arestas de P. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a γ). A poligonal γ é chamada o *contorno aparente* do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a γ') é sombra de 2 pontos de P. Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado *sombrio*.

Assim, a poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente γ.

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértIce A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces AA'B'B, AA'D'D e ABCD ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A'.



Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente y. Cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1 . Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'. Usaremos a notação P_1 para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2 , formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente y. A regra que associa a cada ponto y de P_2 sua sombra y' também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'. Escreveremos P_2 para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em P_2 .

Complementaremos os preparativos para a demonstração do Teorema de Euler observando que se decompusermos cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números F, A e V individualmente, mas a expressão F–A+V permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o numero V não muda. Na expressão F–A+V, os acréscimos de F e A se cancelam. Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que 3F = 2A esta relação será usada logo mais.

Montando o cenário e apresentados os personagens, iniciaremos agora a ação. A idéia da demonstração consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a p radianos. Portanto $S = \pi \cdot F$. Como F = 3F – 2 = 2A – 2F, podemos escrever:

$$S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F.$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular S_1, partimos da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triangulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Daí resulta que S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais esta decomposto o polígono convexo P'_1, sombra de P_1. Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de soma-lo triângulos por triangulo, como acima.

Sejam V_1 o numero de vértices iluminados, V_2, o numero de vértices sombrios e V_0 o numero de vértices do contorno aparente γ. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 também o número de vértices (e de lados) da poligonal γ', contorno do polígono convexo P'.

Em P_1 temos V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno γ'. A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno γ' é igual a $\pi\ (V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que:

$$S_1 = 2\,\pi\,.\,V_1 + \pi\,(V_0 - 2).$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos:

$$S_2 = 2\,\pi\,.\,V_2 + \pi\,(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi$$

Comparando com a igualdade $S = 2\,\pi\,.\,A - 2\,\pi.\,F$, acima, obtida, e dividindo por $2\,\pi$, resulta que

$$A - F = V - 2,$$

ou seja,

$$F - A + V = 2,$$

como queríamos demonstrar.