Geometria I

José Luiz Rosas Pinho Eliezer Batista Neri Terezinha Both Carvalho



Governo Federal

Presidente da República: Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro de Educação: Fernando Haddad

Secretário de Ensino a Distância: Carlos Eduardo Bielschowky

Coordenador Nacional da Universidade Aberta do Brasil: Celso Costa

Universidade Federal de Santa Catarina

Reitor: Alvaro Toubes Prata

Vice-Reitor: Carlos Alberto Justo da Silva

Secretário de Educação a Distância: Cícero Barbosa

Pró-Reitora de Ensino de Graduação: Yara Maria Rauh Müller Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão: Débora Peres Menezes Pró-Reitor de Pós-Graduação: Maria Lúcia de Barros Camargo

Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social: Luiz Henrique Vieira Silva

Pró-Reitor de Infra-Estrutura: João Batista Furtuoso Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Cláudio José Amante

Centro de Ciências da Educação: Wilson Schmidt

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Centro de Filosofia e Ciências Humanas: Roselane Neckel

Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância

Coordenação de Curso: Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenação de Tutoria: Jane Crippa

Coordenação Pedagógica/CED: Roseli Zen Cerny

Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM: Nereu Estanislau Burin

Comissão Editorial

Antônio Carlos Gardel Leitão

Albertina Zatelli

Elisa Zunko Toma

Igor Mozolevski

Luiz Augusto Saeger

Roberto Corrêa da Silva

Ruy Coimbra Charão

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Cláudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart

Braga, Natal Anacleto Chicca Junior.

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues,

Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Laura Martins Rodrigues

Ilustrações: Paula Cardoso Pereira, Maximilian Vartuli, Laura Martins Rodrigues, Kallani Maciel Bonelli, Jean Henrique de Oliveira Menezes

Capa: Thiago Felipe Victorino, Laura Martins Rodrigues

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Alessandra Zago Dahmer

Revisão do Design Instrucional: Marcia Maria Bernal

Revisão Gramatical: Maria Tereza de Queiroz Piacentini

Copyright © 2010, Universidade Federal de Santa Catarina/CFM/CED/UFSC
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer
meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Coordenação
Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância.

Ficha Catalográfica

P654g Pinho, José Luiz Rosas

Geometria I / José Luiz Rosas Pinho, Eliezer Batista, Neri Terezinha Both Carvalho – 2. ed. – Florianópolis : EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

330 p.

ISBN 978-85-99379-69-1

1. Geometria. 2. Polígonos. 3. Figuras Planas. I. Pinho, José Luiz Rosas. II. Batista, Eliezer. III. Carvalho, Neri Terezinha Both. IV. Título.

CDU 514

Sumário

Apresentação	. 7
Introdução	9
1 Fundamentos da Geometria	17
1.1 Ponto, reta e plano	19
1.2 Medidas de comprimento	26
1.3 Medidas de comprimento (continuação)	36
2 Ângulos e Medida de Ângulos	19
2.1 Conceituação de Ângulo	51
2.2 Interior e Exterior de um Ângulo	54
2.3 Ângulos Adjacentes e Comparação de Ângulos	56
2.4 Suplemento de um Ângulo, Ângulo Reto	
e Retas Perpendiculares	58
2.5 O Postulado 4 de Euclides e Medida de Ângulo	60
2.6 Bissetriz de um Ângulo, Mediatriz de um Segmento e	
Distância de um Ponto a uma Reta	65
2.7 O Postulado 5 de Euclides e Formulações Equivalentes	69
3 Triângulos	77
3.1 Construções com Régua e Compasso	
3.2 Triângulos e seus Elementos	
3.3 A Soma dos Ângulos de um Triângulo e	
suas Conseqüências	85
3.4 Congruência de Triângulos	89
3.4.1 Definição de Congruência de Triângulos	89
3.4.2 Casos de Congruência para Triângulos Quaisquer	90
3.4.3 Casos de Congruência de Triângulos Retângulos	93
3.5 Conseqüências dos Casos de	
Congruência de Triângulos10	Э0
3.5.1 O Triângulo Isósceles e os Ângulos da Base 10	Э0
3.5.2 Dois Lugares Geométricos: Bissetriz e Mediatriz 10	04
3.5.3 Segmento Unindo os Pontos Médios	
de Dois Lados de um Triângulo1	11
3.5.4 Linhas Notáveis e Pontos Notáveis	
de um Triângulo1	14
3.5.5 Relação Entre lados e Ângulos Opostos	
de um Triângulo12	20

	3.5.6 A Desigualdade Triangular	121
	3.5.7 Posições Relativas de Retas e	
	Circunferências – Tangentes	126
	3.5.8 Ângulos na Circunferência	140
	3.6 Conclusão	158
4 P	olígonos	167
	4.1 Linhas poligonais e polígonos	169
	4.2 Ângulos e diagonais de um polígono	174
	4.3 Quadriláteros	181
	4.3.1 Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis	182
	4.3.2 Quadriláteros especiais	185
5 Á	reas de Figuras Planas	203
	5.1 O conceito de área	205
	5.2 Áreas de polígonos elementares	209
	5.3 Área de uma figura plana geral	218
	5.4 Aplicações de áreas	222
	5.5 O teorema de Pitágoras e suas conseqüências	226
6 T	ransformações Geométricas	241
6 T	ransformações Geométricas Introdução	
6 T	-	243
6 T	Introdução	243 245
6 T	Introdução	243 245 247
6 T	Introdução	
	Introdução	

Apresentação

Caro estudante,

É muito bom estar com você nesse momento em que busca o conhecimento científico. Com muita dedicação e persistência você terá sucesso.

Esta disciplina possui uma carga horária de 100 horas, das quais 20 horas serão destinadas à prática de ensino. Isso não significa, entretanto, que você vai dispender apenas desse tanto de horas para cursá-la. Como você já sabe, em um curso na modalidade presencial, a carga horária de uma disciplina corresponde às horas de aula em classe, isto é, aos momentos em que o conteúdo é apresentado. Na modalidade de ensino à distância, esse primeiro encontro com o conteúdo se concretiza durante a primeira leitura que você fará. Não será um professor a lhe contar o conteúdo, você o conhecerá por meio da leitura individual. Depois deste primeiro encontro,você provavelmente necessitará de praticamente o dobro de horas de estudo individual e em grupo para se sentir seguro quanto à aprendizagem do conteúdo. Mas dirá: "- O mérito é meu, eu aprendi". Portanto, reserve 200 horas para se dedicar a esta disciplina.

Estudar os conteúdos deste livro, é estudar um pouco de Geometria Quantitativa, ou seja, alguns aspectos métricos da geometria. Nesta disciplina você estudará: medida de comprimentos, medida de ângulos, medida de áreas e as relações entre elas. Também estudará questões relativas à congruência e à semelhança entre figuras bem como a relação entre semelhanças e áreas. Ainda neste livro, você estudará construções geométricas com régua e compasso, e transformações geométricas que constituem um poderoso ferramental para a resolução de problemas geométricos.

O objetivo desta disciplina é o de que você adquira os conceitos básicos da geometria plana, do ponto de vista da geometria métrica.

A organização do livro

Os conteúdos deste livro estão organizados em capítulos. Cada capítulo foi elaborado segundo o modelo seguinte:

Introdução

Esta se compõe de duas partes: os objetivos do capítulo e a apresentação dos conteúdos que serão estudados.

Desenvolvimento do conteúdo

Apresentamos os conteúdos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, os quais sugerimos que você resolva. Em caso de dúvida, solicite a orientação do tutor. A resolução dos exercícios é a melhor forma de auto-avaliação e de fixação da aprendizagem. Sempre que possível, faça as leituras individualmente, discuta com colegas e resolva os exercícios em grupo. Mas, cuidado! Trabalhar em grupo não significa dividir tarefas, e sim compartilhar dúvidas e soluções.

Ao final de cada capítulo, comentamos alguma referência bibliográfica, as quais são muito úteis para consulta, seja em termos de sugestão de exercícios, seja para você ter uma outra versão de abordagem do mesmo conteúdo.

Você, além do que for apresentado no livro didático, terá um elenco de atividades propostas no ambiente virtual de aprendizagem. Por isso, siga a orientação dos professores e dos tutores, e estude. A sua aprendizagem dependerá de você. Nós vamos ajudá-lo oferecendo os meios. Esta será nossa tarefa, mas a sua tarefa é mais importante e mais nobre, ela pode ser explicitada com dois verbos: estudar e aprender.

Introdução

O presente livro trata dos conteúdos relativos à disciplina Geometria I, da primeira fase do curso de Licenciatura em Matemática, modalidade à distância, da Universidade Federal de Santa Catarina. Antes de tudo, devemos ressaltar a importância da geometria dentro da matemática como um todo. Embora presentes nos livros didáticos, os conteúdos de geometria sempre são deixados para as últimas semanas de aula, quando o professor não tem mais tempo de abordá-la com profundidade. A geometria fica reduzida, então, a algumas fórmulas para se calcular áreas e volumes. Dentre nossos objetivos, pretendemos que o estudo da geometria seja resgatado e valorizado no Ensino Básico.

Medida de terra.

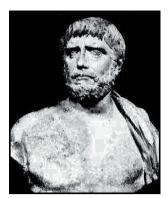
Mas a pergunta principal é: por que estudar a geometria? Basicamente, as origens da geometria remontam às próprias origens da civilização. Podemos ver registros escritos sobre temas geométricos oriundos das civilizações egípcia, suméria e babilônica, muito anteriores aos gregos, que são considerados os fundadores da geometria como disciplina autônoma. A própria palavra Geometria nos fornece alguns indícios sobre as motivações fundamentais que os povos antigos tiveram para o estudo desta disciplina. Em primeiro lugar, o desenvolvimento da agricultura naturalmente originou o problema a respeito da demarcação de terras, não somente por questões envolvendo a propriedade, mas também para se avaliar a produtividade através do cálculo da área de um determinado terreno. De igual modo, também a questão do armazenamento motivou o estudo do cálculo de volumes. Uma segunda fonte de inspiração para o estudo de problemas geométricos na Antigüidade foi a arquitetura. Certamente, a construção de grandes monumentos, como templos e pirâmides, além de um colossal esforço humano, requereu o uso de técnicas geométricas. Finalmente, motivações religiosas fizeram com que os povos olhassem para o céu e se preocupassem com o movimento dos astros. A astronomia, portanto, pode ter sido uma terceira fonte para as origens da geometria na Antigüidade.

A contribuição dos gregos para a geometria foi muito mais no sentido de se elaborar melhor a estrutura de pensamento do que

propriamente na invenção de técnicas de cunho prático. O enunciado preciso dos problemas, o caráter geral das proposições e a necessidade de demonstrações para o estabelecimento de uma verdade matemática são, de fato, uma revolução no pensamento humano. O primeiro geômetra que a história nos apresenta é Thales de Mileto. Muito embora não se saibam muitos detalhes de sua vida, devido à falta de registros precisos, os escritos de matemáticos gregos posteriores que chegaram até nós atribuem a Thales a demonstração de alguns resultados geométricos simples, por exemplo, que o ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Mas a geometria chegou ao seu formato plenamente desenvolvido graças à obra de Euclides de Alexandria. Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.) foi um professor, matemático platônico, criador da famosa geometria euclidiana: o espaço euclidiano, imutável, simétrico e geométrico, que se manteve incólume no pensamento matemático medieval e renascentista. Somente nos tempos modernos puderam ser construídos modelos de geometrias não-euclidianas. Euclides escreveu treze volumes denominados "Os Elementos".

Nestes volumes, faz uma sistematização dos resultados geométricos mais importantes desenvolvidos até a sua época, com um rigor nas demonstrações que se tornou padrão para toda a matemática por mais de dois milênios.

Tendo em vista o que foi apresentado nos parágrafos anteriores, podemos dar então uma resposta inicial à pergunta levantada sobre a importância de se estudar geometria. Primeiramente, a geometria é um patrimônio cultural cuja construção levou milênios e cuja importância para o que hoje denominamos civilização é imensurável. Assim, o estudo da geometria nos faz sentir que somos parte de uma história cujo início se perde nas brumas do tempo, e cujo desenrolar se mostra vivo e atuante até hoje. Em segundo lugar, a geometria possui uma força estética que se manifesta no encadeamento e na inter-relação de idéias. Ao estudar geometria, somos levados necessariamente a fazer demonstrações. O hábito da demonstração matemática influi positivamente para o nosso crescimento e amadurecimento intelectual, e para uma melhor estruturação de nossos raciocínios, inclusive em questões não propriamente de cunho matemático. Levarmos,



Thales, chamado Tales de Mileto, nasceu em Mileto, antiga colônia grega na Ásia menor, atual Turquia, por volta de 625 a.C. e faleceu em, aproximadamente, 547 a.C. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre e www.fi.uba.ar.



Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.) Fonte: www.fi.uba.ar



Os Elementos

Sempre o cálculo de áreas e volumes estará presente na reforma de uma casa ou na sua decoração. portanto, a geometria ao Ensino Básico proporcionará, em um futuro não muito distante, uma geração de cidadãos mais bem preparados e habituados a utilizar os recursos de um pensamento organizado, mesmo nas questões do seu dia-a-dia. Por fim, mas não menos importante, a geometria fornece um corpo de conhecimentos que podem ser úteis na vida cotidiana. Embora a divisão dos trabalhos em nossa sociedade seja tão fragmentada, o conhecimento da geometria, no mínimo, fará do cidadão um bom profissional ou orientará melhor a escolha dos profissionais que trabalharão para ele.

Os tópicos desenvolvidos nesta primeira disciplina de geometria correspondem à disciplina de Geometria Quantitativa que aborda principalmente os aspectos métricos da geometria. Neste primeiro curso, trataremos da medida de comprimentos, medida de ângulos, medida de áreas, e as relações entre elas. Também abordaremos questões relativas à congruência e à semelhança entre figuras, bem como a relação entre semelhanças e áreas. Finalmente, este livro também tratará de temas como construções geométricas com régua e compasso e transformações geométricas, que constituem um poderoso ferramental para a resolução de problemas geométricos. Apesar de todos os resultados apresentados neste texto estarem acompanhados de uma demonstração, nosso objetivo com este primeiro curso é desenvolver sua sensibilidade, caro estudante, para a resolução de problemas e não tanto para compreender os pormenores da estrutura lógica da teoria. Em muitas ocasiões, faremos uso de sua intuição geométrica para levar adiante nossas argumentações. Portanto, poderá ser que algumas definições ou demonstrações não estejam perfeitamente rigorosas em um primeiro momento. Também exploraremos, dentro do possível, sua habilidade, estudante em fazer construções geométricas, justificando passo a passo suas construções.

Geometria II

Geometria III

Durante o curso, você cursará uma outra disciplina de **Geometria Quantitativa**, correspondendo principalmente aos conteúdos de trigonometria e geometria espacial. Após estas duas disciplinas de Geometria Quantitativa, você ainda irá estudar **Geometria Euclidiana**, na qual será enfatizada a estrutura lógica da teoria. Nesta disciplina, você terá que demonstrar cada proposição a

partir dos **axiomas** e das proposições anteriormente demonstradas. Muitas vezes, você terá a impressão de estar demonstrando o óbvio, mas somente assim, após um trabalho árduo, é que os conteúdos das duas geometrias anteriores estarão firmemente estabelecidos, com todo o rigor necessário. Finalmente, você ainda cursará uma disciplina de Geometria Analítica, na qual os fatos geométricos poderão ser transformados, através do método das coordenadas, em expressões algébricas.

Devemos sempre relembrar-lhe, caro estudante, que o caráter do curso à distância exige uma dedicação ao material muito maior que em um curso presencial. Este material está organizado em capítulos, cada um deles dividido em seções. As seções foram desenhadas para que você consiga ler o seu conteúdo em um período de uma a duas horas e fazer ao final os exercícios. Muitas vezes, você poderá não compreender todos os detalhes das demonstrações dos teoremas apresentados. Em um primeiro momento, o importante será compreender bem suas hipóteses e suas afirmações para poder utilizá-los nos exercícios do final da seção. Algumas demonstrações, no entanto, são consideradas essenciais. Neste caso, você será solicitado a refazer estas demonstrações nos exercícios, às vezes simplesmente como um exercício de releitura cuidadosa do texto, às vezes tentando demonstrações alternativas. Também, ao final de cada capítulo, você terá oportunidade de resolver problemas um pouco mais elaborados, que envolvam todo o conteúdo do capítulo bem como tópicos dos capítulos anteriores. Estes problemas devem ser pensados como desafios, no intuito de realmente verificar se o seu aprendizado foi satisfatório. Devemos ressaltar que a dedicação diária é essencial para o bom andamento da disciplina. As dúvidas que você tiver serão respondidas no atendimento on-line com os tutores ou com os próprios professores.

Este livro está dividido em 7 capítulos. No **capítulo 1**, lançaremos os fundamentos da geometria, os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo de todo o livro. Mostraremos que para todo segmento de reta está associado um número real positivo, o seu comprimento. Finalmente, mostraremos ainda no primeiro capítulo que é possível medir o comprimento de arcos de curvas através de aproximações por poligonais.

Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira não necessitando, portanto, de demonstração. No capítulo 2, será introduzido o conceito de ângulo bem como a sua medida. Veremos que o quarto postulado de Euclides fornece uma unidade natural de medida de ângulo, o ângulo reto. Em termos de medida de ângulos, introduziremos a noção de grau, como unidade usual de medida de ângulo. Ainda neste capítulo, serão introduzidos os conceitos de bissetriz de um ângulo e de mediatriz de um segmento e, finalizando, será discutido o quinto postulado de Euclides, que diz respeito às propriedades de retas paralelas e que faz com que os resultados da geometria usual, em sua grande maioria, possam ser obtidos.

No capítulo 3, introduziremos os conceitos relacionados a triângulos e discutiremos os casos de congruência entre triângulos e suas conseqüências. Este, certamente, é um dos capítulos com mais densidade de resultados e pode ser considerado o "coração" da disciplina. Será neste capítulo que os conceitos introduzidos nos capítulos anteriores serão utilizados para se resolver problemas. Também no capítulo 3, serão explorados problemas envolvendo construções com régua e compasso. As construções geométricas estarão presentes ao longo de todo o livro, mas neste capítulo, em particular, haverá uma discussão mais aprofundada a respeito de tais construções.

O **capítulo 4** tratará de polígonos no plano com especial ênfase nos diferentes tipos de quadriláteros e na classificação dos mesmos.

No capítulo 5, definiremos o conceito de área para figuras planas e deduziremos as fórmulas conhecidas para o cálculo das áreas de alguns polígonos mais importantes. Também mostraremos que a medida de área para uma figura plana delimitada por uma curva fechada e simples arbitrária pode ser feita por aproximações utilizando polígonos. Finalmente, ainda no capítulo 5, demonstraremos um dos teoremas centrais neste curso, o teorema de Pitágoras, e enfatizaremos o seu caráter de um teorema sobre áreas, mostrando em diversos momentos através do texto a importância de se compreender o teorema de Pitágoras dessa maneira.

O capítulo 6 tratará das transformações geométricas. Este capítulo possui um caráter conceitual profundo. Primeiramente por-

que podemos ver o conceito de função presente em quase todos os contextos da geometria. Em segundo lugar, porque o estudo das transformações geométricas abre as portas para o estudo da estrutura de grupo e explicita a importância desta estrutura algébrica nos próprios fundamentos da geometria. O matemático Felix Klein (1849-1925), no final do século XIX, propôs uma reformulação radical de toda a geometria em termos da teoria de grupos. Esta reformulação é conhecida como o Programa de Erlangen e mostra a importância da teoria de grupos para a geometria. Finalmente, mas não menos importante, o estudo das transformações geométricas pode nos auxiliar na resolução de problemas geométricos que, de outra forma, pareceriam insolúveis ou extremamente complicados, produzindo resoluções extremamente elegantes, engenhosas e instrutivas.

No capítulo 7, trataremos do conceito de semelhança entre figuras e suas conseqüências. A semelhança pode ser vista em um contexto mais abstrato como uma bijeção que satisfaz a certas propriedades. Este ponto de vista, extremamente elegante permite-nos obter resultados de uma maneira simples e direta. A definição de semelhança como função também permite-nos fazer uma ponte com os conteúdos do capítulo 6 sobre transformações geométricas. Destacaremos ainda os casos de semelhança entre triângulos e discutiremos o resultado mais importante deste capítulo, o Teorema de Thales, que relaciona paralelismo e proporcionalidade.

Esta disciplina também introduzirá uma das grandes inovações desse novo currículo de licenciatura em matemática, a Prática como Componente Curricular (PCC). A PCC consiste em uma série de atividades que você desenvolverá no decorrer da disciplina proporcionando-lhe uma reflexão mais profunda a respeito dos conteúdos ministrados na disciplina e sua inserção nos Ensinos Fundamental e Médio. Um conjunto bastante extenso de disciplinas do curso de licenciatura dedicará uma parte de seu conteúdo e carga horária para a PCC. No plano de ensino da disciplina, que estará disponível juntamente com este livro didático, serão sugeridas algumas atividades que poderão ser efetuadas por você ao longo do período da disciplina. Estas atividades envolvem discussão conceitual, preparação de situações didáticas, análise de

Bijeção ou função bijetora é uma aplicação entre dois conjuntos tal que a cada elemento do primeiro conjunto associamos um único elemento do segundo e todo elemento do segundo conjunto está também associado a um único elemento do primeiro.

material bibliográfico utilizado nas escolas na atualidade, e projetos de modelagem matemática, podendo envolver conteúdos e procedimentos interdisciplinares.

A idéia das PCC originou-se da preocupação comum de que você, estudante de licenciatura, após passar por todas as disciplinas de seu currículo, não conseguiria fazer um bom uso dos conhecimentos adquiridos para a sua prática em sala de aula. O objetivo das disciplinas do curso de licenciatura não é, de forma alguma, fazer uma revisão pura e simples dos conteúdos que você deveria ter aprendido no seu Ensino Básico. No Curso de Licenciatura, mesmo os conteúdos ditos "elementares" em matemática são tratados de uma forma mais refinada, exigindo do estudante um certo grau de maturidade e rigor matemático. No entanto, a realidade com a qual você irá se deparar no final do curso é bem diferente. O mesmo nível de rigor e dedicação ao qual você, licenciado, foi submetido durante seu curso de graduação tornar-se-á impraticável no tratamento com seus alunos na escola. Assim, novas portas terão que ser abertas para despertar o interesse e a vocação dos jovens para a matemática. A PCC vem na direção de sugerir atividades que visem a motivar o estudo da matemática, contextualizando os conteúdos o máximo possível dentro da realidade do aluno e instigando a curiosidade e o espírito investigativo dos jovens estudantes, sem que isto venha acompanhado de uma simplificação empobrecedora e equivocada ou de uma mistificação do assunto. É necessário transmitir com exatidão os conceitos matemáticos, entretanto, na medida do possível, integrada à realidade dos estudantes e de forma motivadora e dinâmica.

Esperamos que este material impresso possa realmente ser um suporte para seu estudo individual à distância. Muitas dúvidas poderão surgir ao longo do caminho. Pensando nisso, a UFSC disponibilizará um sistema de atendimento on-line com os tutores e com os próprios professores das disciplinas, de forma que todas essas dúvidas possam ser sanadas. Desde já, desejamos a todos uma boa leitura e um bom estudo.

Professores Eliezer, José Pinho e Neri

Capítulo 1

Fundamentos da Geometria

Capítulo 1

Fundamentos da Geometria

Neste capítulo, você irá entender os conceitos primitivos de ponto, reta e plano. Irá também conceituar corretamente semi-retas e segmentos, retas paralelas, etc., bem como a medida de um segmento. Irá aprender ainda como se determina o comprimento de um arco curvo arbitrário através de aproximações por poligonais e conhecer as unidades do Sistema Métrico Decimal.

1.1 Ponto, reta e plano

Para iniciar o estudo da geometria, é necessário primeiramente estabelecer os objetos básicos de estudo. Cabe-nos dizer que os conceitos fundamentais da geometria, ponto, reta, plano, não podem ser propriamente definidos. Toda a conceituação que se faz deles é circular, ou apela para outros conceitos igualmente indefinidos. Por exemplo, Euclides, na obra Os Elementos define uma linha como um comprimento sem largura, deixando, no entanto, indefinidos os conceitos de comprimento e largura. Dizemos que estes são conceitos primitivos. Porém, mesmo sem uma definição matemática precisa, podemos mostrar o quão razoáveis estes conceitos são, pois eles são construídos a partir de nossa intuição geométrica.

Em primeiro lugar, é necessário dizer que um ponto não é igual a qualquer representação gráfica que façamos dele. Quando se toma um lápis sobre um papel, ou um giz sobre um quadro negro, não podemos dizer que um "ponto" desenhado com estes instrumentos é de fato um ponto matemático. Se olharmos atentamente com uma lente de aumento ou com um microscópio, veremos que esse ponto ocupa uma certa área e até possui uma espessura. O mesmo se pode dizer de uma "reta" desenhada. Esta se parecerá mais com um tubo maciço de grafite ou de giz do que com a reta no sentido matemático. Enfim, esses conceitos são uma abstração de todas as experiências gráficas que presenciamos na realidade.

Obra com 13 volumes reunindo praticamente tudo o que a humanidade sabia até aquela data sobre pontos, retas, planos, figuras geométricas elementares. A obra também sintetiza a aritmética até então conhecida, estabelece as primeiras relações algébricas e a primeira teoria dos números. Resume esses conhecimentos em dez premissas básicas, cinco postulados e cinco axiomas.

Fonte: <www. conhecimentosgerais.com. br/matematica/geometriaclassica.html.>

A versão dos "Elementos" de Euclides a qual nos referiremos ao longo do texto será a tradução inglesa editada por Sir Thomas Heath "The Thirteen Books of the Elements" em três volumes, publicada pela Editora Dover. Neste momento, é importante enfatizar que, muito embora os desenhos sejam úteis para resolvermos problemas geométricos, pois conseguem ativar nossa imaginação visual, eles são somente meras representações dos objetos matemáticos reais com os quais estamos lidando. Outro lembrete importante é que as construções geométricas, que você irá fazer ao longo deste curso, são construções gerais e independem das limitações de nossos aparelhos de desenho. Uma das motivações principais para a obra "Os Elementos", de Euclides, é exatamente estabelecer fundamentos precisos para todas as construções geométricas que possam ser feitas.

Um ponto, no sentido matemático, é uma abstração de nosso senso comum de indivisibilidade. É um objeto que não pode ser decomposto em objetos menores e no qual não existe qualquer extensão, isto é, não podemos "nos mover" dentro de um ponto. Dizemos que um ponto é um objeto de dimensão zero, ou ainda que um ponto não possui graus de liberdade. Em seguida, temos o conceito de linha (não necessariamente reta), em uma linha temos a noção de um objeto matemático no qual podemos nos mover em apenas uma direção, isto é, um objeto de dimensão 1, ou unidimensional. A figura 1.1 abaixo nos dá intuitivamente esta noção. Note que a partir do ponto *A* sobre a linha existe somente uma direção em que pode haver um deslocamento. Dizemos também que uma linha possui um único grau de liberdade.

Note que aqui introduzimos um outro conceito primitivo, o de dimensão, com o qual iremos trabalhar no sentido de estabelecer um contexto comum para todos os termos primitivos.

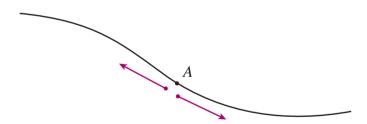


Figura 1.1 - Uma linha é um objeto unidimensional

Embora não seja nada óbvio, admitimos que uma linha é constituída de pontos. Pode, à primeira vista, parecer estranho que uma quantidade, mesmo que infinita, de objetos sem dimensões consiga formar um objeto unidimensional. Uma conceituação precisa dessas idéias somente foi possível no final do século XIX com a construção rigorosa do conjunto dos números reais. Dentro do conjunto de todas as linhas, existem aquelas que denominamos

linhas retas. Segundo Euclides, "Uma reta é uma linha cujos pontos estão distribuídos de maneira uniforme sobre si". Esta definição não pode nos dizer precisamente o que é uma reta, mas certamente pode nos dizer o que não é uma reta, conforme ilustramos na figura 1.2 a seguir.

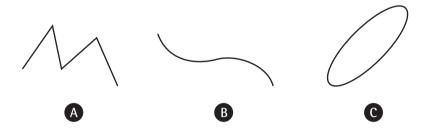


Figura 1.2 - Exemplos de linhas que não são retas

Uma reta será definida a partir de quaisquer dois de seus pontos, uma vez que todos os pontos de uma reta estão distribuídos de uma maneira uniforme. Uma pergunta que podemos fazer é se quaisquer dois pontos podem determinar uma reta. O primeiro postulado de Euclides estabelece o seguinte:

Postulado 1 (Euclides). É possível traçar uma reta entre quaisquer dois pontos.

Os postulados de Euclides foram formulados com o intuito de fundamentar as construções geométricas tornando-as independentes das limitações dos instrumentos de desenho. Podemos ainda formular o mesmo postulado de uma maneira mais sintética, sem a linguagem devida a construções geométricas, da seguinte maneira:

Axioma 1.1 (Postulado 1, segunda versão). Dois pontos quaisquer determinam uma única reta.

Esta será a formulação que iremos utilizar no decorrer de nossa discussão. Você deve notar que a preocupação com a unicidade não estava presente na formulação de Euclides, pois esta era considerada "visualmente óbvia".

Dados dois pontos, A e B, em uma reta, dizemos intuitivamente que um terceiro ponto C está entre os dois se para irmos de A

Um postulado é uma afirmação que é utilizada em uma teoria como ponto de partida, não, necessitando, portanto, de demonstração para estabelecer sua validade.

A palavra "axioma" possui o mesmo significado que a palavra "postulado".

Em nosso contexto, reservaremos o termo "postulado" apenas para nos referirmos aos cinco postulados de Euclides.

até B sobre a reta, obrigatoriamente passarmos por C. Assim, podemos definir o que vem a ser um segmento de reta.

Definição 1.1. Dados dois pontos A e B sobre uma reta, dizemos que o segmento \overline{AB} é o conjunto de pontos formado por A, B e por todos os pontos entre A e B.



É importante salientar também que, na formulação euclidiana, uma reta determinada por dois pontos A e B correspondia, na verdade, ao segmento \overline{AB} , enquanto em nosso contexto, a reta determinada por A e B, que denotaremos por \overline{AB} , é entendida como um objeto geométrico que se estende infinitamente em ambos os sentidos. Euclides, no entanto, postula que é sempre possível estender uma reta (segmento) em qualquer um dos sentidos para fazer um segmento arbitrariamente maior. A formulação do postulado 2 de Euclides se enuncia da seguinte maneira:

Postulado 2 (Euclides). É possível traçar uma reta finita continuamente em qualquer linha reta.

Podemos formulá-lo novamente em uma linguagem que independa de construções geométricas como:

Postulado 2 (segunda versão). É sempre possível estender arbitrariamente qualquer segmento a partir de qualquer uma de suas extremidades.

Ou ainda na seguinte forma, a qual adotaremos como definitiva ao longo de todo este livro:

Axioma 1.2 (Postulado 2, terceira versão). Uma reta se estende infinitamente, isto é, não possui extremidades.

Uma propriedade importante de uma reta é que qualquer um de seus pontos divide os pontos restantes em dois subconjuntos disjuntos. Ou seja, um ponto possui a propriedade de separação Sobre as várias caracterizações de dimensão, o leitor poderá consultar o artigo "Por que o espaço tem três dimensões", de Elon Lages Lima em: LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*, Rio de Janeiro: SBM. (Coleção do professor de matemática).

na reta. Esta propriedade de separação está relacionada com o fato de a reta ser um objeto unidimensional. Também podemos dizer que um ponto qualquer de uma reta divide esta em duas semi-retas opostas.

Definição 1.2. Dados dois pontos A e B sobre uma reta, a semi-reta \overrightarrow{AB} é o subconjunto de pontos formado pelo segmento \overrightarrow{AB} e por todos os pontos C sobre a reta \overrightarrow{AB} tais que B esteja entre A e C.

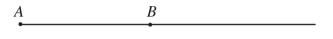


Figura 1.4 - Semi-reta \overrightarrow{AB} .

Vamos agora discutir o último dos termos primitivos que será utilizado, a saber, o conceito de plano. Antes, nos remeteremos à definição dada por Euclides do que é uma superfície. Segundo Euclides, "Uma superfície é o que tem somente comprimento e largura". Mais uma vez, os conceitos de comprimento e de largura não estão definidos, mas intuitivamente, significa que em uma superfície existem pelo menos duas direções independentes através das quais podemos nos "mover", ou seja, uma superfície possui dois graus de liberdade, ou ainda, é um objeto bidimensional.

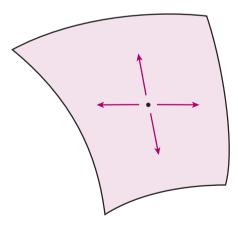


Figura 1.5 - Uma superfície é um objeto geométrico bidimensional.

Novamente, vamos admitir que toda superfície é formada de pontos e também que toda superfície contém uma infinidade de linhas geradas por seus pontos. Existem certas superfícies que podem, em particular, conter linhas retas, a figura 1.6 abaixo nos dá alguns exemplos de superfícies que contém retas.

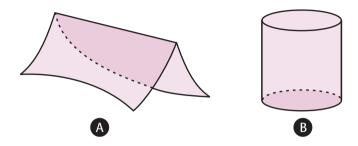


Figura 1.6 - Exemplos de superfícies que contém retas.

Dentre todas as superfícies possíveis, existem superfícies que oferecem um certo grau de regularidade, os planos. A definição Euclidiana diz que **uma superfície plana é uma superfície na qual todas as suas retas estão dispostas de maneira uniforme sobre si**. Novamente, esta definição não nos permite dizer o que é um plano, mas certamente nos dirá o que um plano não é, como nos ilustra a figura 1.7.

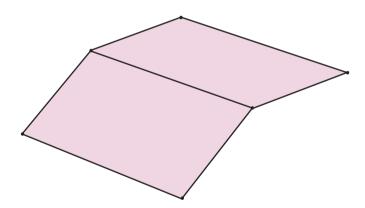


Figura 1.7 - Uma superfície que não é um plano.

A regularidade apresentada pelos planos faz com que seja suficiente determinar duas retas sobre um plano, ou três pontos, não sobre a mesma reta, sobre o mesmo plano para que este esteja univocamente determinado. Postularemos, muito embora este postulado não esteja presente na formulação de Euclides, que quaisquer três pontos determinam um único plano. Uma última propriedade que também caracteriza um plano e está relacionada com o fato de um plano ser um objeto bidimensional é que uma reta em um plano separa o seu complementar no plano em dois

subconjuntos disjuntos. Cada um destes subconjuntos unido com a reta em questão é denominado um semi-plano.

Novamente, apelando para a sua intuição geométrica, dizemos que dois pontos em um plano estão do mesmo lado em relação a uma reta dada nesse plano se o segmento que une esses pontos não cruza com a reta. Reciprocamente, dois pontos não sobre essa reta estão de lados opostos em relação a ela se o segmento que une esses dois pontos cruza com a reta.

Não entraremos em muitos detalhes a respeito da determinação de planos ou sobre as relações entre diferentes planos, pois toda a geometria que será tratada ao longo deste volume será uma geometria plana, isto é, todos os objetos geométricos estarão contidos em um plano determinado de uma vez por todas.

Definição 1.3.

- 1) Duas retas distintas em um plano são ditas paralelas se a sua intersecção, como conjunto de pontos é um conjunto vazio.
- 2) Duas retas distintas em um plano são ditas concorrentes se a sua intersecção consiste de um conjunto de um único ponto.

Obviamente, não precisamos considerar retas cuja intersecção é um conjunto que contenha dois pontos ou mais, pois neste caso, o Axioma 1.1 garante que dois pontos determinam uma única reta, logo, estas retas não são distintas, mas sim a mesma reta.

Os exercícios a seguir têm como objetivo iniciar sua auto-avaliação sobre os conhecimentos apresentados.

Exercícios Propostos

- 1) Elabore uma formulação sobre o que é um ponto, uma reta e um plano que possa ser utilizado em um contexto de sala de aula no ensino fundamental.
- 2) Dê uma definição do que vêm a ser duas semi-retas opostas.
- 3) Por que, para se determinar univocamente uma reta, precisamos de dois pontos e não somente de um?

- 4) Mostre que se tomarmos três pontos, não sobre a mesma reta, é equivalente a tomarmos duas retas em um plano. Por que isto é suficiente para se determinar univocamente um plano?
- 5) Comente sobre por que os dois primeiros postulados de Euclides são importantes para a fundamentação das construções geométricas e sobre como eles superam as limitações dos aparelhos de desenho.
- 6) Qual fato geométrico razoavelmente intuitivo está por trás das seguintes afirmações:
 - a) Se o ponto A está do mesmo lado que B em relação à reta r e B está do mesmo lado que C em relação à mesma, então A está do mesmo lado que C.
 - b) Se A está do lado oposto a B em relação a r e B está do lado oposto a C em relação à mesma reta então A está do mesmo lado que C.

1.2 Medidas de comprimento

Nesta seção, definiremos uma grandeza numérica associada a todo segmento de reta, o seu comprimento. Isto conferirá um caráter métrico ou quantitativo à geometria. Novamente, vamos apelar para sua intuição geométrica no sentido de formularmos uma definição de comprimento. Em primeiro lugar, um comprimento deve ser um número positivo, pois segundo nossa experiência cotidiana, não faria qualquer sentido um comprimento negativo.

Em segundo lugar, que este comprimento seja simétrico, isto é, o comprimento do segmento \overline{AB} tem que ser o mesmo comprimento do segmento \overline{BA} . Em outras palavras, o comprimento de um segmento é o mesmo, não importando onde se considere o seu começo e onde se considere o final.

Em terceiro lugar, um comprimento deve ser uma grandeza aditiva, isto é, se um ponto B está situado entre os pontos A e C, então o comprimento do segmento \overline{AC} deve ser igual à soma dos

Por experiência cotidiana, estamos nos referindo à experiência de nossos sentidos em relação à realidade que nos cerca. De fato, matematicamente, é muitas vezes útil introduzirmos "comprimentos" negativos, como por exemplo, na teoria da relatividade, onde o espaço é de dimensão quatro, sendo uma das dimensões relacionadas com o tempo. A noção de comprimento neste espaço, denominado espaço de Minkowski, admite valores negativos, e isto é fundamental para que a lei da causalidade continue válida no universo.

comprimentos do segmento \overline{AB} e do segmento \overline{BC} . Finalmente, se queremos estabelecer um número que seja unicamente determinado para um segmento, devemos ter um segmento padrão, com o qual possamos comparar todos os outros segmentos.

Observe que ao longo de todo o texto denotaremos o segmento, isto é, o objeto geométrico, com uma barra sobre os pontos de extremidade, enquanto o seu comprimento será denotado sem a barra sobre os pontos extremos.

Definição 1.4. Dado um segmento qualquer \overline{AB} , o seu comprimento, denotado por AB, é um número (real) positivo, satisfazendo às seguintes condições:

- 1) AB = BA
- 2) Se B está situado entre os pontos A e C, então AC = AB + BC.
- 3) Existe um segmento \overline{u} cujo comprimento é igual a 1.

Dada a definição de comprimento, precisamos mostrar que todo segmento possui um único valor associado ao seu comprimento. O ato de determinar o valor do comprimento de um segmento dado é o que denominamos medir. Medir um segmento basicamente é compará-lo com um segmento padrão, no caso, o segmento \overline{u} , de comprimento igual a 1, da definição 1.4. Para estabelecermos corretamente o processo de medição de segmentos, precisamos de mais algumas definições.

Definição 1.5. Dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , são ditos congruentes se eles possuírem o mesmo comprimento. Denotaremos a congruência entre estes dois segmentos por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Definição 1.6. Um segmento \overline{AB} é dito ser maior que um segmento \overline{CD} quando existir um ponto $E \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AE} \equiv \overline{CD}$. Também podemos dizer que o segmento \overline{CD} é menor que o segmento \overline{AB} . Denotaremos por $\overline{AB} > \overline{CD}$ ou $\overline{CD} < \overline{AB}$.

A partir desta definição, podemos assumir que dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , ocorrerá uma das três situações: ou eles são congruentes, ou $\overline{AB} > \overline{CD}$, ou $\overline{AB} < \overline{CD}$. Utilizando o item (2) da definição de comprimento, fica fácil concluir que um segmento não pode ter dois valores diferentes de comprimento e nem tampouco que dois segmentos não congruentes podem ter o mesmo comprimento.

Também neste ponto podemos introduzir um outro conceito geométrico que é de fundamental importância para o desenvolvimento de nossos resultados geométricos.

Definição 1.7. Dado um segmento \overline{AB} , definimos a circunferência de centro A e raio AB como o conjunto dos pontos C, no plano, tais que $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. De forma semelhante, definimos o círculo de centro A e raio AB como o conjunto dos pontos C, no plano, tais que $\overline{AC} \leq \overline{AB}$. Denotaremos a circunferência de centro A e raio AB por (A, AB).

Euclides também postulou a possibilidade de se traçar qualquer circunferência com qualquer centro e qualquer raio, independentemente das limitações dos equipamentos de desenho disponíveis.

Postulado 3 (Euclides). É possível traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.

Apenas modificaremos a formulação deste postulado para que a linguagem fique independente de construções geométricas.

Axioma 1.3 (Postulado 3, segunda versão). Dado qualquer ponto e qualquer valor de comprimento, existe uma circunferência cujo centro é este ponto dado e cujo raio mede exatamente aquele comprimento.

Precisamos também da garantia de que sempre seja possível "copiar" um segmento onde bem desejarmos. Isto será dado pelo teorema a seguir, que corresponde à proposição 2 do livro I dos "Elementos" de Euclides.

Teorema 1.1. Dado um segmento \overline{AB} e uma semi-reta \overline{CD} , existe um ponto $E \in \overline{CD}$ tal que $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$.

Tem-se a necessidade deste resultado para se garantir a possibilidade de transferência de comprimentos, sem o auxílio de uma régua com marcas. O procedimento usual nas aulas de desenho consiste em tomar a abertura do compasso igual ao comprimento que se quer transferir e depois utilizar este compasso aberto para marcar o mesmo comprimento em outro lugar. Mas nada pode

garantir que a abertura do compasso durante este processo não sofra pequenas variações, invalidando, assim, a medida final. Por isto, uma regra básica de construções com régua e compasso é que se deve fechar o compasso toda vez que ele não estiver em uso, isto é, realizando o traço de alguma circunferência.

A idéia básica envolvida na demonstração é ligar a ponta do segmento dado à ponta da semi-reta onde se quer transferir o comprimento, então utilizar um triângulo eqüilátero construído a partir destes dois vértices. O triângulo eqüilátero nos possibilita garantir que se adicionarmos, ou retirarmos quantidades iguais, os resultados serão iguais , conforme as noções comuns de Euclides. Além do mais, todos os processos envolvidos na construção utilizam os postulados 1, 2 e 3, somente. Ao final da demonstração, podemos nos assegurar que a transferência de comprimentos é sempre possível, mesmo que não haja instrumentos de desenho suficientemente grandes para fazê-la.

Este ponto de intersecção
não está garantido por
nenhum dos axiomas
anteriores e mesmo Euclides
não se preocupou em
justificar a sua existência,
pois era, de certa forma,
visualmente óbvia. Somente
no final do século XIX foi
possível dar uma justificação
matemática para a
existência deste ponto,
baseada na completude dos
números reais.

Demonstração: Tome o segmento \overline{AC} , que sabemos que existe pelo Axioma 1.1, pois os pontos $A \in C$ determinam uma única reta. Considere agora as circunferências de centro A e raio AC e a circunferência de centro C e raio CA cuja existência está garantida pelo Axioma 1.3, e seja O o ponto de cruzamento das duas circunferências, conforme indicado na figura 1.8 abaixo.

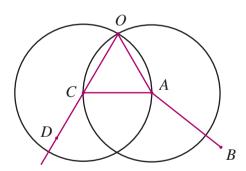


Figura 1.8 - Primeiro passo, determinação do ponto O, de intersecção das duas circunferências (A,AC) e (C,CA).

Por definição, temos as congruências $\overline{AC} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{AO}$. Agora, tome a semi reta \overline{OA} e a circunferência c = (A, AB) denominando por K o ponto de intersecção desta semi-reta com esta circunferência, conforme indicado na figura 1.9. Da mesma forma, tome a semi-reta \overline{OC} e a circunferência d = (O, OK), denotando por L

a intersecção desta semi-reta com esta circunferência, conforme também mostrado na figura 1.9. Finalmente, tomando a circunferência e=(C,CL) e denotando por E a intersecção desta última circunferência com a semi-reta \overline{CD} , conforme mostrado pela mesma figura 1.9.

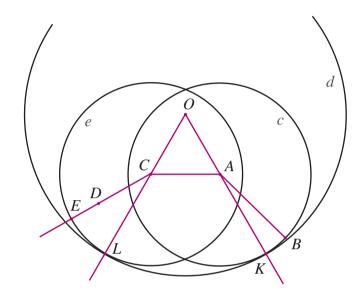


Figura 1.9 - Determinação do ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overrightarrow{CE} \equiv \overrightarrow{AB}$.

Afirmamos que o ponto $E \in CD$ é tal que $CE \equiv AB$. De fato, temos que OK = OA + AK = OA + AB, (1.1). Por outro lado, temos que OK = OL = OC + CL = OA + CL. (1.2)

Das igualdades (1.1) e (1.2), que são meras conseqüências da definição de circunferência, podemos concluir que CL = AB, e finalmente CE = CL = AB, (1.3), o que nos leva à conclusão que $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$.

Uma vez amparados por este resultado, podemos fundamentar o processo de medição, pois sempre poderemos copiar o segmento padrão de comprimento unitário sobre qualquer semi-reta que contenha um segmento cujo comprimento desejamos medir. Também vamos admitir que dada qualquer semi-reta e qualquer número real positivo dado, existe sobre esta semi-reta um segmento cujo comprimento é exatamente este número real positivo. Isto estabelece uma bijeção entre qualquer semi-reta e o conjunto dos números reais positivos, conforme a formulação abaixo.

Uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos é uma aplicação que a cada elemento do primeiro associamos um único elemento do segundo e, reciprocamente, cada elemento do segundo conjunto está associado a somente um elemento do primeiro.

A formulação que iremos apresentar não está presente na formulação clássica de Euclides, mas nos permitirá uma liberdade muito maior, sem nos preocuparmos com pequenas sutilezas sobre a existência ou não de determinados pontos.

Axioma 1.4. Existe uma bijeção entre qualquer semi-reta e o conjunto dos números reais não negativos.

Esta correspondência entre uma semi-reta AB e os números reais não negativos, isto é, maiores ou iguais a 0, pode ser estabelecida da seguinte maneira: o vértice A da semi-reta, é associado ao número 0, e a todo número real x>0, associa-se o ponto $C\in \overline{AB}$ de forma que AC=x.

O primeiro caso que vamos analisar é quando um determinado segmento \overline{AB} possui uma quantidade inteira de cópias do segmento unitário, isto é, quando existem pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in \overline{AB}$ tais que $\overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \cdots \equiv \overline{A_{n-1}B} \equiv \overline{u}$, conforme mostrado na figura 1.10 abaixo. Neste caso:

$$AB = AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}B = n.1 = n.$$
 (1.4)

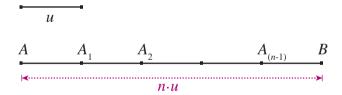


Figura 1.10 - Um segmento de comprimento inteiro.

Em seguida, precisamos definir a medida de segmentos que sejam comensuráveis com o segmento unitário u. Para isto, precisamos caracterizar bem o que vem a ser a noção de comensurabilidade.

Definição 1.8. Dizemos que o segmento \overline{AB} mede o segmento \overline{CD} quando existe um número inteiro positivo n tal que CD = n.AB.

No caso anterior, dizemos que o segmento u mede os segmentos de comprimento inteiro.

Teorema 1.2. Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , são equivalentes as seguintes afirmações:

- 1) Existem dois números inteiros positivos, m e n tais que n.AB = m.CD.
- 2) Existe um segmento \overline{KL} que mede simultaneamente \overline{AB} e \overline{CD} .
- 3) A razão entre os comprimentos *AB* e *CD* é um número racional.

Demonstração: Neste tipo de teorema, onde vamos demonstrar que várias afirmações são equivalentes, ou seja, que uma implica na outra e vice-versa, podemos demonstrar, por exemplo, que a afirmação (1) implica na afirmação (2), que a afirmação (2) implica na afirmação (3) e, finalmente, que a afirmação (3) implica na afirmação (1). Procedamos então deste modo.

(1) \Rightarrow (2): Sejam dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , tais que n.AB = m.CD, conforme indica a figura 1.11 abaixo:

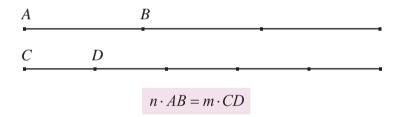


Figura 1.11 - Dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , tais que n.AB = m.CD.

Tome sobre uma semi-reta \overrightarrow{KO} um segmento \overline{KL} cujo comprimento seja igual a $\frac{AB}{m}$, assim, temos que AB = m.KL, o que significa que o segmento \overline{KL} mede o segmento \overline{AB} . Resta-nos mostrar que o segmento \overline{KL} mede o segmento \overline{CD} , mas como n.AB = m.CD, temos que m.CD = n.AB = n.m.KL (1.5), o que implica que CD = n.KL, significando que segmento \overline{KL} mede o segmento \overline{CD} .

(2) \Rightarrow (3): Suponha que exista um segmento \overline{KL} que meça simultaneamente o segmento \overline{AB} e o segmento \overline{CD} . Então existem inteiros positivos m e n tais que AB = m.KL e CD = n.KL, assim

temos
$$\frac{AB}{CD} = \frac{m.KL}{n.KL} = \frac{m}{n}$$
. (1.6)

Duas afirmações são equivalentes do ponto de vista matemático se, tomando-se qualquer uma delas como verdadeira, podemos demonstrar a veracidade da outra. Ainda podemos dizer que uma afirmação implica na outra e vice-versa.

Um número racional é, por definição, um número que pode ser escrito como uma fração onde o numerador e o denominador são números inteiros e, obviamente, o denominador é não nulo. Também podemos dizer, equivalentemente, que um número racional é a razão entre dois números inteiros sendo que o segundo deles é não nulo. O conjunto dos números racionais é comumente denotado por Q.

(3) \Rightarrow (1): Se tivermos que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$, então, multiplicando-se esta igualdade por n.CD, que é não nulo, pois $n \neq 0$ devido ao fato que $\frac{m}{n} \in Q$ e $CD \neq 0$, pois estamos supondo os pontos C e D como distintos, teremos $n \cdot CD \cdot \frac{AB}{CD} = n \cdot CD \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow n \cdot AB = m \cdot CD$. (1.7)

Assim, temos a equivalência entre as três afirmações.

Definição 1.9. Dizemos que dois segmentos são comensuráveis se satisfazem a qualquer uma das três afirmações equivalentes do teorema acima.

Agora, se tivermos um segmento \overline{AB} que seja comensurável com o segmento unitário \overline{u} , teremos que a razão entre sua medida e a medida do segmento unitário será um número racional, assim:

$$AB = \frac{AB}{u} = \frac{AB}{1} = \frac{m}{n} \in Q. \tag{1.8}$$

Finalmente, precisamos entender como se efetua a medida de segmentos que não sejam comensuráveis com o segmento unitário, ou seja, cujo comprimento seja um número irracional. Este processo de medida não pode ser efetuado em uma quantidade finita de passos. Somente podemos obter valores aproximados deste comprimento, com precisões tão boas quanto forem necessárias. Para obtermos estas precisões, vamos assumir que nossa geometria tenha a propriedade Arquimediana, isto é que satisfaça a uma das duas condições equivalentes do teorema abaixo.

Isto será visto com mais detalhes na seção 1.3.

Em referência ao matemático grego Arquimedes de Siracusa, que viveu aproximadamente entre os anos 287aC e 212aC.

Teorema 1.3. São equivalentes as seguintes afirmações:

- 1) Dado qualquer segmento \overline{AB} , existe um número inteiro positivo n tal que $AB > \frac{1}{n}$.
- 2) Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , existe um número inteiro positivo n tal que n.AB > CD.

Demonstração: (1) \Rightarrow (2): Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , considere sobre a semi-reta \overline{AB} o segmento \overline{AK} tal que $AK = \frac{AB}{CD}$,

isto mais uma vez está garantido pelo nosso Axioma 1.4. Utilizando como hipótese o item (1), existe um número inteiro positivo n tal que $AK > \frac{1}{n}$, assim sendo, temos que $AK = \frac{AB}{CD} > \frac{1}{n}$. (1.9). Multiplicando ambos os membros da desigualdade (1.9) por n.CD, teremos que n.AB > CD.

(2) \Rightarrow (1): Dado qualquer segmento AB, existe um número inteiro positivo n tal que n.AB > 1, (1.10) utilizando como hipótese o item (2), onde o segmento \overline{CD} em questão foi tomado como o segmento unitário u. Portanto, multiplicando ambos os membros

da desigualdade (1.10) por
$$\frac{1}{n}$$
, temos o resultado $AB > \frac{1}{n}$.

Agora, em posse deste resultado, dado um segmento \overline{AB} , tome para qualquer n inteiro positivo o número inteiro positivo m_n tal que $\frac{m_n}{n} > AB$, mas de forma que $\frac{m_n-1}{n} < AB$ (eventualmente, para alguns inteiros positivos n, teremos $m_n=1$). Note que para um dado n inteiro positivo, o erro na medida de AB será menor que $\frac{1}{n}$, portanto, podemos fazer este erro ficar tão pequeno quanto desejarmos, à medida que escolhermos números n cada vez maiores. Ainda podemos formular a mesma idéia da seguinte maneira: dado qualquer segmento \overline{AB} , existem números racionais positivos r e s, com r < s, cuja diferença seja arbitrariamente pequena e tais que r < AB < s. O número racional r pode ser tomado como a medida do segmento \overline{AB} por falta, enquanto o número racional s pode ser tomado como a medida do segmento \overline{AB} por excesso.

Definição 1.10. Um ponto $C \in \overline{AB}$ é dito ser o ponto médio deste segmento se $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Em outras palavras, o ponto médio de um segmento é o ponto que fica equidistante das duas extremidades do segmento. O próximo resultado é extremamente importante e útil. Estabelece que todo segmento possui um único ponto médio.

$$\sqrt{2} = 1,414...$$

$$\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1}$$

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$$

$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100}$$

$$\vdots$$

Teorema 1.4. Todo segmento possui um único ponto médio.

Demonstração: Este é um teorema de existência e unicidade. Portanto temos dois resultados diferentes para demonstrar:

Existência: Seja um segmento \overline{AB} , utilizando o Axioma 1.4, temos uma bijeção entre a semi-reta \overline{AB} e o conjunto dos números reais positivos. Assim existe um ponto $C \in \overline{AB}$ tal que $AC = \frac{AB}{2}$. É fácil ver que C é ponto médio de \overline{AB} . Em primeiro lugar, como AC < AB então o segmento \overline{AC} é menor que o segmento \overline{AB} , e portanto $C \in \overline{AB}$.

Em segundo lugar, temos que $AB = AC + CB = \frac{AB}{2} + CB$, (1.11) o que nos leva a concluir que $CB = \frac{AB}{2} = AC$. Portanto, C é, de fato, o ponto médio de \overline{AB} .

Unicidade: Em geral, os teoremas de unicidade são demonstrados por absurdo, supõe-se de início que existam dois objetos do mesmo tipo e mostra-se que esta existência de um segundo objeto leva a uma contradição. Suponha que existam C e D, dois pontos médios distintos do segmento \overline{AB} . Suponha, sem perda de generalidade, que AC < AD. Assim, por um lado, temos CB = AC < AD = DB, (1.12) o que nos leva à conclusão de que CB < DB. Por outro lado, temos também que AB = AD + DB = AC + CB < AD + CB, (1.13) o que nos permite concluir que CB > DB.

Como as duas afirmações, CB < DB e CB > DB, são claramente contraditórias, concluímos que existe apenas um único ponto médio para o segmento \overline{AB} .

A técnica de demonstração de Redução ao Absurdo, ou em latim "Reductio ad Absurdum", consiste em se admitir como hipótese a negação da tese que se deseja provar. Se a cadeia de deduções levar a uma contradição, isto é, a uma afirmação e a sua negação simultaneamente, então a tese pretendida originalmente é verdadeira.

Exercícios Propostos

- 1) Verifique que é impossível que um segmento tenha dois valores de comprimento distintos e que dois segmentos não congruentes tenham o mesmo comprimento.
- 2) Diga em que sentido o postulado 3 de Euclides vem superar as limitações dos aparelhos de desenho nas construções geométricas.

- 3) Para os geômetras gregos, todas as construções geométricas deveriam ser efetuadas somente com régua sem marcações de medidas e com compassos que se fechariam sempre que não estivessem em contato com o papel. Isto quer dizer que é impossível marcar o comprimento de um segmento dado com a abertura do compasso para poder reproduzi-la em outro lugar. Discuta a importância do teorema 1.1 para justificar as construções geométricas feitas neste contexto.
- 4) Mostre as equivalências do teorema 1.2, mostrando diretamente que a afirmação (2) implica na afirmação (1) e que a afirmação (3) implica na afirmação (2).
- 5) Relacione o processo descrito para se aproximar o comprimento de um segmento irracional por racionais com a prática usual de, ao considerarmos a representação decimal de um número irracional (que é infinita), tomarmos apenas uma quantidade finita de casas decimais.

1.3 Medidas de comprimento (continuação)

Vimos na seção anterior que é possível efetuar o processo de medição de qualquer segmento, mesmo que este não seja comensurável com o segmento unitário. Uma questão que ainda merece esclarecimento é a necessidade de se preocupar com segmentos incomensuráveis. Vamos construir nesta seção um par de segmentos incomensuráveis. Vamos mostrar também que é possível definir o comprimento de uma poligonal, isto é, de uma união de segmentos unidos dois a dois pelas suas extremidades. Também vamos mostrar que é possível medir o comprimento de outras curvas que não sejam retas através de aproximações por poligonais. Antes, porém, necessitamos de mais algumas definições.

Definição 1.11. Dado um segmento \overline{AB} dizemos que um ponto $C \in \overline{AB}$ divide-o em média e extrema razão se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}. ag{1.14}$$

A média e extrema razão também é conhecida como proporção áurea, ou proporção divina. A divisão de um segmento em média e extrema razão era estudada e admirada pelos matemáticos gregos devido à sua ocorrência em quase todos os aspectos da vida. Mesmo as medidas do corpo humano estão dispostas aproximadamente nesta proporção. Por isso e por seu apelo estético, os escultores, desde a antigüidade, tentavam obedecer a esta proporção em seus trabalhos. A proporção áurea também está relacionada com outros tópicos importantíssimos da matemática, como a espiral logarítmica e os números de Fibonacci.

Pode-se provar que a média e extrema razão é hereditária, isto é, se um ponto A_1 divide um segmento \overline{AB} em média e extrema razão, então, em particular teremos que $\overline{AA_1} > \overline{A_1B}$, se tomarmos um ponto $A_2 \in \overline{AA_1}$ tal que $\overline{AA_2} \equiv \overline{A_1B}$, teremos que o ponto A_2 divide o segmento $\overline{AA_1}$ em média e extrema razão (veja o exercício (1) desta seção). Assim, sempre podemos continuar infinitamente tirando o menor do maior e mantendo ainda a mesma proporção.

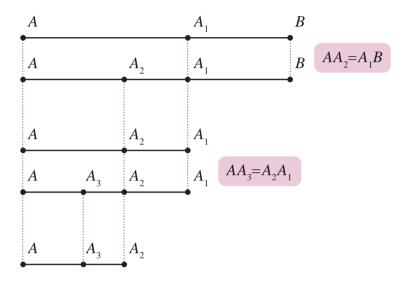


Figura 1.12 - A média e extrema razão.

Este processo infinito não ocorre, no entanto, com pares de segmentos comensuráveis. Suponha que se tenham dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} comensuráveis. Isto significa que existe um segmento \overline{KL} e dois números inteiros positivos m e n tais que AB = n.KL e CD = m.KL. Faremos uso do conhecido algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum de dois números inteiros, e mostraremos que o processo é finito.

Suponha, sem perda de generalidade, que $n \ge m$, então existem dois números inteiros não negativos (isto é, podem, em particular, ser iguais a 0) q e r, com r < m tais que n = q.m + r. Podemos agora tomar o número m como o maior e r como o menor e encontrarmos números inteiros não negativos q_1 e r_1 , com $r_1 < r$ tais que $m = q_1.r + r_1$, e assim por diante, obtendo uma cadeia de restos $r > r_1 > r_2 > \cdots$, mas como todos estes números são inteiros não negativos, haverá um $r_k = 0$, finalizando o processo.

Voltando ao nosso exemplo, se o ponto C divide o segmento \overline{AB} em média e extrema razão, então, pelo que foi apresentado nos parágrafos anteriores, podemos concluir que os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} são incomensuráveis. Mais adiante, apresentaremos o célebre exemplo, atribuído a Pitágoras, de que a diagonal de um quadrado é incomensurável com o seu lado, que é equivalente a dizer que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Mas o exemplo apresentado acima é suficiente para se argumentar a necessidade de se lidar com segmentos de medida irracional, isto é, que sejam incomensuráveis com o segmento unitário.

Definição 1.12. Uma linha poligonal $A_1A_2...A_n$ é a união dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ (ver a figura 1.13). Os segmentos que compõem a poligonal são denominados arestas da poligonal e os pontos de extremidade dos segmentos são denominados vértices da poligonal.

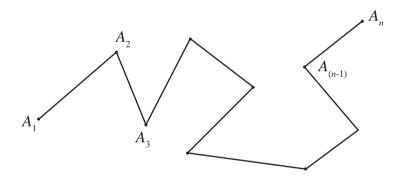


Figura 1.13 - Uma linha poligonal.

Vamos considerar principalmente as linhas poligonais que não contêm auto-intersecções, isto é, dois segmentos na poligonal se intersectam somente se a extremidade final de um deles coincidir com a extremidade inicial do outro.

Definição 1.13. Um polígono é uma linha poligonal fechada, isto é, na qual o ponto A_n coincide com o ponto A_1 (ver a figura 1.14). As arestas de um polígono também são denominadas lados do polígono.

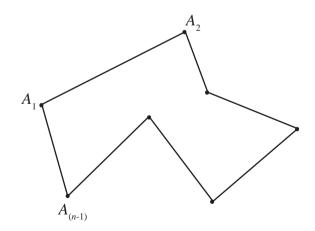


Figura 1.14 - Um polígono.

Definição 1.14. O comprimento de uma poligonal $A_1A_2...A_n$ é dado pela soma dos comprimentos de todos as arestas, isto é, $l(A_1A_2...A_n) = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Quando a poligonal é um polígono, denominamos o seu comprimento por perímetro do polígono.

Agora resta-nos mostrar que é sempre possível medir o comprimento do "segmento" entre quaisquer dois pontos de uma linha curva. Entenda-se o segmento entre os pontos A e B de uma linha l como o conjunto dos pontos de l que estão entre A e B, ou seja, dos pontos pelos quais é preciso passar para se deslocar de A até B. Também chamaremos de arco um segmento sobre uma curva (ver a figura 1.15 a seguir).

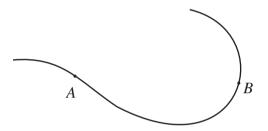


Figura 1.15 - Segmento ou arco sobre uma linha curva.

O procedimento para se medir o comprimento de segmentos curvos também é aproximado. Primeiramente, sobre um arco (AB) de uma curva, tomemos os pontos A_1 , A_2 , ..., A_{n-1} , conforme nos mostra a figura 1.16.

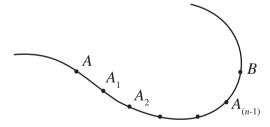


Figura 1.16 - Aproximação do comprimento de um arco sobre uma curva.

Em seguida, consideremos a poligonal $AA_1A_2...A_{n-1}B$. O comprimento desta poligonal pode ser utilizado para se aproximar o comprimento do arco. Esta aproximação será tão melhor quanto mais próximos e mais numerosos forem os pontos da poligonal utilizada. Podemos dizer, no limite, quando a quantidade de

pontos na poligonal for infinitamente grande e a distância entre quaisquer dois pontos adjacentes da poligonal for infinitamente pequena, que o comprimento da poligonal é, de fato, o comprimento do arco da curva. A justificativa para este fato está nos fundamentos do cálculo integral, que foge ao escopo desta disciplina. Podemos, no entanto, oferecer um outro tipo de justificação baseada no princípio de exaustão, que era conhecido pelos gregos desde a Antigüidade.

Teorema 1.5 (princípio de exaustão). Se de uma grandeza retirarmos mais que a sua metade, e do restante retirarmos mais que a sua metade e assim prosseguirmos repetidamente, retirando sempre mais do que a metade da grandeza restante, então esta grandeza ficará menor que qualquer grandeza positiva de mesma natureza.

Não vamos demonstrar o princípio de exaustão neste grau de generalidade. Neste momento, basta-nos entender corretamente o que nos diz este princípio e saber como utilizá-lo para resolver problemas geométricos.

Em primeiro lugar, a palavra grandeza aqui pode efetivamente significar qualquer coisa que possa ser medida ou quantificada numericamente por números reais positivos: um comprimento, uma área, um volume, uma massa, etc. Assim também a expressão grandeza de mesma natureza nos diz que as comparações devem ser sempre feitas dentro dos contextos devidos, isto é, deve-se comparar comprimento com comprimento, área com área, volume com volume, etc. Não faz absolutamente nenhum sentido comparar, por exemplo, um comprimento com um volume.

Finalmente, entendida a questão das grandezas e de suas naturezas, tudo se resume a uma série de comparações entre números reais positivos. Podemos, portanto, considerar o processo de sempre se retirar mais do que a metade da grandeza existente em cada passo, como uma seqüência infinita de números reais positi-

vos
$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$
, onde para cada $n \ge 1$ temos que $x_{n+1} < \frac{x_n}{2}$.

A afirmação de que esta grandeza ficará menor que qualquer grandeza positiva de mesma natureza pode ser traduzida pela afirmação: "dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n \ge 1$ tal que $x_m < \varepsilon$ para todo $m \ge n$ ". Ou seja, temos na seqüência infinita de termos $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ tal que depois de um certo termo x_n , todos os termos ficam menores que ε . A demonstração deste fato advém da propriedade Arquimediana (teorema 1.3) satisfeita pelos números reais.

Você verá que utilizaremos o princípio de exaustão em diversos contextos ao longo deste livro. Mas vamos fazer uma breve argumentação baseada no princípio de exaustão para justificar que o comprimento de um arco de curva pode arbitrariamente ser aproximado por poligonais.

Primeiramente, podemos partir de uma poligonal adequada para então fazer o processo de exaustão. De fato, o processo independe da escolha de poligonais particulares, mas a prova deste fato é bem mais difícil, utilizando-se apenas a matemática disponível neste estágio. Tomemos, portanto, uma poligonal que obedeça às duas seguintes condições:

- 1) Sempre quando a curva coincidir com um segmento de reta, tomaremos este segmento de reta como parte da poligonal.
- 2) Os segmentos da poligonal somente intersectam a curva nas suas extremidades.

A condição (1) nos permite medir com precisão o comprimento da curva nas partes óbvias e a condição (2) nos garantirá que os pontos da curva entre dois pontos da poligonal estarão sempre de um mesmo lado em relação ao segmento correspondente na poligonal. A grandeza em questão para utilizarmos o princípio de exaustão será a diferença entre o comprimento da curva e o comprimento da poligonal. Estamos, neste ponto, apelando para a sua intuição geométrica que afirma: um segmento de reta é o caminho mais curto entre dois pontos.

Assim o comprimento de uma poligonal sempre será mais curto que qualquer curva que passe por seus vértices. Isso será demonstrado mais adiante, quando tratarmos da desigualdade triangular.

Consideremos, agora, apenas um segmento da poligonal entre os pontos X e Y, cujo comprimento do arco seja igual a l e o comprimento XY seja igual a a, conforme indicado na figura 1.17.

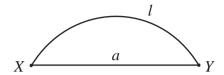


Figura 1.17 - Um segmento da poligonal que aproxima um arco.

Agora tomemos um ponto Z sobre o arco (XY) de forma que os segmentos \overline{XZ} e \overline{ZY} meçam respectivamente b e c, conforme a figura 1.18.

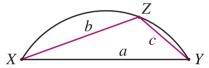


Figura 1.18 - Ponto intermediário no arco (XY).

Novamente apelando para a intuição geométrica, podemos ver que a < b + c, assim temos que l - a > l - (b + c). Baseados nestas desigualdades, podemos prosseguir, inserindo novos vértices intermediários $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ entre X e Y (ver a figura 1.19) de forma que tenhamos:

$$l - (XX_1 + X_1X_2 + \dots + X_{n-1}Y) < \frac{l-a}{2}, \tag{1.15}$$

e assim possamos construir uma nova poligonal fazendo com que a diferença entre o comprimento da curva e da nova poligonal seja menor que a metade da diferença entre o comprimento da curva e a poligonal original. Procedendo desta maneira repetidas vezes, criamos uma seqüência de poligonais para as quais é possível utilizar o princípio da exaustão.

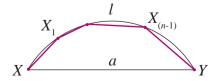


Figura 1.19 - Nova poligonal no processo de exaustão.

Para finalizar esta seção, vamos fazer algumas rápidas considerações sobre unidades de medida de comprimento. Na definição 1.4 de comprimento, simplesmente se admitiu a existência de um segmento cujo comprimento é igual a 1. Mas a escolha de qual segmento para o qual se admitirá um comprimento igual a 1 é totalmente arbitrária. Assim, cada indivíduo que necessitar fazer medições terá uma unidade de comprimento própria, definida a partir de escolhas arbitrárias. No entanto, para que a geometria tenha a utilidade prática para a qual foi criada, e decorrente da qual herdou seu nome, há a necessidade de uma padronização social das unidades de comprimento, para que todos possam entender exatamente a mesma coisa quando estiverem efetuando medidas.

Embora os grupos rapidamente encontrassem uma unidade padrão de medida, essa também diferia de povo para povo, de época para época. Com o advento das grandes navegações e, posteriormente, com a ampliação do comércio em escala global, tornou-se necessária a estipulação de uma unidade internacional de medida que pudesse servir de padrão nas relações comerciais e fosse simples de calcular.

O quesito simplicidade também é importante para que as transações fiquem mais rápidas. Veja, por exemplo, o Sistema Britânico de Unidades, ainda amplamente usado nos EUA, que utiliza a polegada (aproximadamente 2,54 cm); o pé, que equivale a 12 polegadas; a jarda, que equivale a 3 pés; e a milha, que equivale a 1.760 jardas. Note que calcular utilizando estas sub-unidades torna-se difícil, uma vez que todos nós utilizamos como padrão o sistema decimal de numeração.

Foi com o intuito de se construir um sistema de medidas internacional e simples que, em 1795, foi criado o Sistema Métrico Decimal. O Sistema Métrico Decimal, hoje também denominado Sistema Internacional, pois é atualmente adotado pela maioria dos países do mundo, vai muito além de unidades de comprimento. Existem unidades de área, volume, massa, força, energia, etc. Como o próprio nome diz, é um sistema cujas unidades e subunidades são divididas em potências de 10, facilitando as conversões de unidades e os cálculos.

A unidade de comprimento oficial do Sistema Métrico Decimal é o metro. O metro é definido em termos de constantes naturais e, desde 1983, corresponde à distância percorrida pela luz no vácuo em $\frac{1}{299792458}$ segundo.

Antes desta definição mais recente, o metro era definido como 1650763,73 comprimentos de onda da faixa laranja-avermelhada do espectro do Kriptônio-86. Os múltiplos mais utilizados do metro são o decâmetro, 1 dam = 10 m; o hectômetro, 1 hm = 10^2 m e o quilômetro, 1 km = 10^3 m, enquanto as suas sub-unidades são o decímetro, 1 dm = 10^{-1} m; o centímetro, 1 cm = 10^{-2} m e o milímetro, 1 mm = 10^{-3} m.

Exercícios Propostos

- 1) Mostre que a média e extrema razão é hereditária. Para isto tome $C \in \overline{AB}$, que divide este segmento em média e extrema razão e tome $D \in \overline{AC}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$. Basta mostrar que $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{DC}$. Lembre-se que $AC^2 = AB.CB$.
- 2) Calcule a medida dos segmentos que dividem o segmento unitário *u* em média e extrema razão.
- 3) Mostre o caso especial do princípio de exaustão para segmentos. Para isto tome os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \overline{AB}$ tais que $AA_1 < \frac{AB}{2}$, $AA_2 < \frac{AA_1}{2}$, e em geral, $AA_{n+1} < \frac{AA_n}{2}$. Tome qualquer segmento \overline{CD} e use a propriedade Arquimediana (veja teorema 1.3, item 2) para construir um segmento $\overline{XY} > \overline{AB}$ tal que $\overline{XY} = n\overline{CD}$. Então vá retirando, do segmento \overline{XY} , as cópias de \overline{CD} e ao mesmo tempo retire os segmentos $\overline{A_{n+1}A_n}$ de \overline{AB} , até que sobre uma só cópia de \overline{CD} . O que você conclui?



Figura 1.20

4) Estime o comprimento de alguma curva (pode ser qualquer curva que você desenhar em seu caderno) utilizando poli-

Múltiplos do metro:

- decâmetro (1 dam = 10 m);
- hectômetro (1 hm = 10^2 m);
- quilômetro (1 km = 10^3 m).

Sub-unidades:

- decímetro (1 dm = 10^{-1} m);
- centímetro (1 cm = 10⁻² m);
- milímetro (1 mm = 10^{-3} m).

- gonais feitas apenas com uma régua milimetrada. Verifique que, à medida que você aumenta o número de pontos da poligonal, a precisão fica cada vez maior.
- 5) O diâmetro de um conjunto de pontos pode ser definido como um número real não negativo, d, tal que: (1) Quaisquer dois pontos do conjunto possuem uma distância menor ou igual a d, e (2) Dado qualquer número real positivo x < d, existem dois pontos no conjunto cuja distância entre eles é maior que x. Mostre que o diâmetro de um segmento \overline{AB} é igual a AB.
- 6) Mostre que o diâmetro de um círculo de centro A e raio r = AB é igual a 2.r. E mostre que para todo ponto P sobre a circunferência (A,r) existe um ponto Q sobre a mesma circunferência de forma que PQ = 2.r. O segmento \overline{PQ} também será denominado diâmetro.

Portanto, recomendamoslhe uma atenção especial, pois a mesma palavra "diâmetro" no caso de um círculo ou circunferência pode se referir a um segmento ou à medida do mesmo.

Resumo

Neste capítulo, você apreendeu que:

- As noções primitivas de ponto, reta e plano são uma abstração de nossas experiências sensoriais e gráficas e são utilizadas comumente mesmo sem uma definição rigorosa.
- 2) Dois pontos quaisquer determinam uma única reta.
- 3) Uma reta não possui extremidades. É infinita.
- 4) Um segmento de reta \overline{AB} é a união dos pontos A e B com todos os pontos entre eles.
- 5) Uma semi-reta \overline{AB} é a união do segmento \overline{AB} com os pontos C tais que $B \in \overline{AC}$.
- 6) Todo ponto em uma reta divide-a em duas semi-retas opostas.
- 7) Toda reta em um plano divide-o em dois semiplanos.
- 8) Duas retas distintas em um plano podem ser paralelas ou concorrentes.

- 9) A todo segmento podemos atribuir um número real positivo que é o seu comprimento.
- 10) O comprimento é uma grandeza positiva, simétrica e aditiva.
- 11) Medir um segmento significa compará-lo com um segmento padrão de comprimento unitário.
- 12) Os segmentos, quando comparados entre si, podem ser comensuráveis, quando a razão entre seus comprimentos for racional, ou incomensuráveis, quando a razão entre seus comprimentos for irracional.
- 13) Pode-se medir o comprimento de qualquer arco de curva por aproximações por poligonais.

Bibliografia Comentada

Apresentamos a seguir algumas referências que poderão aprofundar os temas abordados neste capítulo, bem como oferecer uma relação mais ampla de exercícios em diversos níveis de dificuldade.

 DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. São Paulo: Atual, 1981. v. 9.

Esse livro faz parte de uma coleção de 10 volumes que representa o que de melhor existe em termos de livros didáticos para o ensino médio. O volume 9, em particular, trata de geometria plana e possui uma grande quantidade de exercícios de diversos níveis de dificuldade, além de uma série de testes de vestibulares no final do volume, abrangendo todo seu conteúdo. Recomendamos sem reservas esse livro e todos os outros da coleção como livros-texto nas salas de aula do ensino médio em todo o país.

2) EUCLID. **The thirteen books of the elements**: translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath. New York: Dover, 1956.

Essa edição em inglês da obra de Euclides é a mais completa e bem comentada existente no mercado editorial. Além do texto integral dos treze livros do grande mestre da Antigüidade, encontramos um trabalho de interpretação do texto original grego quase termo a termo,

bem como uma grande quantidade de explicações matemáticas, inclusive sobre desenvolvimentos posteriores. A falta de uma obra similar em língua portuguesa nos obriga a citar essa referência em língua inglesa.

3) LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

Essa é uma das pérolas da Coleção do Professor de Matemática. É uma série editada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o objetivo de aprimorar o ensino de matemática nos níveis fundamental e médio em todo o território nacional. Nesse livro, em particular, o grande mestre Elon Lages Lima faz uma reflexão sobre os conceitos de comprimento, área, volume e semelhança de uma maneira diferente de como tais temas são abordados nos livros didáticos tradicionais. Ao longo deste texto, seguimos de perto muitas das idéias sugeridas pelo mestre Elon, o que, de forma alguma torna dispensável a leitura de uma obra tão significativa para o ensino da matemática no Brasil. Recomendamos não somente este livro da Coleção do Professor de matemática, mas todos os outros. Não necessariamente para serem utilizados como livros-texto em sala de aula no ensino médio, mas para servirem de fonte de inspiração para aulas mais profundas e reflexões matemáticas mais sérias com os jovens estudantes. São, portanto, referências simplesmente indispensáveis na vida profissional do professor.

4) LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

Nesse livro, o mestre Elon se supera novamente, fazendo uma análise realista e cuidadosa do ensino de matemática no Brasil. Nada melhor que um matemático para falar de ensino de matemática. O livro consiste em uma coletânea de artigos, muitos deles publicados na Revista do Professor de Matemática, da SBM. Alguns artigos versam sobre o ensino de matemática, propriamente dito, expressando opiniões que deveriam ser anunciadas em alto e bom som a todos os professores de matemática em exercício no território nacional. Outros artigos trazem um conteúdo mais matemático, versando sobre geometria, combinatória, funções, geometria analítica e álgebra linear. Em particular, sobre o assunto de geometria, há três artigos notáveis: "Qual é mesmo a definição de polígono convexo?", "A soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)" e "Por que o espaço tem três dimensões?".

Capítulo 2

Ângulos e Medida de Ângulos

Capítulo 2

Ângulos e Medida de Ângulos

Neste capitulo você verá o conceito de ângulos e as definições de interior e exterior de um ângulo, ângulos adjacentes, suplemento de um ângulo e ângulo reto. A partir daí poderão ser definidos perpendicularismo de duas retas e, através da comparação de ângulos segundo as posições relativas de seus lados, ângulo agudo e ângulo obtuso. Somente então será introduzida a medida de um ângulo. Serão definidas ainda bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento e distância de ponto a uma reta. O capítulo finalizará com uma discussão sobre o quinto postulado de Euclides e suas formulações equivalentes.

O objetivo deste capítulo é familiarizá-lo com o conceito de ângulo, o segundo objeto geométrico que admite uma medida, depois de segmento, e os resultados que daí se seguem. Os ângulos serão de grande importância no estudo dos polígonos e na compreensão da congruência e semelhança das figuras planas formadas a partir de retas.

2.1 Conceituação de Ângulo

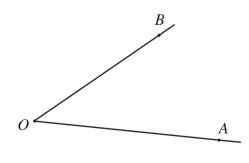


Figura 2.1 - Ângulo ∠AOB

Definição 2.1. Duas semi-retas distintas e não opostas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , de mesma origem O, definem um ângulo. (Ver Figura 2.1)

Denotaremos o ângulo definido pelas semi-retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} por $\angle AOB$. A origem comum das duas semi-retas é chamada **vértice** do ângulo e as semi-retas são chamadas **lados** do ângulo.

Observação: É indiferente escrever $\angle AOB$ ou $\angle BOA$, ou seja, as duas notações representam o mesmo ângulo. Ainda, se C é um

ponto de \overrightarrow{OA} , distinto de O e de A, e se D é um ponto de \overrightarrow{OB} distinto de O e de B, então $\angle COD$ (ou $\angle DOC$) é o mesmo que $\angle AOB$, ou seja, as duas notações representam o mesmo ângulo.

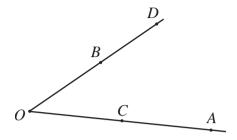


Figura 2.2 - $\angle AOB$, $\angle COD$, $\angle AOD$ ou $\angle COB$ denotam o mesmo ângulo.

O importante nesta notação de ângulo é que o vértice apareça entre as duas letras que caracterizam cada um dos lados do ângulo.

Costuma-se também denotar um ângulo por uma única letra – o seu vértice – quando, em uma certa figura, isto não for ambíguo. Por exemplo, na figura abaixo, podemos denotar $\angle A$ para o ângulo $\angle BAC$:

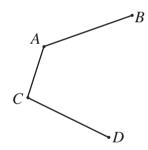


Figura 2.3 - $\angle A$ e $\angle BAC$ denotam o mesmo ângulo.

Em figuras, os ângulos podem ser "destacados" marcando-se um pequeno arco próximo ao seu vértice:

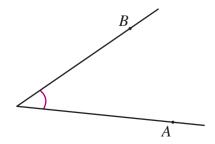


Figura 2.4 - "Marca" de ângulo.

Algumas vezes, ainda, poderá ser usada uma única letra (em geral letras gregas: α , β , γ etc) para indicar tanto um ângulo em uma figura como sua medida:

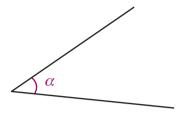


Figura 2.5 - O ângulo α marcado na figura.

A conceituação de ângulo dada nesta seção é bastante ingênua, exigindo tão somente duas semi-retas de mesma origem. Alguns textos didáticos tentam, erroneamente, definir ângulo como uma "região" do plano determinada por duas semi-retas, ou como um "giro" de uma das semi-retas até a outra ou ainda, diretamente, através de uma medida. Em linguagem coloquial o termo surge tanto para descrever o objeto geométrico (ângulo de uma esquina ou de um terreno), como acompanhado de uma medida (ângulo de tantos graus", ou "ângulo mais aberto ou mais fechado").

Exemplo: Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, segundo as combinações possíveis de semi-retas em cada reta (e lembrando que, em nossa conceituação, semi-retas opostas não definem um ângulo):

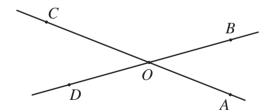


Figura 2.6 - Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos.

Na figura acima temos os ângulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle DOA$. O termo "ângulo entre duas retas" será posteriormente também interpretado de outra forma, usando-se medida de ângulo.

Os comentários acima sugerem que dois aspectos dos ângulos devam ser observados a partir de nossa conceituação. Um, de or-

dem qualitativa, refere-se a regiões: um ângulo separa o plano em duas regiões distintas. O outro, de ordem quantitativa, é decorrente da observação de que os ângulos não são todos "iguais", podendo ser mais ou menos "abertos" (referindo-se a quão "rápido" as duas semi-retas se separam). Começaremos discutindo o aspecto qualitativo.

2.2 Interior e Exterior de um Ângulo

Recordemos que uma reta divide o plano em exatamente dois semi-planos cuja intersecção é a própria reta. Dados uma reta r e dois pontos A e B, não pertencentes a r, se o segmento \overline{AB} não cruza r, então A e B estão em um mesmo semi-plano determinado por r, e dizemos que A e B estão no "mesmo lado" de r. Caso contrário (se A e B estão em semi-planos distintos), dizemos que A e B estão "em lados opostos" de r.

Definição 2.2. Um ponto P, não pertencente aos lados do ângulo $\angle AOB$, é dito **ponto interior** ao ângulo $\angle AOB$ se P e B estão no mesmo lado da reta \overrightarrow{OA} , e se P e A estão no mesmo lado da reta \overrightarrow{OB} . O **interior** de um ângulo $\angle AOB$ é o conjunto de todos os pontos interiores ao ângulo $\angle AOB$. Os pontos do plano que não pertencem aos lados do ângulo $\angle AOB$ e não são pontos interiores são ditos **pontos exteriores** ao ângulo, e o **exterior** de $\angle AOB$ é o conjunto desses pontos.

Na figura abaixo P é ponto interior e Q é ponto exterior ao ângulo $\angle AOB$:

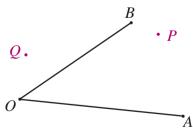


Figura 2.7 - P é ponto interior e Q é ponto exterior a $\angle AOB$.

Observe que o interior do ângulo $\angle AOB$ é a intersecção de dois semi-planos determinados, respectivamente, pelas retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} :

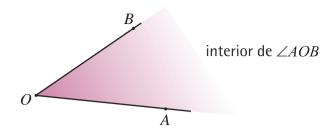


Figura 2.8 - 0 interior de $\angle AOB$.

Exercícios Resolvidos

1) Quantos ângulos são determinados por três retas concorrentes duas a duas?

Resolução:

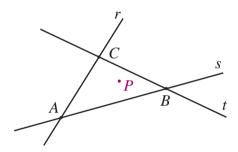


Figura 2.9 - r, s e t são três retas concorrentes duas a duas.

Três retas concorrentes duas a duas determinam $\binom{3}{2} = 3$ pontos. Em cada ponto temos quatro ângulos. São, portanto, 12 ângulos no total.

2) Argumente que a intersecção dos interiores dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACB$ da figura acima está contida no interior do ângulo $\angle ABC$.

Resolução: Devemos verificar que, se P é um ponto interior aos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACB$, então P é ponto interior ao ângulo $\angle ABC$. Se P é ponto interior a $\angle BAC$, então P e C estão no mesmo lado da reta \overrightarrow{AB} , e se P é ponto interior a $\angle ACB$ então P e A estão no mesmo lado da reta \overrightarrow{BC} . Segue-se daí que P é ponto interior de $\angle ABC$.

 $\binom{n}{p}$ denota o número de subconjuntos de p elementos formados a partir de n elementos.

Exercícios Propostos

- 1) Quantos ângulos ficam determinados por quatro retas concorrentes duas a duas? Generalize para *n* retas concorrentes duas a duas.
- 2) Quantos ângulos ficam determinados por três retas concorrentes em um mesmo ponto? Generalize para n retas.
- 3) Argumente que, se C é um ponto interior a um ângulo $\angle AOB$, então todos os pontos da semi-reta \overrightarrow{OC} , exceto o ponto O, são pontos interiores a $\angle AOB$.
- 4) Existe alguma reta passando pelo vértice O de um ângulo $\angle AOB$ que não contenha pontos interiores a $\angle AOB$?
- 5) Argumente que, se P e Q são pontos interiores a um ângulo $\angle AOB$, então todos os pontos do segmento \overline{PQ} são pontos interiores a $\angle AOB$.

2.3 Ângulos Adjacentes e Comparação de Ângulos

A seguir estabeleceremos uma maneira não quantitativa de comparar dois ângulos e definiremos ângulos adjacentes.

Considere dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle AOC$ de mesmo lado \overrightarrow{OA} e tais que os lados \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} estejam em um mesmo semi-plano em relação à reta \overrightarrow{OA} . Então três casos podem ocorrer:

- i) OC está no interior de $\angle AOB$ (exceto O), e neste caso dizemos que o ângulo $\angle AOC$ é **menor** do que o ângulo $\angle AOB$ (ou que $\angle AOB$ é **maior** do que $\angle AOC$).
- ii) OC coincide com OB, e neste caso dizemos que $\angle AOB$ e $\angle AOC$ são congruentes.
- iii) OC não está no interior de $\angle AOB$, e neste caso dizemos que $\angle AOC$ é **maior** do que $\angle AOB$ (ou que $\angle AOB$ é **menor** do que $\angle AOC$).

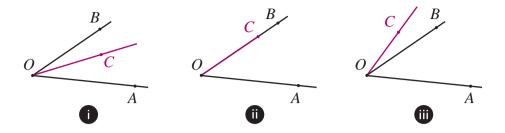


Figura 2.10 - Comparação entre ângulos.

Observação: A idéia intuitiva de congruência, segundo os geômetras gregos, é a de "coincidência por superposição". A comparação entre dois ângulos quaisquer (que não tenham lados coincidentes) poderia ser feita "transportando-se" um dos ângulos de modo que um de seus lados coincida com um dos lados do outro ângulo, e que os lados não coincidentes estejam em um mesmo semi-plano em relação à reta que contém o lado comum. Rigorosamente falando, o transporte de um ângulo só pode ser justificado através de axiomas de congruência. Uma outra forma de se abordar congruência (e comparação em geral) de ângulos é através de medida, o que será feito um pouco mais adiante.

Admitiremos assim a possibilidade de se comparar dois ângulos quaisquer $\angle AOB$ e $\angle CO'D$ e, caso sejam congruentes, denotaremos esta congruência por $\angle AOB \equiv \angle CO'D$.

Definição 2.3. Dois ângulos são ditos **adjacentes** se eles possuem um lado comum e se os outros dois lados estão em semi-planos distintos em relação à reta que contém o lado comum.

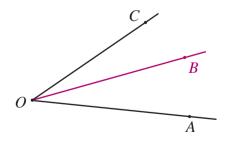


Figura 2.11 - $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são adjacentes.

Esta definição nos permite "adicionar" ângulos da seguinte maneira: se $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são ângulos adjacentes, então $\angle AOC$ é a "soma" dos dois ângulos. O mais importante da definição de ângulo adjacente é que ela nos leva aos conceitos de suplemento de um ângulo e de ângulo reto.

2.4 Suplemento de um Ângulo, Ângulo Reto e Retas Perpendiculares

Definição 2.4. Se dois ângulos adjacentes $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são tais que os lados não comuns \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} são semi-retas opostas, então dizemos que um é **suplemento** do outro.

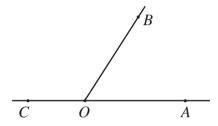


Figura 2.12 - $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são adjacentes suplementares.

Note que todo ângulo possui dois suplementos, dependendo do lado comum que se considere entre ele e o suplemento:

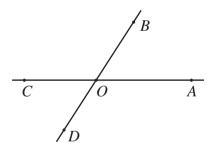


Figura 2.13 - $\angle BOC$ e $\angle AOD$ são suplementos de $\angle AOB$

Veremos que os dois suplementos de um ângulo são congruentes e passaremos a usar o artigo definido para referir-nos a suplemento de um ângulo, ou seja, diremos o suplemento do ângulo $\angle AOB$. Se $\angle BOC$ é suplemento de $\angle AOB$ também dizemos que os dois ângulos são suplementares. Este termo será usado de forma mais generalizada, como veremos adiante.

Definição 2.5. Um ângulo é dito **reto** se ele possui um suplemento que é congruente a ele.

B O A

Figura 2.14 – $\angle AOB$ é um ângulo reto

Observações:

- 1) Esta definição exige a idéia de congruência de ângulos quaisquer, conforme comentado anteriormente.
- 2) Decorre desta definição que, se um ângulo é reto, então o suplemento a ele congruente também é reto. Não fica claro ainda que o outro suplemento seja também um ângulo reto.
- 3) Graficamente, costuma-se "marcar" um ângulo reto usando-se um pequeno quadrado próximo a seu vértice.

A definição de ângulo reto nos permite definir um caso especial de retas concorrentes.

Definição 2.6. Duas retas são ditas **perpendiculares** se elas forem concorrentes e formarem um ângulo reto. Em outras palavras, duas retas r e s, concorrentes em um ponto O, são ditas perpendiculares se existirem semi-retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} contidas respectivamente em r e s tais que $\angle AOB$ seja um ângulo reto.

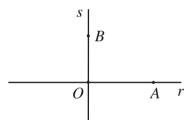


Figura 2.15 – r e s são retas perpendiculares

A notação $r \perp s$ é muitas vezes utilizada para indicar que as retas r e s são perpendiculares.

Definição 2.7. Um ângulo é dito **agudo** se ele for menor do que um ângulo reto, e um ângulo é dito **obtuso** se ele for maior do que um ângulo reto.

As três últimas definições suscitam as seguintes questões:

- Existem ângulos retos? Existem retas perpendiculares?
- Pode existir mais de um tipo de ângulo reto?

O próximo parágrafo esclarecerá um pouco estas questões.

2.5 O Postulado 4 de Euclides e Medida de Ângulo

A questão da existência de ângulos retos pode ser resolvida de forma rigorosa através de resultados (axiomas e proposições) de congruência. Euclides, em seus "Elementos", trata congruência (igualdade) como uma "noção comum" (uma figura é congruente a si própria, etc) e "prova" a existência de retas perpendiculares, mas é obrigado a estabelecer o seguinte postulado de uniformização:

Postulado 4 (Euclides). Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

Esse postulado nos diz que um ângulo reto não é apenas congruente a um suplemento seu mas também a qualquer outro ângulo do plano que possui um suplemento congruente a ele.

Isso faz com que **o** (com o artigo definido, pois só há um tipo) ângulo reto seja um ângulo especial: o único ângulo que possui uma caracterização própria. Por essa razão, ele pode ser considerado como uma medida padrão natural de ângulo (ao contrário do que ocorre, em Geometria Euclidiana com a medida de segmento, cujas unidades são arbitrárias).

Nosso enfoque aqui será o seguinte: usaremos o Postulado 4 de Euclides para definir uma unidade de medida de ângulo e, a partir daí, a congruência de ângulos será tratada como igualdade de medida de ângulos. Com isso, com o axioma das paralelas a ser visto no último parágrafo deste capítulo (com suas formulações equivalentes) e com um axioma de congruência de triângulos, chegaremos rapidamente a diversos resultados no próximo capítulo. Admitiremos também, por enquanto, a existência de retas perpendiculares.

A medida de um ângulo, assim como a medida de um segmento, é uma função que associa a cada ângulo um número real positivo, e que deve ser aditiva, ou seja, se $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são ângulos adjacentes, então a medida de $\angle AOC$ é igual à soma das medidas de $\angle AOB$ e $\angle BOC$. Denotamos por $A\widehat{OB}$ a medida do ângulo $\angle AOB$.

Veja no final deste capítulo a bibliografia comentada 1 (Heath) para saber mais sobre esta obra. **Observação:** Alguns textos utilizam a notação \widehat{AOB} para indicar o objeto geométrico ângulo (ao invés de $\angle AOB$), e a mesma notação para medida de ângulo.

Podemos agora definir uma unidade de medida a partir do padrão ângulo reto.

Definição 2.8. Definimos o **grau** como a medida de um ângulo que corresponde a $\frac{1}{90}$ da medida de um ângulo reto.

Em outras palavras, se "somarmos" 90 ângulos de medida igual a um grau (colocando-os sucessivamente adjacentes), obteremos um ângulo reto. Denotamos um ângulo de x graus por x° . Por exemplo, um ângulo reto tem medida 90° (noventa graus). Decorre da definição de ângulo reto que a soma das medidas de um ângulo e de um suplemento seu é igual à soma de dois ângulos retos, ou seja, igual a 180° . Reciprocamente, se a soma de dois ângulos adjacentes é igual a 180° então um é suplemento do outro.

Em alguns textos, o "ângulo" de 180° (o ângulo cujos lados são semi-retas opostas) é chamado de **ângulo raso**. Na nossa conceituação isto não é ângulo (e nem é possível definir interior de um tal "ângulo"). Por ora, o ângulo raso não tem nenhuma utilidade e o valor 180° deve ser tomado como soma de medidas de ângulos. Somente mais adiante, quando definirmos ângulo central na circunferência, e em trigonometria no círculo, é que será interessante estender o conceito de ângulo.

Tendo definido medida de um ângulo, passaremos a entender o termo "ângulo entre duas retas" como sendo a menor das medidas dos dois ângulos que essas retas formam (se as retas forem perpendiculares então, como já vimos, o ângulo entre elas tem medida 90°).

Definição 2.9. Dois ângulos são ditos **opostos pelo vértice** se os lados de um deles são respectivamente semi-retas opostas aos lados do outro.

Decorre dessa definição que ângulos opostos pelo vértice possuem o mesmo vértice.

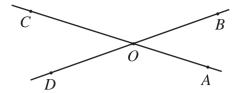


Figura 2.16 - $\angle AOB$ e $\angle COD$ são opostos pelo vértice.

Definiremos agora congruência de ângulos através da medida.

Definição 2.10. Dois ângulos são congruentes se, e somente se, eles possuem a mesma medida.

Resulta daí que congruência é uma relação de equivalência:

- i) é reflexiva (um ângulo é congruente a si próprio);
- ii) é simétrica (se $\angle AOB$ é congruente a $\angle CO'D$, então $\angle CO'D$ é congruente a $\angle AOB$);
- iii) é transitiva (se $\angle AOB$ é congruente a $\angle CO'D$ e se $\angle CO'D$ é congruente a $\angle EO''F$, então $\angle AOB$ é congruente a $\angle EO''F$).

A comparação de dois ângulos não congruentes se faz também através de suas medidas: $\angle AOB$ é **menor** do que $\angle CO'D$ se, e somente se, $A\widehat{O}B < C\widehat{O}'D$.

Teorema 2.1. Suplementos de ângulos congruentes são congruentes. Em particular, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Sejam $\angle AOB$ e $\angle DO'E$ ângulos congruentes e sejam $\angle BOC$ e $\angle EO'F$ seus respectivos suplementos. Então, de $A\widehat{O}B + B\widehat{O}C = 180^{\circ}$ e $D\widehat{O}'E + E\widehat{O}'F = 180^{\circ}$, e da hipótese $A\widehat{O}B = D\widehat{O}'E$, temos que $B\widehat{O}C = E\widehat{O}'F$ e, portanto, $\angle BOC \equiv \angle EO'F$. Observe a figura a seguir:

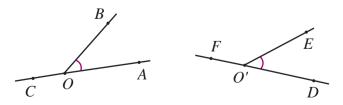


Figura 2.17 - Se $\angle AOB \equiv \angle DO'E$ então $\angle BOC \equiv \angle EO'F$.

No caso de ângulos opostos pelo vértice temos:

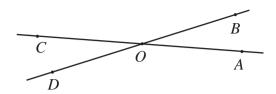


Figura 2.18 - $\angle AOB \equiv \angle COD$ e $\angle BOC \equiv \angle AOD$.

$$A\widehat{O}B + B\widehat{O}C = 180^{\circ} \text{ e } A\widehat{O}B + A\widehat{O}D = 180^{\circ} \text{. Logo } B\widehat{O}C = A\widehat{O}D \text{ .}$$

Decorre do teorema que os dois suplementos de um ângulo são congruentes. Desta forma, passaremos a falar **do** suplemento de um ângulo. Em particular, temos que duas retas perpendiculares determinam quatro ângulos retos com o mesmo vértice. A soma destes quatro ângulos em torno do mesmo ponto é igual a 360°.

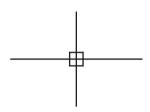


Figura 2.19 - Quatro ângulos retos em torno de um ponto.

De um modo geral, diremos que dois ângulos são **suplementares** se sua soma for igual a 180°.

Observação: O grau é decorrente do sistema sexagesimal (base 60), que foi utilizado pelos babilônios. Note que 360 é múltiplo de 60. A própria subdivisão (não decimal) do grau utilizada até hoje é proveniente deste sistema: o **minuto** é igual a $\frac{1}{60}$ do grau, e o **segundo** é igual a $\frac{1}{60}$ do **minuto**.

A milha marítima (aproximadamente 1852 m) é definida como sendo o comprimento de um arco sobre a linha do Equador cuja diferença de longitude é igual a um minuto. Até hoje, as velocidades dos navios são dadas na unidade "nó", que corresponde a uma milha (marítima) por hora.

Os sistemas de escrita numérica mais antigos que se conhecem são os dos egípcios e dos babilônios, que datam aproximadamente do ano 3500 a.C.. Os babilônios usavam um sistema posicional que, em algumas inscrições, mostram que eles usavam não somente um sistema decimal, mas também um sistema sexagesimal (isto é, base 60). Os números de 1 a 59 eram representados novamente por agrupamento simples e a partir dali, se escreviam "grupos de cunhas", com base 60. Por exemplo:



Fonte: <www.matematica.br/historia/babilonia.html>.

Outras unidades de medida de ângulo são:

- 1) o **grado**, que corresponde a $\frac{1}{100}$ da medida do ângulo reto. Essa unidade é pouco utilizada (parece que não foi de grande a**grado**...).
- 2) o **radiano**, uma unidade "natural" associada ao comprimento de arco de circunferência, e que será extremamente importante no estudo das razões trigonométricas como funções.

Exercícios Resolvidos

1) Na figura abaixo, $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 90^{\circ}$. Mostrar que $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

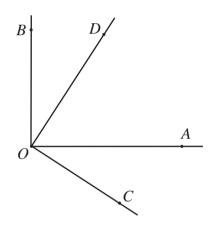


Figura 2.20 - Se $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 90^{\circ}$ então $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

Resolução: $A\widehat{O}B = A\widehat{O}D + B\widehat{O}D$ e $C\widehat{O}D = A\widehat{O}D + A\widehat{O}C$. Daí e da hipótese temos: $A\widehat{O}D + B\widehat{O}D = A\widehat{O}D + A\widehat{O}C$, ou $A\widehat{O}C = B\widehat{O}D$.

2) Dois ângulos são ditos **complementares** se sua soma for igual a 90°. Calcule dois ângulos complementares, sabendose que um deles é o dobro do outro.

Resolução: Sejam α e β as medidas dos dois ângulos. Então: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$ e $\alpha = 2\beta$. Segue-se que $3\beta = 90^{\circ}$, ou $\beta = 30^{\circ}$. Daí $\alpha = 60^{\circ}$.

Exercícios Propostos

- 1) Prove a seguinte generalização do exercício resolvido 1 desta seção: se dois ângulos têm a mesma origem e os seus lados são respectivamente perpendiculares, então eles são congruentes ou são suplementares (Sugestão considere dois casos: um em que os dois lados de um dos ângulos estão no mesmo semi-plano em relação a qualquer um dos lados do outro ângulo; o outro caso é aquele em que os dois lados de um mesmo ângulo estão em semi-planos distintos em relação a qualquer um dos lados do outro ângulo).
- 2) Considere n ângulos congruentes de mesmo vértice cuja soma é igual a 360°. Explique porque, se n for par então, estes ângulos formam n/2 pares de ângulos opostos pelo vértice. Explique porque, se n for ímpar, então não existe nenhum par destes ângulos que sejam opostos pelo vértice.
- 3) Determinar dois ângulos suplementares tais que um deles seja o triplo do complemento do outro.
- 4) Quais são os quatro ângulos adjacentes que podem ser obtidos em torno de um ponto, sabendo-se que estão em progressão aritmética de razão 20°?
- 5) Quatro semi-retas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} formam os ângulos adjacentes $\angle AOB$, $\angle BOC$ e $\angle COD$. Se $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 90^{\circ}$, e se $\widehat{BOC} = 40^{\circ}$, quanto vale \widehat{AOD} ?

2.6 Bissetriz de um Ângulo, Mediatriz de um Segmento e Distância de um Ponto a uma Reta

No capítulo anterior vimos que todo segmento de reta possui um único ponto médio. O análogo para ângulos é:

Definição 2.11. A **bissetriz** de um ângulo $\angle AOB$ é a semi-reta \overrightarrow{OC} , com C no interior de $\angle AOB$, tal que $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

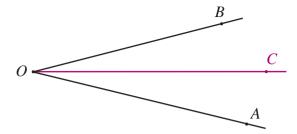


Figura 2.21 - \overrightarrow{OC} é bissetriz de $\angle AOB$ se $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

Admitiremos aqui que todo ângulo possui uma bissetriz. Que essa bissetriz é única é um fato decorrente da medida e da comparação de ângulos. Note que, se \overrightarrow{OC} é bissetriz de $\angle AOB$, então

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \frac{\widehat{AOB}}{2}.$$

No que se segue, utilizaremos os seguintes resultados, cujas demonstrações serão vistas no próximo capítulo:

- 1) Por qualquer ponto de uma reta passa uma, e somente uma, reta perpendicular àquela reta.
- 2) Por qualquer ponto fora de uma reta passa uma, e somente uma, reta perpendicular àquela reta.

Definição 2.12. A **mediatriz** de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele.

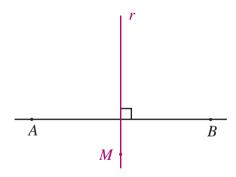


Figura 2.22 – r é mediatriz de \overline{AB}

A perpendicular traçada a uma reta, por um ponto fora dela, cruza a reta em um ponto que denominamos **pé da perpendicular**.

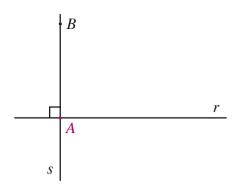


Figura 2.23 – $r \perp s$ e A é o pé da perpendicular s por P.

Definição 2.13. A distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento cujas extremidades são o ponto e o pé da perpendicular à reta pelo ponto. Se o ponto está na reta então a sua distância a esta reta é zero.

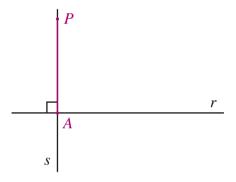


Figura 2.24 - PA é a distância de P à reta r.

Veremos no próximo capítulo que a distância de um ponto a uma reta é o menor dos comprimentos dos segmentos que têm o ponto como uma extremidade e um ponto da reta como outra.

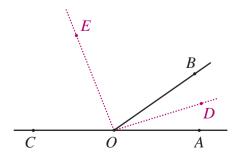


Figura 2.25 - \overrightarrow{OD} é bissetriz de $\angle AOB$ e \overrightarrow{OE} é bissetriz de $\angle BOC$.

Exercícios Resolvidos

1) Provar que as bissetrizes de um ângulo e de seu suplemento formam um ângulo reto.

Resolução: Sejam $\angle AOB$ e $\angle BOC$ adjacentes suplementares, e sejam \overrightarrow{OD} e \overrightarrow{OE} as bissetrizes de $\angle AOB$ e $\angle BOC$ respectivamente.

Então:
$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^{\circ}$$
, $\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ e

$$B\widehat{O}E = C\widehat{O}E = \frac{B\widehat{O}C}{2}$$
.
Mas $D\widehat{O}E = B\widehat{O}D + B\widehat{O}E = \frac{A\widehat{O}B}{2} + \frac{B\widehat{O}C}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$. Portanto $\angle DOE$ é reto.

2) Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão sobre a mesma reta.

Resolução: Sejam $\angle AOB$ e $\angle COD$ dois ângulos opostos pelo vértice.

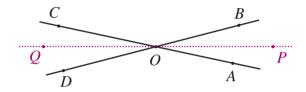


Figura 2.26 - $\angle AOB$ e $\angle COD$ são opostos pelo vértice.

Sejam
$$\overrightarrow{OP}$$
 e \overrightarrow{OQ} respectivamente as bissetrizes de $\angle AOB$ e de $\angle COD$. Então, como $A\widehat{OB} = C\widehat{OD}$, temos $P\widehat{OB} + B\widehat{OQ} = \frac{A\widehat{OB}}{2} + B\widehat{OC} + \frac{C\widehat{OD}}{2} = B\widehat{OC} + A\widehat{OB} = 180^{\circ}$.

Segue-se que $\angle POB$ e $\angle BOQ$ são adjacentes e suplementares e, portanto, um é suplemento do outro, ou seja, \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} são semiretas opostas e pertencem à mesma reta.

Exercícios Propostos

- 1) Qual o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes complementares? Explique.
- 2) Do vértice de um ângulo traça-se uma semi-reta interior ao ângulo. Prove que o ângulo formado por esta semi-reta com a bissetriz do ângulo dado é igual ao valor absoluto da metade da diferença das medidas dos ângulos que a semi-reta forma com os lados do ângulo dado.
- 3) Sejam $\angle AOB$ e $\angle AOC$ doisângulostaisque $\widehat{AOC} \widehat{AOB} = 90^{\circ}$. Mostre que suas bissetrizes formam um ângulo de 45°.

2.7 O Postulado 5 de Euclides e Formulações Equivalentes

O quinto postulado de Euclides foi o mais polêmico de todos. Durante muito tempo pensou-se que ele poderia não ser um postulado e sim uma conseqüência dos outros postulados. Euclides, em seus *Elementos*, demorou a usá-lo. De fato, muita geometria pode ser desenvolvida sem esse postulado, o que, na visão axiomática moderna estabelecida por Hilbert, é chamado hoje em dia de geometria neutra.

Veja no final deste capítulo a bibliografia comentada 2 (Hilbert) para saber mais sobre este autor.

Começaremos enunciando o postulado como formulado por Euclides nos *Elementos*, e depois veremos algumas formulações equivalentes. Antes, vejamos uma definição.

Definição 2.14. Sejam r e s duas retas distintas e seja t uma reta que cruza r em P e s em Q. A reta t é chamada **transversal** às retas r e s.

Estas retas determinam oito ângulos com vértices P e Q (quatro pares de ângulos opostos pelo vértice) com denominações específicas. Observe a figura a seguir:

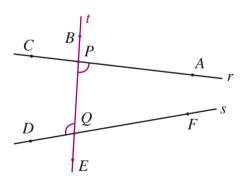


Figura 2.27 - $\angle APQ$ e $\angle DQP$ são alternos internos

- Os ângulos dos pares ($\angle APQ$, $\angle DQP$) e ($\angle CPQ$, $\angle FQP$) são chamados **alternos** internos.
- Os ângulos dos pares $(\angle APB, \angle FQP)$, $(\angle CPB, \angle DQP)$, $(\angle APQ, \angle FQE)$ e $(\angle CPQ, \angle DQE)$ são chamados **correspondentes**.

Os ângulos cujos lados contêm o segmento \overline{PQ} são denominados **ângulos internos** resultantes da intersecção da transversal t com as retas r e s.

Postulado 5 (Euclides). Se duas retas são interceptadas por uma transversal de modo que a soma de dois ângulos interiores (internos) de um dos lados da transversal seja menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas se cruzam naquele lado da transversal.

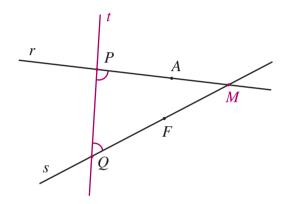


Figura 2.28 – $\widehat{APQ} + \widehat{FQP} < 180^{\circ}$: $r \in s$ se cruzam em M.

Apesar de não falar em paralelas, o Postulado V de Euclides possui formulações equivalentes que falam explicitamente em tais retas. A mais conhecida é a versão de John Playfair (1795), algumas vezes denominada Postulado de Playfair, embora já tivesse sido citada por Proclus (410–485 d.C.). Vamos nos referir a ela como "Axioma das Paralelas". Outra versão é um importante resultado que será usado freqüentemente neste texto, e que denominaremos "Teorema das duas Paralelas Interceptadas por uma Transversal". Uma outra versão refere-se à "distância entre duas retas paralelas".

Axioma das Paralelas (Playfair). Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa uma, e somente uma, reta paralela a *r*.

Teorema das Duas Paralelas Interceptadas por uma Transversal. Duas retas paralelas interceptadas por uma transversal produzem ângulos alternos internos congruentes (veja figura).

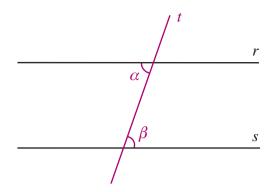


Figura 2.29 – Teorema das duas paralelas: $\alpha = \beta$.

Teorema da Distância de Duas Paralelas. Se duas retas *r* e *s* são paralelas, então todos os pontos de *r* estão à mesma distância de *s*.

Não vamos provar agora estas equivalências, mas cabem aqui algumas observações. A **existência** de uma paralela a uma reta por um ponto fora dela é um resultado que pode ser demonstrado a partir de outros axiomas anteriores (a geometria elítica, onde não há paralelas, não é consistente com aqueles axiomas). A geometria hiperbólica, onde por cada ponto fora de uma reta passa mais de uma paralela, é consistente com aqueles axiomas.

Veja no final deste capítulo a bibliografia comentada 3 (Greenberg) para saber mais sobre este tema.

> A recíproca do teorema das duas paralelas também é um resultado independente do axioma das paralelas, mas, em nossa abordagem, ele será uma conseqüência desse axioma. Ele é um critério muito útil de paralelismo e será usado freqüentemente no presente texto:

> **Recíproca do Teorema das Duas Paralelas** – Se *r* e *s* são duas retas que, interceptadas por uma transversal *t*, produzem ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.

Devido à sua importância em tudo que faremos neste texto, vamos re-enunciar os dois resultados em um único teorema:

Teorema 2.2. Duas retas são paralelas se, e somente se, qualquer transversal que as intercepte produzir ângulos alternos internos congruentes.

Observe que ângulos alternos internos congruentes implicam em ângulos correspondentes congruentes e reciprocamente, pois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Confira na figura abaixo:

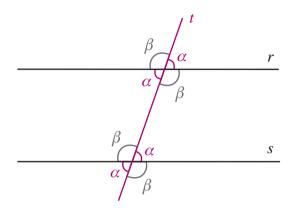


Figura 2.30 – Duas paralelas interceptadas por uma transversal produzem no máximo dois ângulos distintos

Note ainda que, na figura acima, se $\alpha = 90^{\circ}$, então $\beta = 90^{\circ}$.

Enunciamos a seguir algumas conseqüências do axioma das paralelas (e equivalentes), cujas demonstrações serão deixadas como exercícios.

- 1) Sejam *r* e *s* retas paralelas. Se *t* é uma reta que intercepta *r*, então *t* também intercepta *s*.
- 2) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
- 3) Se *r* e *s* são perpendiculares a *t*, então *r* e *s* são paralelas ou são coincidentes.
- 4) Se *r* e *s* são paralelas e se *r* é perpendicular a *t*, então *s* também é perpendicular a *t*.

Para finalizar esta seção, observamos que a notação r//s será utilizada para indicar que a reta r é paralela à reta s.

Exercícios Resolvidos

1) Provar o axioma das paralelas (*Playfair*) a partir do postulado 5 de Euclides.

Resolução: Sejam r uma reta e P um ponto fora de r. Seja s uma reta paralela a r passando por P (lembre-se que estamos admitindo a existência da paralela). Vamos provar que s é a única paralela a r por P. Observe que, do paralelismo de r e s e do postulado 5 de Euclides, temos para uma transversal passando por P (veja figura): $\alpha + \beta \ge 180^\circ$ e $\gamma + \delta \ge 180^\circ$.

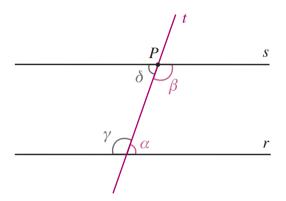


Figura 2.31 – r//s implica em $\alpha + \beta \ge 180^{\circ}$ e $\gamma + \delta \ge 180^{\circ}$

Mas, então, como $\beta+\delta=180^\circ$ e $\alpha+\gamma=180^\circ$, temos que se $\alpha+\beta>180^\circ$, então $\gamma+\delta<180^\circ$ e r e s não seriam paralelas. Seque-se que $\alpha+\beta=180^\circ$ e $\gamma+\delta=180^\circ$.

Suponha agora que u seja outra reta qualquer passando por P.

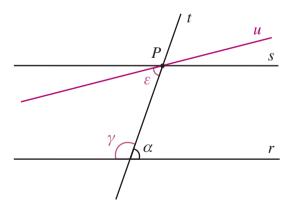


Figura 2.32 – Aqui $\gamma + \varepsilon < 180^{\circ}$ e portanto u e r não são paralelas.

Então $\varepsilon < \delta$ (ou $\varepsilon < \beta$ com ε do mesmo lado de β) e daí temos $\gamma + \varepsilon < 180^\circ$. Segue-se, do Postulado 5, que u e r se interceptam. Portanto s é a única paralela a r.

2) Provar que, se *r* e *s* são retas paralelas, e se *t* intercepta *r*, então *t* também intercepta *s*.

Resolução: Seja P o ponto de intersecção de t com r. Suponha que t não intercepte s. Então, por P, passam duas paralelas à reta s: as retas r e t. Isto contradiz o axioma das paralelas.

3) Provar que, se dois ângulos quaisquer possuem os dois lados respectivamente paralelos ou os dois lados respectivamente perpendiculares, então eles são congruentes ou são suplementares.

Resolução: Sejam $\angle AOB$ e $\angle CO'D$ dois ângulos quaisquer tais que \overrightarrow{OA} é paralelo a $\overrightarrow{O'C}$ e \overrightarrow{OB} é paralelo a $\overrightarrow{O'D}$. Então dois casos podem ocorrer (veja as figuras):

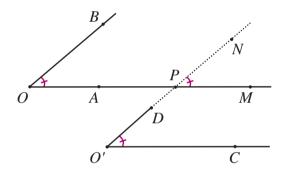


Figura 2.33 - $\angle AOB$ e $\angle CO'D$ são congruentes

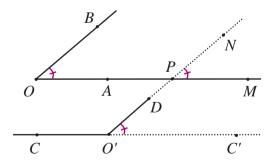


Figura 2.34 - $\angle AOB$ e $\angle CO'D$ são complementares

Na figura 33, o lado $\overrightarrow{O'D}$ de $\angle CO'D$ intercepta o lado \overrightarrow{OA} em P, e $\widehat{MPN} = \widehat{CO'D}$ (correspondentes). Mas $\widehat{MPN} = \widehat{AOB}$ (correspondentes). Logo $\widehat{CO'D} = \widehat{AOB}$.

Na figura 2.34, o suplemento de $\angle CO'D$, o ângulo $\angle C'O'D$, é que é congruente a $\angle AOB$. Logo, $\angle CO'D$ e $\angle AOB$ são suplementares (faça figuras para o caso em que os dois ângulos são obtusos).

Suponha agora que \overrightarrow{OA} seja perpendicular a $\overrightarrow{O'C}$ e \overrightarrow{OB} seja perpendicular a $\overrightarrow{O'D}$. Neste caso, transporta-se $\angle CO'D$ de modo que O' coincida com O e os lados do ângulo transportado se mantenham paralelos aos lados de $\angle CO'D$. Basta então aplicar o exercício proposto 1 da seção 2.5.

Exercícios Propostos

- 1) Prove o teorema das duas paralelas interceptadas por uma transversal a partir do Postulado 5 de Euclides.
- 2) Prove que duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
- 3) Prove que, se *r* e *s* são duas retas distintas perpendiculares a *t*, então *r* e *s* são paralelas entre si.
- 4) Prove que, se *r* e *s* são paralelas e se *r* é perpendicular a *t*, então *s* também é perpendicular a *t*.
- 5) Prove que, por um ponto *P* fora de uma reta *r*, passa no máximo uma perpendicular a *r*.

Resumo

Neste capítulo conceituamos ângulo e chegamos à medida de ângulo através de um ângulo natural padrão que é o ângulo reto. Discutimos também os postulados 4 e 5 de Euclides e estabelecemos alguns resultados fundamentais sobre paralelismo. Devido ao seu caráter mais conceitual, poucos exercícios foram aqui resolvidos ou propostos. Nos próximos capítulos veremos diversas conseqüências deste capítulo.

Bibliografia Comentada

1) HEATH, T. L. **Euclid's elements**. New York: Dover, 1956.

É a tradução, em inglês, do mais famoso livro de matemática, um dos mais editados no mundo. O "Elementos" é composto de treze livros que tratam de diversas áreas da matemática, desde a geometria até a álgebra. Todos os fundamentos da geometria euclidiana estão aí colocados, com diversos resultados demonstrados.

2) HILBERT, David. **Fundamentos de geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

A visão moderna da geometria euclidiana segundo o grande matemático alemão David Hilbert. Nele os axiomas são escolhidos de forma a permitir um rigoroso desenvolvimento da geometria sem que sejam necessárias as "noções comuns" e outras imprecisões dos "Elementos" de Euclides.

3) GREENBERG, M. J. Euclidean and non-euclidean geometries. New York: W. H. Freeman, 1974.

Uma variação do livro de Hilbert, com um estudo sobre as geometrias não euclidianas.

Capítulo 3

Triângulos

Capítulo 3

Triângulos

Este capítulo é bem mais denso em resultados do que o capítulo anterior. Seu conteúdo é de extrema importância na geometria plana e espacial e, juntamente com os capítulos de semelhança e área, cobre uma grande parte dos resultados centrais da geometria euclidiana. Basicamente, estudaremos congruência de triângulos e todos os resultados sobre triângulos daí decorrentes, passando pelo estudo de tangência e de ângulos na circunferência. Abordaremos também, pela primeira vez, problemas de construção geométrica com régua e compasso. Tais problemas estão espalhados ao longo de todo o capítulo como aplicação do desenvolvimento do conteúdo. Iniciaremos o capítulo com uma breve introdução a essas construções.

3.1 Construções com Régua e Compasso

As construções com régua e compasso tiveram um papel importante no desenvolvimento da matemática na Grécia Antiga. Para os gregos, resolver um problema algébrico ou geométrico, significava construir sua solução. Os três primeiros postulados de Euclides basicamente estabelecem as ferramentas utilizadas nessas construções: a régua (sem escala), utilizada para traçar um segmento de reta (postulado 1), ou para estendê-la (postulado 2), e o compasso, para traçar circunferências (postulado 3). As construções são realizadas obtendo-se pontos resultantes das intersecções de duas retas, de reta e circunferência ou de duas circunferências. Deve-se ressaltar aqui que a régua é um instrumento sem escalas, servindo apenas para traçar retas (na prática segmentos), e que o compasso, para os gregos, era um instrumento que servia apenas para traçar circunferências, sendo dados dois pontos que determinam o raio, e não para transportar segmentos ou medi-

Um, onde é colocada a "ponta seca" – o centro da circunferência – e o outro ponto da própria circunferência.

das. Possivelmente, por razões de precisão, os gregos consideravam que o compasso se "fechava" assim que ambas as pontas não mais tocavam o papel (o chamado "compasso de Euclides"). No entanto, vimos, no capítulo 1, que é sempre possível transportar um segmento para qualquer reta. Sendo assim, é aceita como regra do uso do compasso o transporte de medidas de um lugar para outro.

O uso de instrumentos tais como régua graduada, régua com marcações e transferidores não era considerado preciso pelos gregos. Construções realizadas com aqueles instrumentos eram consideradas aproximadas. A própria construção com régua e compasso dos gregos é imprecisa, pois não existe uma régua perfeita nem compassos totalmente precisos. Além disso, a linha – reta ou não – que desenhamos tem espessura, e assim, não há precisão na prática na marcação de pontos. Deve-se considerar, portanto, as construções com régua e compasso, segundo os gregos, de um ponto de vista idealizado. Chamaremos de **Construções Geométricas** a esse tipo de construções.

Uma pergunta natural que surge é: o que pode e o que não pode ser construído com régua e compasso? Os gregos não conseguiram resolver vários problemas, três dos quais ficaram bem conhecidos:1) a "duplicação de um cubo"; 2) a "trissecção de um ângulo"; e 3) a "quadratura do círculo". A pergunta acima pôde ser respondida no século XIX de modo genial com uma teoria da álgebra chamada **Teoria de Galois** e ficou provado que aqueles três problemas não têm solução. Métodos aproximados foram desenvolvidos antes disso. Arquimedes, um gênio da resolução de problemas práticos, resolveu alguns destes problemas. Deve-se notar que as "ciências naturais" se desenvolveram pelo método empírico: observar (através de uma experiência), refletir (elaborar uma teoria ou modelo) e experimentar (testar o modelo). Tal método tem suas imprecisões, mas toda a ciência atual (e suas conseqüências tecnológicas) está baseada nisso.

Não existe um método sistemático para resolver problemas de construções geométricas. Basicamente, o que deve ser feito é uma análise do problema: supor o problema resolvido (construído) e tentar observar quais construções intermediárias auxiliares po-

De fato, tente construir um segmento de comprimento $l\sqrt{2}$, a partir de um segmento dado de comprimento l, fazendo contas e usando uma régua com escala, ou tente construir com precisão um simples ângulo de 60° usando transferidor.

Duplicação de um cubo: construir um cubo de volume igual ao dobro do volume de um cubo dado.

Trissecção de um ângulo: dividir um ângulo qualquer em três ângulos congruentes.

Quadratura do círculo: construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. dem ser realizadas a partir dos elementos conhecidos. Nos problemas de construção geométrica são dados segmentos, ângulos (ou soma destes), medidas em geral, e pede-se para construir um determinado objeto geométrico a partir daqueles dados. Por exemplo, construir um triângulo sendo conhecido um de seus lados, a altura relativa a esse lado e o ângulo oposto ao lado dado. Um problema pode não ter solução (como já vimos), pode ter dados incompatíveis, ou pode ter uma ou várias soluções. A capacidade de resolução de um problema aumenta conforme aumentam os conhecimentos do estudante. Algumas técnicas específicas podem, e devem, ser usadas, como por exemplo, resultados do estudo das transformações geométricas (simetria, translação, rotação, homotetia e inversão). Veja o estudo destas transformações nos capítulos 6 e 7.

Uma última observação: entendemos por construção geométrica

o uso de resultados da geometria euclidiana para a construção de objetos geométricos de forma abstrata (ou idealizada). Não estamos preocupados com técnicas de utilização das ferramentas régua e compasso, mesmo porque hoje em dia existem *softwares* computacionais de "geometria dinâmica" que dão a devida precisão ao processo construtivo.

Que permite modificar ou movimentar elementos iniciais da construção com a conseqüente alteração do resultado.

3.2 Triângulos e seus Elementos

Definição 3.1. Um triângulo fica definido por três pontos não colineares e os três segmentos de reta que têm, cada um, dois destes pontos como extremidades.

Denotaremos por $\triangle ABC$ ao triângulo definido pelos três pontos não colineares A, B e C. É indiferente escrever $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle ACB$ etc.

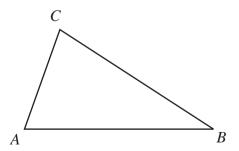


Figura 3.1 - ΔABC

Os pontos não colineares A, B e C são chamados **vértices do triângulo** $\triangle ABC$, e os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são chamados **lados do triângulo** $\triangle ABC$. Os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, ou simplesmente $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, são chamados **ângulos do triângulo** $\triangle ABC$. Dizemos ainda que $\angle A$ é o **ângulo oposto** ao lado \overline{BC} , ou que \overline{BC} é o **lado oposto** ao ângulo $\angle A$, o mesmo em relação aos outros ângulos e lados.

Uma outra notação bastante comum para os lados (ou suas medidas – aqui ambos se confundem) é usar letras minúsculas iguais ao ângulo oposto. Por exemplo, denotaremos por a o lado \overline{BC} (ou sua medida), oposto ao ângulo $\angle A$.

Definição 3.2. O perímetro de um triângulo é a soma das medidas de seus três lados.

Denota-se usualmente o perímetro por 2p. Por que 2p? Porque então p representa a metade do perímetro, o **semiperímetro**, e este valor aparece em muitas expressões de cálculos de segmentos especiais e áreas de triângulos. Assim, se ΔABC é um triângulo, teremos:

$$2p = AB + BC + CA = c + a + b$$

Observação: Os triângulos pertencem a uma classe de objetos geométricos denominados **polígonos**, que serão definidos no próximo capítulo. A partir daquela definição poderemos definir um triângulo como sendo um polígono de três lados.

Definição 3.3. Um ponto P é dito **ponto interior** do triângulo $\triangle ABC$ se P pertence ao interior dos três ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo. O conjunto dos pontos interiores do triângulo $\triangle ABC$ é chamado **interior** de $\triangle ABC$.

Observações:

- 1) Verificamos, no exercício resolvido 2, da seção 2.2, que a intersecção dos interiores de **dois** dos ângulos de um triângulo $\triangle ABC$ já nos dá o interior de $\triangle ABC$.
- 2) É prática comum utilizar a palavra triângulo tanto para o conjunto formado pelos vértices e lados como para o conjunto formado pelos vértices, lados **e** interior. Falaremos em

- perímetro de um triângulo (utilizado na primeira acepção da palavra) e falaremos de área de um triângulo, como uma região delimitada no plano (segunda acepção).
- Os pontos do plano que n\u00e3o pertencem aos lados do tri\u00e3ngulo nem ao seu interior s\u00e3o ditos exteriores ao tri\u00e3ngulo.

Os triângulos podem ser classificados segundo as medidas de seus lados ou as medidas de seus ângulos. Embora não tenhamos ainda à mão resultados sobre os possíveis tipos de triângulos, vamos introduzir a nomenclatura desde já:

Quanto aos lados os triângulos são denominados:

- i) Equiláteros os três lados são congruentes;
- ii) Isósceles (pelo menos) dois lados congruentes;
- iii) Escalenos três lados distintos.

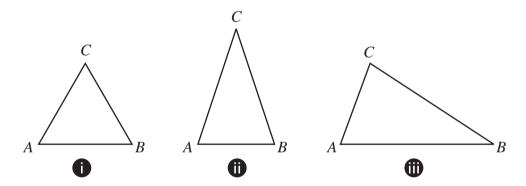


Figura 3.2 - (i) equilátero; (ii) isósceles e (iii) escaleno

Note que todo triângulo equilátero é isósceles. Não há nenhuma razão para considerar uma classe à parte de triângulos com exatamente dois lados congruentes. Ao contrário, os triângulos equiláteros pertencem à classe dos triângulos isósceles por herdarem suas propriedades.

Quanto aos ângulos, os triângulos são denominados:

- i) Acutângulos todos os ângulos agudos
- ii) Retângulos um ângulo reto
- iii) Obtusângulos um ângulo obtuso

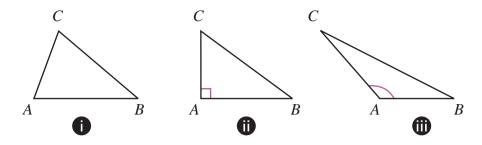


Figura 3.3 - (i) acutângulo; (ii) retângulo e (iii) obtusângulo

Um triângulo não pode ter dois ângulos com medidas maiores ou iguais a 90°. Isto será provado na próxima seção. Uma terminologia específica é utilizada nos triângulos isósceles e nos triângulos retângulos.

Os lados congruentes de um triângulo isósceles são chamados de **laterais**, e o terceiro lado (possivelmente não congruentes aos outros dois) é chamado **base** do triângulo isósceles. O termo base poderá também ser usado para qualquer lado de qualquer triângulo em um contexto de cálculo de área.

Já no triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos.

Exercício Proposto

Seja *P* um ponto interior de um triângulo. Quantos lados do triângulo podem cruzar uma semi-reta com origem *P*? (Considere dois casos: a semi-reta passando ou não por um vértice). Seja agora *P* um ponto exterior ao triângulo. Quantos lados podem cruzar uma semi-reta com origem *P*? (Considere quatro casos: uma semi-reta contendo um lado do triângulo, uma semi-reta passando por somente um vértice, uma semi-reta passando por dois lados mas não por qualquer vértice, e uma semi-reta que não contém pontos dos triângulos).

Hipotenusa: do grego "hypoteínousa', linha estendida por baixo.

Cateto: do grego "kátetos", vertical, perpendicular.

3.3 A Soma dos Ângulos de um Triângulo e suas Conseqüências

A soma dos ângulos de um triângulo (também chamados **ângulos internos**, em contraposição aos suplementos de cada um deles, chamados **ângulos externos**) é bem definida.

Teorema 3.1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo qualquer e seja r uma reta paralela ao lado \overline{AB} passando por C. Sejam P e Q pontos de r tais que C está entre P e Q (figura).

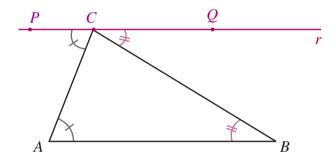


Figura 3.4 - $P\widehat{C}A = B\widehat{A}C$ e $Q\widehat{C}B = A\widehat{B}C$

Então, do teorema das duas paralelas interceptadas por uma transversal temos que $\angle PCA$ e $\angle BAC$ são ângulos alternos internos congruentes e $\angle QCB$ e $\angle ABC$ também são ângulos alternos internos congruentes. Assim:

$$P\widehat{C}A = B\widehat{A}C \ e \ Q\widehat{C}B = A\widehat{B}C.$$

Como $\angle PCA$ e $\angle ACQ$ são adjacentes suplementares, segue-se que:

$$P\widehat{C}A + A\widehat{C}Q = 180^{\circ}$$
.

Mas $\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} + \widehat{QCB}$. Daí, temos:

$$P\widehat{C}A + A\widehat{C}B + Q\widehat{C}B = 180^{\circ}$$
, ou $B\widehat{A}C + A\widehat{C}B + A\widehat{B}C = 180^{\circ}$

Este teorema tem algumas consequências:

- 1) Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos agudos. De fato, se isso não ocorresse, então a soma de dois ângulos do triângulo seria maior ou igual a 180° e, portanto, a soma dos **três** ângulos seria maior do que 180°; o que não é possível.
- 2) A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é igual a 90°.
- 3) A medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos a ele não adjacentes. Considere a figura:

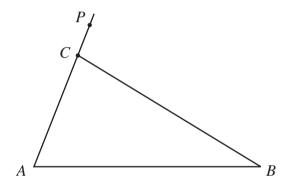


Figura 3.5 - $P\widehat{C}B = B\widehat{A}C + A\widehat{B}C$

Os ângulos $\angle PCB$ e $\angle BCA$ são adjacentes suplementares. Então $P\widehat{C}B + B\widehat{C}A = 180^{\circ}$. Mas $P\widehat{C}B + B\widehat{C}A = 180^{\circ}$. Segue-se que $P\widehat{C}B = P\widehat{C}A + P\widehat{C}A = 180^{\circ}$.

Observação: Segue-se deste resultado que qualquer ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Isto é também chamado Teorema do Ângulo Externo que, no sistema axiomático moderno (Hilbert), é independente do axioma das paralelas (ou do teorema das duas paralelas interceptadas por uma transversal).

4) Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa no máximo uma perpendicular à reta *r*. De fato, se houvesse duas perpendiculares, então teríamos um triângulo com dois ângulos retos, o que não é possível.

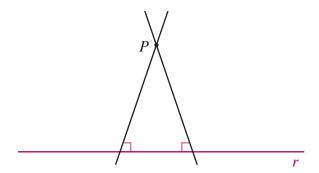


Figura 3.6 - Não existem duas perpendiculares à r por P

5) (**Recíproca do Teorema das Duas Paralelas**) – Se duas retas, interceptadas por uma transversal, produzem ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.

Sejam *r* e *s* duas retas e *t* transversal a elas.

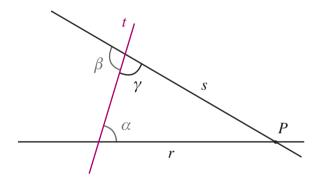


Figura 3.7 - Se $\alpha = \beta$ então $\alpha + \gamma = 180^{\circ}$ e r não cruza s

Seja $\alpha=\beta$ e suponha que r e s não sejam paralelas. Então r e s se cruzam em um ponto P, e juntamente com a reta t formam um triângulo (figura 3.7). Os ângulos a e g são ângulos internos desse triângulo. Mas $\beta+\gamma=180^\circ$. Segue-se que $\alpha+\gamma=180^\circ$, o que não pode ocorrer. Logo, r é paralela a s. Outras conseqüências do teorema 3.1 surgirão mais adiante.

Exercícios Resolvidos

1) Mostre que a soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°.

Resolução: Sejam α , β e γ respectivamente os ângulos externos relativos aos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo $\triangle ABC$.

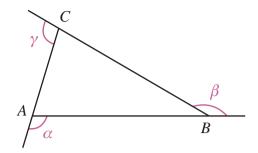


Figura 3.8 - $\alpha + \beta + \gamma = 360^{\circ}$

Então: $\widehat{A} + \alpha = \widehat{B} + \beta = \widehat{C} + \gamma = 180^{\circ}$.

Segue-se que $(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C})+(\alpha+\beta+\gamma)=3\cdot180^\circ=540^\circ$. Daí, como $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$, temos $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$.

2) Quais são os ângulos internos de um triângulo, sabendose que dois deles são congruentes e o terceiro tem medida igual à metade da medida de qualquer um dos outros dois?

Resolução: Sejam α , α e β as medidas dos três ângulos, com $\alpha = 2\beta$. Então $\alpha + \alpha + \beta = 5\beta = 180^{\circ}$, ou $\beta = 36^{\circ}$. Daí $\alpha = 72^{\circ}$.

3) Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja P um ponto interior do triângulo. Prove $A\widehat{P}B > A\widehat{C}B$.

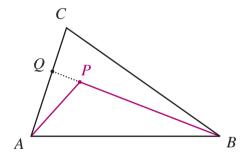


Figura 3.9 - $\widehat{APB} > \widehat{ACB}$

Resolução: A semi-reta \overrightarrow{BP} cruza o lado \overrightarrow{AC} em um ponto Q. O ângulo $\angle APB$ é externo em relação ao ângulo interno $\angle APQ$ do triângulo ΔAPQ . Então $A\widehat{P}B = A\widehat{Q}P + P\widehat{A}Q > A\widehat{Q}P$. O ângulo $\angle AQP$ é externo em relação ao ângulo interno $\angle BQC$ do triângulo ΔBQC . Então $A\widehat{Q}P = Q\widehat{C}B + Q\widehat{B}C > Q\widehat{C}B$. Temos então: $A\widehat{P}B > A\widehat{Q}P > Q\widehat{C}B = A\widehat{C}B$.

Exercícios Propostos

- 1) Quais são os ângulos internos de um triângulo, sabendose que dois deles são congruentes e o terceiro tem medida igual ao dobro da medida de qualquer um dos outros dois?
- 2) Quantos triângulos existem com as medidas de seus ângulos internos em progressão aritmética? Quais os ângulos de um triângulo retângulo com medidas em progressão aritmética?
- 3) Prove, a partir do teorema 3.1, que duas retas distintas, perpendiculares a uma terceira, são paralelas.

3.4 Congruência de Triângulos

Das noções de congruência de segmentos e de ângulos podemos estabelecer uma definição para congruência de triângulos.

3.4.1 Definição de Congruência de Triângulos

Definição 3.4. Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus respectivos vértices, de modo que ângulos de vértices correspondentes sejam congruentes, e segmentos com extremidades correspondentes sejam congruentes.

Denotaremos a congruência de dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ por $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

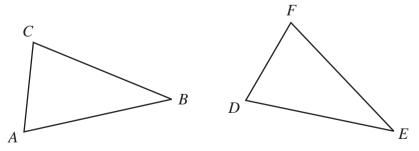


Figura 3.10 - $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Na figura anterior estabelecemos, por exemplo, a correspondência:

$$A \leftrightarrow D$$
$$B \leftrightarrow E$$
$$C \leftrightarrow F$$

Se $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$, e se AB = DE, BC = EF e AC = DF, então $\triangle ABC = \triangle DEF$ (e reciprocamente).

Observações:

- 1) A correspondência entre os vértices estabelece quais congruências entre ângulos e entre lados devem ser consideradas. Na notação, devemos escrever os vértices de cada triângulo na respectiva ordem de correspondência. Assim, escrever $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, significa que A corresponde a D, B a E e C a F.
- 2) A definição de congruência nos diz que, em cada triângulo, lados opostos a ângulos congruentes são congruentes, e ângulos opostos a lados congruentes são congruentes. Este é um método útil de enxergar, em uma figura, como se dão as congruências entre os elementos do triângulo.
- 3) Segue-se da definição, e do fato que a congruência de segmentos e de ângulos é uma relação de equivalência, que na congruência de triângulos também são válidas a reflexividade, a simetria e a transitividade.
- 4) Da definição, vemos que é preciso testar cinco congruências (bastam dois ângulos) para constatar a congruência de dois triângulos. Na verdade, isso não será necessário, como mostram os casos de congruência a seguir.

3.4.2 Casos de Congruência para Triângulos Quaisquer

Descreveremos os casos, ou critérios, de congruência como 1º caso etc. É impossível demonstrar todos eles. A rigor, um deles deve ser admitido como um axioma. É o que faremos com o 1º caso. Os outros serão decorrentes deste. Em seu *"Elementos"* Euclides demonstra todos eles, mas utiliza para o 1º caso um argumento de superposição (coincidência por superposição) que não é de todo rigoroso.

1º Caso (axioma) – Critério lado-ângulo-lado (LAL) de Congruência de Triângulos. Se dois triângulos tiverem dois lados respectivamente congruentes, formando ângulos congruentes, então eles são congruentes.

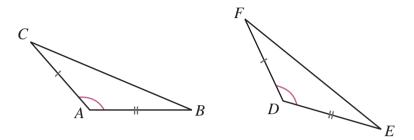


Figura 3.11 - AB = DE, $\widehat{A} = \widehat{D}$, $AC = DF \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Este critério nos diz que, se fixarmos um ângulo e sobre cada um dos lados marcarmos segmentos de medidas dadas, então o triângulo fica definido unicamente.

Note que um critério do tipo lado-lado-ângulo, ou seja, onde os ângulos congruentes não são formados pelos lados congruentes, pode não determinar um único triângulo, e, portanto, **não** é um critério de congruência. Veja a figura:

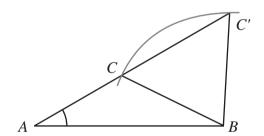


Figura 3.12 - $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ não são congruentes

2º Caso (teorema) – Critério Ângulo-Lado-Ângulo (ALA) de Congruência de Triângulos. Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes com lados comuns congruentes, então eles são congruentes.

Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $\widehat{A} = \widehat{D}$, AB = DE e $\widehat{B} = \widehat{E}$.

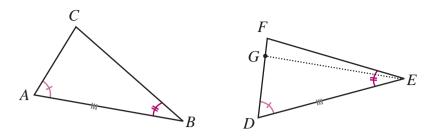


Figura 3.13 - Demonstração do caso ALA

Vamos provar que AC = DF e, então, pelo 1º caso de congruência, teremos $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. Suponha que $AC \neq DF$. Então, ou AC < DF, ou AC > DF. Considere o caso AC < DF (o outro caso é análogo). Seja G um ponto no segmento \overline{DF} tal que DG = AC. Então DG < DF. Considere agora os triângulos ΔABC e ΔDEG . Temos aí que AC = DG, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e AB = DE. Portanto, $\Delta ABC \equiv \Delta DEG$. Segue-se que $D\widehat{E}G = \widehat{B}$, mas isto não pode ocorrer pois $D\widehat{E}G < D\widehat{E}F = \widehat{E}$), já que G está entre D e F, e $D\widehat{E}F = \widehat{B}$ por hipótese. Logo, AC = DF, e o teorema fica provado.

Novamente, este critério nos diz que, dados um lado e os dois ângulos vizinhos a este lado em um triângulo, então este triângulo está unicamente determinado. Um critério do tipo ângulo-ângulo-lado, em que um dos ângulos é oposto ao lado dado, é equivalente ao critério (ALA), pois dados dois ângulos, o terceiro fica definido (a soma dos três ângulos é igual a 180°).

3º Caso (teorema) – Critério Lado-Lado (LLL) de Congruência de Triângulos. Se dois triângulos possuem os três lados respectivamente congruentes então eles são congruentes.

A demonstração desse caso será realizada quando tivermos provado um resultado fundamental sobre triângulos isósceles (veja exercício resolvido 1 da seção 3.5.1)

Observação: Note que os casos de congruência de triângulos envolvem sempre três elementos de cada triângulo. **Não** é caso de congruência de triângulos, além do já citado lado-lado-ângulo, o caso ângulo-ângulo-ângulo. Veja a figura a seguir:

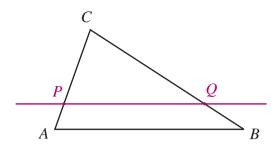


Figura 3.14 - $\triangle ABC$ não é congruente ao $\triangle PQC$

3.4.3 Casos de Congruência de Triângulos Retângulos

Dois triângulos retângulos são congruentes se, além dos ângulos retos, eles tiverem outros dois elementos congruentes que não sejam os outros dois ângulos. Vejamos:

i) Caso Cateto-Ângulo Agudo Adjacente

Neste caso caímos no 2º caso geral de congruência (ALA).

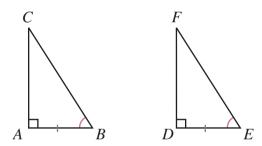


Figura 3.15 - $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{\circ}$, AB = DE e $\widehat{B} = \widehat{E}$

ii) Caso Cateto-Ângulo Agudo Oposto

Neste caso também caímos no 2º caso geral de congruência pois os três ângulos são congruentes.

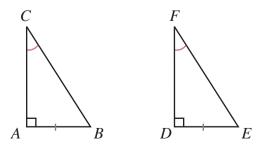


Figura 3.16 - $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{\circ}$, AB = DE e $\widehat{C} = \widehat{F}$

iii) Caso Hipotenusa-Ângulo Agudo

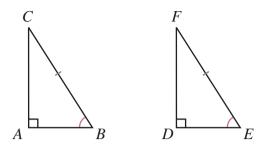


Figura 3.17 – $\widehat{A}=\widehat{D}=90^{\rm o}$, BC=EF e $\widehat{B}=\widehat{E}$

iv) Caso Cateto-Cateto

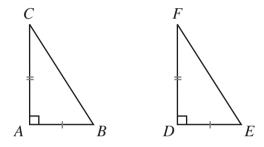


Figura 3.18 - $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{\circ}$, AB = DE e AC = DF

v) Caso Cateto-Hipotenusa

Esse caso não é tão simples e exigirá um resultado fundamental sobre triângulos isósceles para a sua demonstração (veja o exercício proposto 1 da seção 3.5.1).

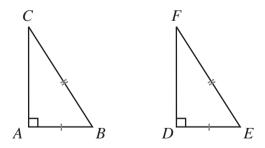


Figura 3.19 - $\widehat{A}=\widehat{D}=90^{\rm o}$, AB=DE e BC=EF

Exercícios Resolvidos

1) Provar que, por um ponto *P* fora de uma reta *r*, passa uma reta perpendicular à reta *r*.

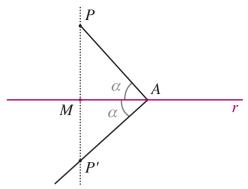


Figura 3.20 - $P\widehat{A}M = P'\widehat{A}M = \alpha$ e $AP' = AP \Rightarrow \overline{PP'} \perp r$

Resolução: Seja A um ponto qualquer de r. Se \overline{PA} for perpendicular a r, então não há nada mais a provar. Suponha que \overline{PA} não seja perpendicular a r. Seja α um dos ângulos que \overline{PA} faz com r. Com origem em A, e no semi-plano distinto do semi-plano de P em relação à reta r, trace uma semi-reta fazendo ângulo α com r (figura). Sobre esta semi-reta marque um ponto P' tal que AP' = AP.

O segmento $\overline{PP'}$ cruzará r em um ponto M (P e P' estão em lados opostos de r). Então $\Delta PAM \equiv \Delta P'AM$ pois: AP = AP', $P\widehat{A}M = P'\widehat{A}M = \alpha$ e \overline{AM} é comum aos dois triângulos (caso LAL). Segue-se que $P\widehat{M}A = P'\widehat{M}A$ ($\angle PMA$ é oposto a \overline{AP} e $\angle P'MA$ é oposto a $\overline{AP'}$). Mas $\angle P'MA$ é suplemento de $\angle PMA$. Segue-se $P\widehat{M}A + P'\widehat{M}A = 180^\circ$, ou seja, $P\widehat{M}A = P'\widehat{M}A = 90^\circ$. Logo, $\overline{PP'}$ é perpendicular a r.

2) Provar que a distância entre duas retas paralelas é constante, ou seja, se *r* e *s* são duas retas paralelas, e se *P* e *Q* são dois pontos quaisquer de *s*, então a distância de *P* a *r* é igual à distância de *Q* a *r*.

Resolução: Sejam M e N respectivamente os pés das perpendiculares por P e Q a r. Considere então os triângulos retângulos ΔMQP e ΔQMN (note que \overline{PM} e \overline{QN} são também perpendiculares à reta s – por quê?).

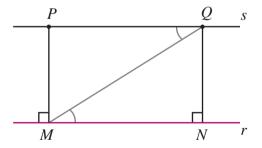


Figura 3.21 – A distância de s à r é constante

Como r é paralela a s temos que $M\widehat{Q}P = Q\widehat{M}N$, e como \overline{MQ} é hipotenusa comum a ambos os triângulos segue-se, do critério hipotenusa-ângulo agudo, que $\Delta MQP \equiv \Delta QMN$. Logo, PM = QN.

3) Na figura abaixo sabe-se que MD = MC, AM = BM e $\widehat{CMA} = \widehat{DMB}$. Prove que AD = BC.

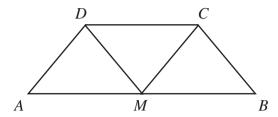


Figura 3.22 - MD = MC, AM = BM e $\widehat{CMA} = \widehat{DMB}$

Resolução: $\widehat{CMA} = \widehat{CMD} + \widehat{DMA}$ e $\widehat{DMB} = \widehat{CMD} + \widehat{CMB}$. Segue-se que $\widehat{DMA} = \widehat{CMB}$. Como $\widehat{MD} = \widehat{MC}$ e $\widehat{AM} = \widehat{BM}$ temos, pelo 1º caso de congruência (LAL), que $\widehat{\Delta DMA} = \widehat{\Delta CMB}$. Segue-se $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (\widehat{AD} é lado oposto a $\angle DMA$ e \widehat{BC} é lado oposto a $\angle CMB$).

Exercícios Propostos

- 1) Justifique os casos de congruência hipotenusa-ângulo agudo e cateto-cateto para triângulos retângulos.
- 2) Na figura a seguir os dois triângulos são congruentes (não se sabe, a priori, qual a correspondência entre os vértices) e os pontos A, B e D são colineares. Prove que os triângulos são retângulos e mostre que AD > BC.

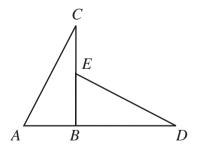


Figura 3.23 - Os dois triângulos são congruentes

Sugestão: $\angle DBE$ é externo em relação ao ângulo $\angle ABC$ do $\triangle ABC$.

3) Seja ΔABC um triângulo qualquer. Seja r uma paralela a \overline{AB} por C, e seja s uma paralela a \overline{AC} por B. Seja P o ponto de intersecção de r e s (por que r e s se interceptam?). Prove que $\Delta PCB \equiv \Delta ABC$.

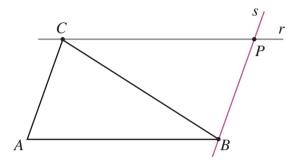


Figura 3.24 - $\triangle ABC \equiv \triangle PCB$

4) Provar que por um ponto *P* de uma reta *r* passa uma perpendicular a essa reta. Conclua que essa perpendicular é única.

Sugestão: Seja Q um ponto fora de r. Seja s a perpendicular a r passando por Q (problema resolvido (1) desta seção). Se s passa por P, então s é a perpendicular procurada. Se s não passa por P, considere a reta t paralela à reta s que passa por P.

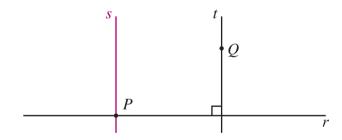


Figura 3.25 - $s \perp r$ e $t \parallel s$

Primeiros Problemas de Construção Geométrica (Resolvidos)

1) Transporte de um ângulo dado:

Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Transportar este ângulo para uma semi-reta $\overrightarrow{O'C}$:

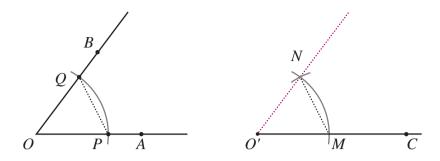


Figura 3.26 - Transporte de ângulo

Resolução: Com a ponta seca do compasso em O e abertura qualquer, trace um arco de circunferência que cruzará os lados de $\angle AOB$ em P e Q. Com a mesma abertura e com a ponta seca do compasso em O', trace um arco que cruzará $\overrightarrow{O'C}$ em M. Com a abertura do compasso igual a PQ (transporte de medida de segmento) e com a ponta seca em M, trace um arco que cruzará o arco anteriormente traçado em um ponto N. Então, $\Delta O'MN \equiv \Delta OPQ$ pois, OP = OQ = O'M = O'N e MN = PQ (caso LLL). Segue-se que $\angle MO'N \equiv \angle POB$ e como $\angle POB \equiv \angle AOB$, o ângulo foi transportado.

2) Por um ponto *P* fora de uma reta *r*, traçar uma paralela à reta *r*.

Análise do problema: Suponha *s* paralela a *r* por *P*.

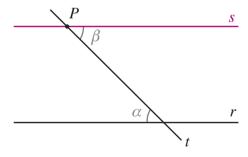


Figura 3.27 - Análise de Problema

Seja t uma transversal a r e s. Então $\alpha = \beta$. Sabemos transportar um ângulo e daí a:

Resolução: Por P trace uma reta t qualquer que cruza r em um ponto Q. Seja A um ponto qualquer de r, distinto de Q. Vamos

transportar o ângulo $\angle PQA$ para o semi-plano distinto do semi-plano de A em relação à reta t, sendo \overrightarrow{PQ} um dos lados desse ângulo.

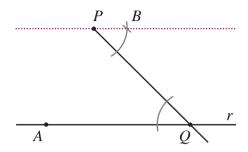


Figura 3.28 - Solução do Problema

Seja \overrightarrow{PB} o outro lado do ângulo transportado. Então \overrightarrow{PB} é paralela à reta r.

3) Traçar com régua e compasso a bissetriz de um ângulo dado.

Resolução: Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Com a ponta seca do compasso em O e abertura qualquer trace um arco de circunferência que cruzará \overrightarrow{OA} em M e \overrightarrow{OB} em N. Agora, com abertura do compasso igual a MN e com a ponta seca primeiro em M, e depois em N, obtenha um ponto P (a abertura pode ser qualquer, mas suficientemente grande para que os arcos se cruzem). Então P está na bissetriz de $\angle AOB$ e \overrightarrow{OP} é esta bissetriz.

Justificativa:

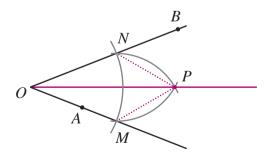


Figura 3.29 - ON = OM e PN = PM

Os triângulos ΔOPM e ΔOPN são congruentes, pois ON = OM , PN = PM e \overline{OP} é comum (caso LLL). Logo, $M \, \widehat{OP} = N \, \widehat{OP}$.

Problema Proposto

Encontrar com régua e compasso um ponto em um dos lados de um ângulo $\angle AOB$ cuja distância ao outro lado é um valor dado.

Sugestão: Utilize o exercício resolvido 2 desta seção.

3.5 Consequências dos Casos de Congruência de Triângulos

São inúmeras as conseqüências dos casos de congruência de triângulos. Veremos agora as mais importantes relacionadas diretamente com triângulos e, no próximo capítulo, teremos outras conseqüências sobre os quadriláteros.

3.5.1 O Triângulo Isósceles e os Ângulos da Base

Teorema 3.2. Um triângulo é isósceles se, e somente se, ele possui dois ângulos congruentes. Tais ângulos são opostos aos lados congruentes do triângulo.

Demonstração: Inicialmente, seja ΔABC um triângulo isósceles com AB = AC. Vamos provar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Considere o próprio triângulo ΔABC e a correspondência:

$$A \leftrightarrow A$$
$$B \leftrightarrow C$$
$$C \leftrightarrow B$$

Então, $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, pois AB = AC, $\angle A$ é comum e AC = AB (caso LAL). Segue-se que $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Considere agora um triângulo ΔABC tal que $\hat{B}=\hat{C}$. Vamos provar que AC=AB. Comparemos novamente o triângulo ΔABC com ele próprio através da mesma correspondência acima. Neste caso, teremos $\hat{B}=\hat{C}$, AB=BA e $\hat{C}=\hat{B}$ e, pelo 2º caso de congruência (ALA), temos que $\Delta ABC\equiv \Delta BAC$. Segue-se que AC=AB. Note que nas duas demonstrações acima os ângulos congruentes $\angle B$ e $\angle C$ são opostos aos lados congruentes \overline{AC} e \overline{AB} .

Uma consequência imediata deste resultado é a seguinte:

Corolário (do teorema 3.2). Um triângulo é eqüilátero se, e somente se, os seus três ângulos forem congruentes. Neste caso, cada ângulo do triângulo tem medida igual a 60°.

Demonstração: Um triângulo eqüilátero é, em particular, isósceles, qualquer que seja o lado considerado como base. Segue-se do teorema acima que os ângulos são congruentes dois a dois, ou seja, os três ângulos são congruentes. Como sua soma é igual a 180°, então cada um deles tem medida igual a 60°. A recíproca se segue também do teorema 3.2.

Outras consequências importantes são os casos de congruência que faltavam ser demonstrados e que serão vistos nos exercícios.

Exercícios Resolvidos

1) Provar o 3º caso de congruência para triângulos quaisquer (caso LLL).

Resolução: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que AB = DE, BC = EF e AC = DF. Trace, no semi-plano distinto ao semi-plano do ponto C, em relação à reta \overrightarrow{AB} , uma semi-reta \overrightarrow{AG} tal que $B\widehat{A}G = E\widehat{D}F$ e AG = DF (figura).

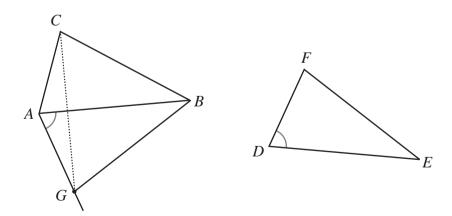


Figura 3.30 - $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$ e $\triangle ABG \equiv \triangle ABC$

Então pelo 1º caso de congruência (LAL), os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle DEF$ são congruentes. Segue-se que BG = EF. Considere ago-

ra o segmento \overline{CG} . Temos três casos: \overline{CG} intercepta a reta \overline{AB} em um ponto entre A e B; \overline{CG} intercepta a reta \overline{AB} em A (ou em B), e \overline{CG} intercepta \overline{AB} em um ponto que não pertence ao segmento \overline{AB} . Suponha o primeiro caso (os outros dois ficam para os exercícios):

Como AG = DF = AC então ΔAGC é isósceles. Logo, pelo teorema 3.2, $A\widehat{C}G = A\widehat{G}C$. Também, de BG = EF = BC, o triângulo ΔBGC é isósceles e $B\widehat{C}G = B\widehat{G}C$. Segue-se que:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACG} + \widehat{BCG} = \widehat{AGC} + \widehat{BGC} = \widehat{AGB}$$
.

Assim temos AC=AG, $A\widehat{C}B=A\widehat{G}B$ e BC=BG e, pelo 1º caso de congruência, $\Delta ABG\equiv \Delta ABC$. Segue-se, por transitividade, que $\Delta ABC\equiv \Delta DEF$.

2) Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles com AC = BC, e seja M o ponto médio de AB. Prove que $\triangle AMC \equiv \triangle BMC$.

Resolução:

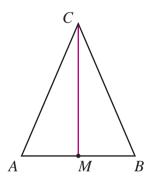


Figura 3.31 - AC = BC e AM = BM

Os dois triângulos são congruentes pelo 3° caso de congruência (LLL): AC = BC, AM = BM e \overline{CM} é comum.

Uma conseqüência deste exercício é que $\widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ e, portanto, \overrightarrow{CM} é bissetriz do ângulo $\angle C$ do triângulo. Além disso, $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$ e, como um é o suplemento do outro, tem-se que ambos são retos. Portanto, $\overline{CM} \perp \overline{AB}$.

3) Duplicar um segmento usando apenas o compasso.

Resolução: Dado um segmento AB, o que se quer encontrar é um ponto C, colinear com A e B, tal que AB = BC sem usar régua.

Seja então o segmento \overline{AB} . Determine, com a abertura do compasso igual a AB, os pontos P, Q e C, conforme figura.

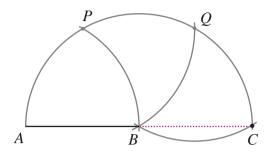


Figura 3.32 - A, B e C são colineares e AB = BC

Note que os triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BPQ$ e $\triangle BQC$ são eqüiláteros. Assim, $A\widehat{B}P=P\widehat{B}Q=Q\widehat{B}C=60^{\circ}$.

Segue-se que $\widehat{ABP} + \widehat{PBQ} + \widehat{QBC} = 180^{\circ}$ e, portanto, A, B e C são colineares. Além disso BC = BA.

Exercícios Propostos

1) Demonstre o caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos.

Sugestão: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ triângulos com $\widehat{A}=\widehat{D}=90^{\rm o}$, BC=EF e AC=DF. Se você provar a congruência dos outros catetos, ou seja, AB=DE, então você terá a congruência dos triângulos. Suponha que DE < AB e considere G um ponto em \overline{AB} tal que AG=DE.

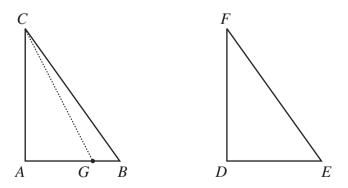


Figura 3.33 - $\triangle AGC \equiv \triangle DEF$ e então...?

- 2) Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles com AC = BC. Seja H um ponto em \overline{AB} tal que $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ (admita que tal ponto H está entre A e B). Prove que $\triangle ACH \equiv \triangle BCH$ e conclua que AH = BH e $A\widehat{C}H = B\widehat{C}H$.
- 3) Prove os casos que faltam na demonstração do 3º caso de congruência de triângulos (LLL).
- 4) Na figura a seguir, os ângulos $\angle BCE$ e $\angle CBD$ são congruentes. Mostre que AB = AC.

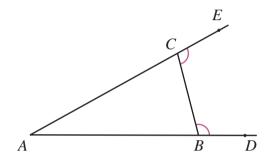


Figura 3.34 - $B\widehat{C}E = C\widehat{B}D$

3.5.2 Dois Lugares Geométricos: Bissetriz e Mediatriz

Um **lugar geométrico** no plano é um conjunto "maximal" do plano que satisfaz uma determinada propriedade geométrica, ou seja, é um conjunto de pontos do plano que satisfaz aquela propriedade geométrica de modo que qualquer outro ponto que não está nesse conjunto não satisfaz a propriedade.

Um primeiro exemplo de lugar geométrico no plano é a circunferência. Ela é o lugar geométrico dos pontos (no plano) que estão a uma distância dada de um ponto dado. Analisemos agora mais dois lugares geométricos que já foram definidos anteriormente.

Teorema 3.3. A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos no interior desse ângulo eqüidistantes de seus lados.

Demonstração: Seja $\angle AOB$ um ângulo e seja P um ponto qualquer de sua bissetriz. Queremos provar que a distância de P a \overrightarrow{OA} é igual à distância de P a \overrightarrow{OB} . Sejam M e N pontos em \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , respectivamente, tais que $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{OB}$.

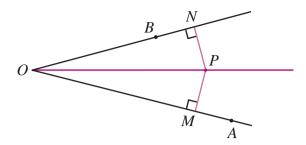


Figura 3.35 - \overrightarrow{OP} é bissetriz de $\angle AOB \Leftrightarrow PM = PN$

Então os triângulos $\triangle OPM$ e $\triangle OPN$ são triângulos retângulos com $P\widehat{MO} = P\widehat{NO} = 90^{\circ}$, $P\widehat{OM} = P\widehat{ON}$ (\overrightarrow{OP} é bissetriz) e com hipotenusa comum \overrightarrow{OP} . Segue-se, do critério de congruência hipotenusa-ângulo agudo para triângulos retângulos, que $\triangle OPM \equiv \triangle OPN$. Daí tem-se PM = PN.

Reciprocamente, suponha que P seja um ponto do plano, no interior do ângulo $\angle AOB$, eqüidistante dos lados desse ângulo. Vamos provar que P pertence à bissetriz de $\angle AOB$. Da mesma figura anterior temos agora que PM = PN e \overrightarrow{OP} hipotenusa comum. Pelo critério de congruência hipotenusa-cateto para triângulos retângulos, temos $\triangle OPM \equiv \triangle OPN$. Segue-se que $P\widehat{O}M = P\widehat{O}N$ e, portanto, \overrightarrow{OP} é bissetriz de $\angle AOB$.

Observação: O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes das **retas** que contêm os lados de um ângulo é a reta que contém a bissetriz do ângulo.

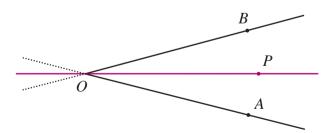


Figura 3.36 - \overrightarrow{OP} bissetriz de $\angle AOB$; a reta \overrightarrow{OP} é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB}

Note que, no teorema 3.3 acima, estamos provando que, se um ponto **não** pertence à bissetriz, então ele não é eqüidistante dos

lados do ângulo ou ele não está no interior do ângulo (esta afirmação é a **contra-positiva** da recíproca provada acima e ambas são equivalentes).

Teorema 3.4. A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos no plano que são eqüidistantes das extremidades desse segmento.

Demonstração: Seja AB um segmento e seja P um ponto qualquer de sua mediatriz. Seja M o ponto médio de \overline{AB} . Se P for o ponto M então PA = PB. Se P for distinto de M, então ΔAPM e ΔBPM são dois triângulos retângulos com $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^{\circ}$, tais que AM = BM e \overline{PM} é cateto comum.

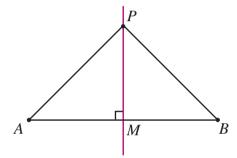


Figura 3.37 - P está na mediatriz de \overline{AB}

Pelo critério cateto-cateto (LAL) de congruência de triângulos retângulos tem-se que $\Delta AMP \equiv \Delta BMP$. Logo, PA = PB. Suponha agora que P seja um ponto qualquer do plano eqüidistante de A e de B. Vamos provar que P está na mediatriz de \overline{AB} (e, portanto, pela contra-positiva, se P não está na mediatriz de \overline{AB} , então P não é eqüidistante de A e de B).

Novamente, se P for M, então P está na mediatriz de AB . Se P for distinto de M, então considere os triângulos ΔAPM e ΔBPM (não sabemos ainda que $\overline{PM} \perp \overline{AB}$). Pelo 3° caso de congruência (LLL) tem-se que $\Delta APM \equiv \Delta BPM$. Segue-se que $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$ e, portanto, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$. Logo, P está na mediatriz de \overline{AB} .

Uma consequência imediata deste teorema é que a mediatriz de qualquer corda em uma circunferência passa pelo centro da circunferência. Recordemos que uma corda em uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência. Reciprocamente, a perpendicular a qualquer corda de uma circunferência passando pelo centro desta é a mediatriz da corda (por quê?).

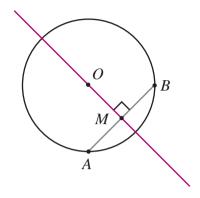


Figura 3.38 - AM = BM implica em $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

Exercícios Resolvidos

1) Traçar com régua e compasso a mediatriz de um segmento. **Resolução:** Seja \overline{AB} um segmento dado. Com a abertura do com-

a $\frac{AB}{2}$), e com a ponta seca em A e depois em B, trace duas cir-

passo igual a AB (na verdade, qualquer abertura maior ou igual

cunferências. Estas circunferências se cruzam em dois pontos P e Q (veja mais adiante a discussão sobre posição relativa de duas circunferências), eqüidistantes de A e de B. Logo, a reta \overrightarrow{PQ} é a mediatriz de \overline{AB} .

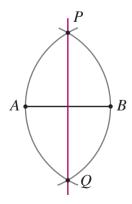


Figura 3.39 – \overrightarrow{PQ} é mediatriz de \overline{AB}

2) Por um ponto *P* de uma reta *r*, traçar a perpendicular a esta reta (com régua e compasso).

Resolução: Basta colocar a ponta seca do compasso em P e, com uma abertura qualquer, traçar uma circunferência que cruzará r em A e B. Depois, é só achar a mediatriz de \overline{AB} , como no exercício 1 acima.

3) Provar que as mediatrizes dos três lados de um triângulo ΔABC qualquer se interceptam em um único ponto.

Resolução: Considere as mediatrizes dos lados \overline{AB} e \overline{BC} . Seja O o ponto de intersecção destas duas mediatrizes (as duas mediatrizes necessariamente se interceptam pois, caso contrário, \overline{AB} e \overline{BC} estariam na mesma reta, o que não pode ocorrer). Vamos provar que O está na mediatriz de \overline{AC} . Observe a figura a seguir:

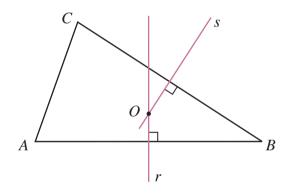


Figura 3.40 - r mediatriz de \overline{AB} e s mediatriz de \overline{BC}

Pela propriedade da mediatriz temos que OA = OB, pois r é mediatriz de \overline{AB} , e que OB = OC, pois s é mediatriz de \overline{BC} . Seguese que OA = OC e, portanto, O deve estar na mediatriz de \overline{AC} .

4) Provar que o lugar geométrico dos pontos no interior de um ângulo ∠AOB, tais que a soma de suas distâncias aos lados do ângulo seja uma constante k, é o segmento de reta com extremidades nos lados do ângulo e cujas distâncias a cada lado é k.

Resolução: Sejam P e Q respectivamente pontos sobre os lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} do ângulo $\angle AOB$ tais que as distâncias de P a \overrightarrow{OB} e

de Q a \overrightarrow{OA} sejam iguais a k (veja problema de construção geométrica proposto na seção 3.4).

Sejam M e N os pés das perpendiculares por P e Q respectivamente aos lados \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OA} . Então, $\Delta PMQ \equiv \Delta QNP$, pois PM = QN = k e \overrightarrow{PQ} é hipotenusa comum (critério hipotenusa-cateto). Segue-se que $\widehat{OPQ} = \widehat{OQP}$.

Seja agora \overrightarrow{PC} paralela ao lado \overrightarrow{OB} . Então, a distância de \overrightarrow{PC} a \overrightarrow{OB} é constante e igual a PM=k (veja exercício resolvido 2, da seção 3.4.3). Além disso, $\widehat{QPC}=\widehat{OQP}=\widehat{OPQ}$. Então, \overrightarrow{PQ} é bissetriz de $\angle OPC$.

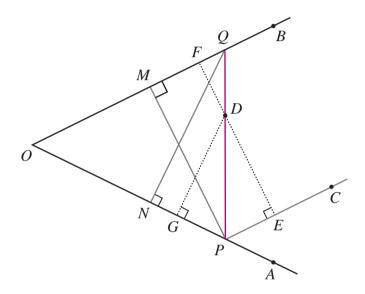


Figura 3.41 - \overline{PQ} é um lugar geométrico

Seja agora D um ponto qualquer de \overline{PQ} , distinto de P e de Q, e seja \overline{FE} a perpendicular a \overline{OB} e \overline{PC} passando por D (F em \overline{OB} e E em \overline{PC}). Seja $\overline{DG} \perp \overline{OA}$ com G em \overline{OA} (figura). Então, EF = PM = k. Mas EF = DF + DE e, como DE = DG, temos que k = EF = DF + DG.

Reciprocamente, pode-se provar que, se D é um ponto no interior do ângulo $\angle AOB$ tal que a soma de suas distâncias aos lados deste ângulo é igual a k, então D está no segmento \overline{PQ} como acima (exercício).

5) Construir com régua e compasso um triângulo $\triangle ABC$, sendo dados o lado \overline{AB} , o ângulo $\angle A$ e a soma dos outros dois lados.

Resolução: Análise do problema, supondo-o resolvido:

Seja D o ponto de \overline{AC} tal que CD = CB com C entre $A \in D$. Então AD = AC + CD = AC + CB $\stackrel{.}{e}$ a soma dada dos lados \overline{AC} e \overline{BC} . Mas C está na mediatriz de \overline{BD} (Teorema 3.4).

Basta então construir o ângulo $\angle A$, com lado \overrightarrow{AB} e marcar no outro lado deste ângulo o ponto D tal que AD seja a soma dada. Depois é só achar a mediatriz de \overrightarrow{BD} (exercício resolvido 1 desta seção). Tal mediatriz interceptará o lado \overrightarrow{AD} no ponto C e o triângulo ΔABC está construído.

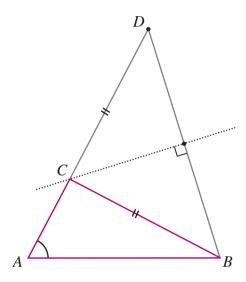


Figura 3.42 - AB, $\angle A$ e AC + BC dados: C está na mediatriz de \overline{BD}

Exercícios Propostos

- Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas paralelas?
- 2) Provar que as bissetrizes dos três ângulos de um triângulo ΔABC qualquer se interceptam em um único ponto.
 - **Sugestão:** Considere as bissetrizes de $\angle A$ e $\angle B$. Tais bissetrizes se interceptam em um ponto I (por que elas se interceptam?). Mostre então que I é equidistante de \overline{AC} e de \overline{BC} .
- 3) Por um ponto *P* fora de uma reta *r*, traçar a perpendicular a esta reta (com régua e compasso).

Sugestão: Com a ponta seca do compasso em P e abertura qualquer, suficiente para cruzar r, trace uma circunferência. Sejam A e B os pontos de intersecção desta circunferência com r. Então, P está na mediatriz de \overline{AB} (por que?). Trace esta mediatriz.

4) Explique porque, no exercício resolvido 4 acima, nenhum outro ponto fora do segmento \overline{PQ} satisfaz a propriedade citada.

3.5.3 Segmento Unindo os Pontos Médios de Dois Lados de um Triângulo

Destacamos aqui uma proposição de grande importância para se obter vários outros resultados, e que pode ser demonstrada desde já (embora seja uma conseqüência trivial do estudo de semelhança de triângulos).

Teorema 3.5 (Teorema da base média de triângulos). O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem medida igual à metade da medida daquele lado. Reciprocamente, se pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo traçarmos uma paralela a outro lado, então essa paralela cruzará o terceiro lado em seu ponto médio.

Demonstração: Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Sejam M e N os pontos médios dos lados \overline{AC} e \overline{BC} respectivamente. Seja r uma reta paralela ao lado \overline{AC} por B que cruza o prolongamento de \overline{MN} em D. Veja a figura:

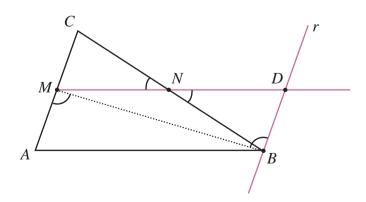


Figura 3.43 - $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \in MN = \frac{AB}{2}$

Então $\Delta MNC \equiv \Delta DNB$, pois CN = BN, $C\widehat{N}M = B\widehat{N}D$ (opostos pelo vértice) e $M\widehat{C}N = D\widehat{B}N$ (alternos internos) (caso ALA). Segue-se que BD = CM = AM, DN = MN e $B\widehat{D}N = C\widehat{M}N$.

Considere agora os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle DMB$. De AM=BD, $A\widehat{M}B=D\widehat{B}M$ (alternos internos) e \overline{BM} comum temos, pelo 1º caso de congruência (LAL), que $\triangle ABM=\triangle DMB$. Segue-se que $M\widehat{A}B=B\widehat{D}N=C\widehat{M}N$ e, portanto, $\overline{M}D$, ou $\overline{M}N$, é paralela a \overline{AB} ($\angle MAB$ e $\angle CMN$ correspondentes congruentes). Além disso, MD=AB, mas, como DN=MN, temos MD=2MN, ou $MN=\frac{AB}{2}$.

Suponha agora M ponto médio de \overline{AC} e \overline{MD} (com D na reta r, paralela a \overline{AC} por B) paralela a \overline{AB} , cruzando \overline{BC} em N, como na figura (agora não sabemos ainda que N é ponto médio de \overline{BC}). Então, $\Delta ABM \equiv \Delta DMB$, pois $\widehat{AMB} = \widehat{DBM}$ (alternos internos), \overline{BM} é comum e $\widehat{ABM} = \widehat{DMB}$ (alternos internos) (caso ALA). Segue-se que BD = AM = CM e $\widehat{BDN} = \widehat{MAB} = \widehat{CMN}$. Então, pelo 2° caso de congruência (ALA), temos $\Delta MNC \equiv \Delta DNB$ (pois $\widehat{MCN} = \widehat{DBN}$). Segue-se $\widehat{CN} = BN$ e, portanto, \widehat{N} é ponto médio de \overline{BC} .

Este teorema tem uma importante consequência.

Corolário (do teorema 3.5). Em um triângulo retângulo, o ponto médio da hipotenusa equidista dos três vértices do triângulo. Reciprocamente, se em um triângulo existir um lado cujo ponto médio equidista dos três vértices, então esse triângulo é retângulo e o ângulo reto é oposto àquele lado.

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo retângulo com $\widehat{C}=90^\circ$, e seja \overline{M} o ponto médio da hipotenusa \overline{AB} . Seja \overline{MD} paralela ao lado \overline{AC} , com D em \overline{BC} . Então \overline{MD} é perpendicular a \overline{BC} . Pelo teorema 3.5, D é ponto médio de \overline{BC} .

Então de BD=CD e \overline{MD} comum segue-se, pelo caso cateto-cate-to de congruência de triângulos retângulos, que $\Delta BDM \equiv \Delta CDM$. Logo, CM=BM=AM. Seja agora ΔABC um triângulo tal que o ponto M, médio de \overline{AB} , satisfaz CM=BM=AM.

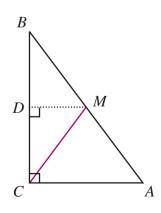


Figura 3.44 - $\widehat{C} = 90^{\circ}$ implica em CM = AM = BM

Então, como ΔMAC é isósceles com AM=CM, temos que $M\,\widehat{A}C=M\,\widehat{C}A$, e como ΔMBC é isósceles com BM=CM, temos $M\,\widehat{B}C=M\,\widehat{C}B$.

Mas $M \, \widehat{A}C + M \, \widehat{B}C + A \, \widehat{C}B = 180^\circ$ e, como $A \, \widehat{C}B = M \, \widehat{C}A + M \, \widehat{C}B$, temos $2M \, \widehat{C}A + 2M \, \widehat{C}B = 180^\circ$, ou $A \, \widehat{C}B = M \, \widehat{C}A + M \, \widehat{C}B = 90^\circ$.

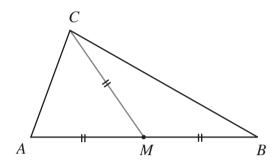


Figura 3.45 - CM = AM = BM implica em $\hat{C} = 90^{\circ}$

Este resultado nos diz que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é o centro de uma circunferência que passa pelos três vértices do triângulo, e que a hipotenusa é o diâmetro desta circunferência. Além disso, qualquer ponto do plano que não esteja nesta circunferência faz com as extremidades daquela hipotenusa um ângulo distinto de 90°. Assim:

Dado um segmento \overline{AB} , o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\widehat{APB} = 90^\circ$ é uma circunferência de centro no ponto médio de \overline{AB} e raio igual a $\frac{AB}{2}$.

Exercício Resolvido

Construir com régua e compasso um triângulo retângulo, sendo dados a hipotenusa e um ângulo agudo.

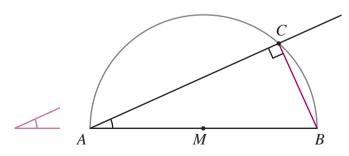


Figura 3.46 - Construção do $\Delta\!ABC$, $\widehat{C}=90^\circ$

Resolução: Trace a circunferência de centro no ponto médio da hipotenusa, passando por suas extremidades e transporte o ângulo para uma das extremidades. O ponto de cruzamento do lado do ângulo com a circunferência fornecerá o vértice do ângulo reto.

Exercício Proposto

Construir com régua e compasso um triângulo retângulo, sendo dados a hipotenusa e um cateto.

3.5.4 Linhas Notáveis e Pontos Notáveis de um Triângulo

Uma **ceviana** de um triângulo é qualquer segmento com uma extremidade em um vértice e a outra na reta que contém o lado oposto àquele vértice. As principais cevianas de um triângulo são:

Definição 3.5. As **alturas** de um triângulo são cevianas perpendiculares a cada lado do triângulo. As **medianas** são as cevianas que têm como uma das extremidades os pontos médios de cada lado do triângulo. As **bissetrizes** são as cevianas contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

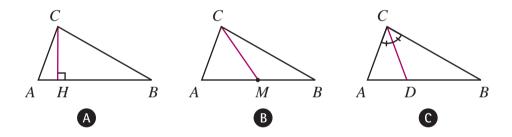


Figura 3.47 - (A) \overline{CH} - altura; (B) \overline{CM} - mediana, (C) \overline{CD} - bissetriz

Faremos referência a estes segmentos, citando o lado, o vértice ou o ângulo do triângulo. Por exemplo, na figura, \overline{CH} é a altura relativa ao lado \overline{AB} (a), \overline{CM} é a mediana relativa ao lado \overline{AB} (b) e \overline{CD} é a bissetriz do ângulo $\angle C$ (c).

São notáveis ainda as **mediatrizes** dos lados e as bissetrizes dos ângulos externos (**bissetrizes externas**). Essas cevianas (e as mediatrizes) proporcionam um resultado surpreendente que enunciamos no parágrafo seguinte.

As três mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam em um mesmo ponto, chamado **circuncentro** do triângulo. As três bissetrizes se interceptam em um mesmo ponto, chamado **incen-** **tro** do triângulo. As três alturas se interceptam em um mesmo ponto, chamado **ortocentro** do triângulo. As três medianas se interceptam em um mesmo ponto, chamado **baricentro** do triângulo. Esses pontos são chamados **centros notáveis** do triângulo.

Já vimos, em exercícios na seção 3.5.2, que as mediatrizes e as bissetrizes se interceptam cada qual em um mesmo ponto. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo. Esta circunferência é única devido ao fato de que as mediatrizes são lugares geométricos. Dizemos também que o triângulo está inscrito naquela circunferência. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, que é tangente aos lados do triângulo (ver tangência na penúltima seção deste capítulo). Esta circunferência também é única. Dizemos da, mesma forma, que o triângulo é circunscrito àquela circunferência.

Vamos verificar agora a intersecção das três alturas. Seja ΔABC um triângulo qualquer. Por cada um dos vértices deste triângulo traça-se a paralela ao lado oposto, obtendo-se um triângulo ΔMNP (figura). Note, então, que, pelo 2º caso de congruência, $\Delta ABC \equiv \Delta MCB \equiv \Delta CNA \equiv \Delta BAP$ (verifique). Segue-se, então, que AB = MC = NC, BC = NA = PA e AC = PB = MB.

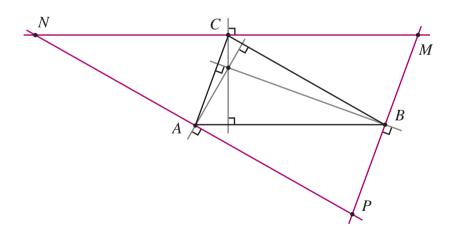


Figura 3.48 - O ortocentro de um triângulo $\triangle ABC$

Mas, então, C é ponto médio de \overline{MN} , A é ponto médio de \overline{NP} e B é ponto médio de \overline{PM} . Além disso, as retas que contêm as alturas do triângulo ΔABC são perpendiculares aos lados \overline{MN} ,

 \overline{NP} e \overline{PM} , respectivamente em C, A e B. Portanto estas retas são as mediatrizes do ΔMNP e se interceptam em um mesmo ponto. Assim, o ortocentro do triângulo ΔABC é o circuncentro do triângulo ΔMNP .

Para verificarmos a intersecção das medianas, vamos usar o teorema 3.5 da seção anterior. Veremos que o baricentro divide as medianas em uma determinada razão.

Seja então $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e sejam \overline{AM} e \overline{BN} as medianas relativas aos lados \overline{BC} e \overline{AC} respectivamente. Seja J o ponto de intersecção destas medianas. Vamos provar que a mediana relativa ao lado \overline{AB} passa por J.

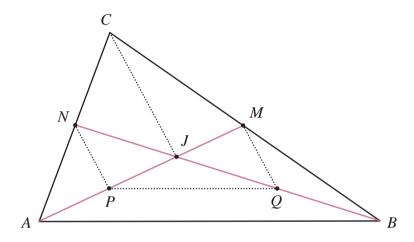


Figura 3.49 - O baricentro de um triângulo ΔABC

Seja P o ponto médio de \overline{AJ} e seja Q o ponto médio de \overline{BJ} . Como N é ponto médio de \overline{AC} , temos que, no triângulo ΔACJ , \overline{NP} paralelo a \overline{CJ} e $NP = \frac{CJ}{2}$ (Teorema 3.5). Da mesma forma, no triângulo ΔBCJ , M é ponto médio de \overline{BC} e, portanto, \overline{MQ} é paralelo a \overline{CJ} e $MQ = \frac{CJ}{2}$. Segue-se que \overline{NP} e \overline{MQ} são paralelos e NP = MQ. Resulta daí que $N\widehat{PJ} = Q\widehat{MJ}$ (alternos internos), $P\widehat{NJ} = M\widehat{QJ}$ (alternos internos) e, juntamente com NP = MQ, temos que $\Delta NPJ \equiv \Delta QMJ$ (caso ALA). Segue-se $JM = PJ = AP = \frac{AM}{3}$ e $JN = QJ = BQ = \frac{BN}{3}$. Portanto, o ponto J divide cada uma das duas medianas na razão 2:1 (do vértice para o ponto médio). Esta propriedade será mantida

se considerarmos as medianas \overline{AM} e a mediana relativa ao lado \overline{AB} . Portanto, esta última mediana deve passar também por J.

O baricentro é o **centróide** do triângulo, ou centro de massa da figura com densidade (de área) constante. Daí seu nome.

Observe que o triângulo ΔMQP contém as três medidas das medianas do ΔABC : MP é igual a $\frac{2}{3}$ da mediana relativa ao lado \overline{BC} , MQ é igual a $\frac{1}{3}$ da mediana relativa ao lado \overline{AB} , e QJ é igual a $\frac{1}{3}$ da mediana relativa ao lado \overline{AC} (observe ainda que \overline{QJ} é mediana relativa ao lado \overline{MP} do ΔMQP). Temos ainda que $PQ = \frac{AB}{2}$. Assim, dadas as medidas das três medianas, podemos construir o triângulo ΔMQP e daí obter o triângulo ΔABC (exercício).

O incentro e o baricentro são pontos interiores ao triângulo. O circuncentro pode não estar no interior do triângulo. Por exemplo, no triângulo retângulo, ele é o ponto médio da hipotenusa (seção 3.5.3). Nos triângulos obtusângulos, o circuncentro é ponto exterior ao triângulo. O ortocentro pode estar em um vértice (triângulo retângulo), no interior ou no exterior, neste último caso para triângulos obtusângulos.

Exercícios Resolvidos

1) Provar que, em um triângulo isósceles, a altura, a mediana e a bissetriz relativas à base coincidem. Neste caso, estas cevianas estão contidas na mediatriz da base do triângulo.

Resolução: Já vimos, no exercício resolvido 2, da seção 3.5.1, que a mediana é altura e bissetriz. E isto já prova a proposição, pois só há uma perpendicular à base pelo vértice oposto, e só há uma bissetriz.

Observação: vale a seguinte recíproca do exercício 1:

"Se, em um triângulo, uma altura relativa a um lado coincide com a mediana relativa a este lado, então o triângulo é isósceles. Idem se a altura coincide com a bissetriz. Idem se a mediana coincidir com a bissetriz".

Estes são critérios bastante úteis de caracterização de um triângulo isósceles. O último caso é o menos óbvio. Vamos demonstrá-lo:

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo e seja M o ponto médio de \overline{AB} . Suponha que a mediana \overline{CM} relativa ao lado \overline{AB} coincida com a bissetriz do ângulo $\angle C$. Então, por hipótese, temos AM = BM e $A\widehat{C}M = B\widehat{C}M$. Sejam então \overline{MP} e \overline{MQ} perpendiculares aos lados \overline{AC} e \overline{BC} respectivamente, com P e Q nesses lados.

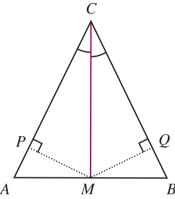


Figura 3.50 - AM = BM e $\widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ implica em $\triangle ABC$ isósceles

Então, $\Delta CMP \equiv \Delta CMQ$, pois \overline{CM} é hipotenusa comum e $P\widehat{C}M = Q\widehat{C}M$ (caso hipotenusa-ângulo agudo). Segue-se que MP = MQ. Mas então $\Delta AMP \equiv \Delta BMQ$, pois AM = BM (caso hipotenusa-cateto). Concluímos que $\widehat{A} = \widehat{B}$ e, pelo teorema 3.2 da seção 3.5.1, o triângulo ΔABC é isósceles.

2) Provar que, em um triângulo isósceles, a soma das distâncias de qualquer ponto da base às laterais é constante e igual às alturas relativas às laterais.

Resolução: Ver o exercício resolvido 4, da seção 3.5.2.

3) (**Teorema de Viviani**): Provar que a soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo eqüilátero aos três lados é constante e igual às alturas do triângulo.

Resolução: Veja a figura 3.51.

Do exercício 2 temos que PF+PE=CN (por quê?) e, como PD=NM , então PF+PE+PD=CN+NM=CM .

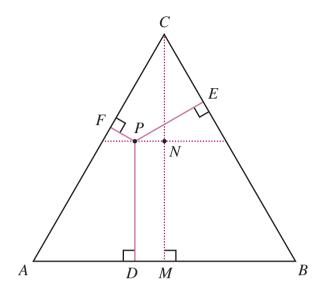


Figura 3.51 - Teorema de Viviani

Exercícios Propostos

1) Construa com régua e compasso um triângulo, sendo dados os comprimentos de suas três medianas.

Sugestão: construa o triângulo ΔPQM da figura 3.49. Note que PM é igual a $\frac{2}{3}$ da mediana que parte do vértice A, JQ é igual a $\frac{1}{3}$ da mediana que sai do vértice B, e MQ é igual a $\frac{1}{3}$ da terceira mediana.

- 2) Prove que, em um triângulo equilátero, os quatro centros notáveis coincidem. Prove também que as alturas, medianas e bissetrizes são congruentes nesse triângulo.
- 3) Prove que, se **dois** quaisquer dos centros notáveis de um triângulo coincidem, então o triângulo é eqüilátero.
- 4) Prove que um triângulo isósceles possui duas alturas de mesma medida, duas medianas de mesma medida e duas bissetrizes de mesma medida (as cevianas congruentes são aquelas relativas aos lados congruentes do triângulo).

3.5.5 Relação Entre lados e Ângulos Opostos de um Triângulo

Existe uma relação de comparação entre lados e ângulos respectivamente opostos de um triângulo que será estabelecida quantitativamente na disciplina Geometria II (Lei dos Senos). Por agora podemos obter o seguinte resultado:

Teorema 3.6. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos não têm a mesma medida e o maior ângulo é oposto ao maior lado. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados a eles opostos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Demonstração: Já provamos que um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos opostos aos lados congruentes forem congruentes. Portanto, em um triângulo, dois lados têm medidas distintas se, e somente se, os respectivos ângulos opostos tiverem medidas distintas.

Suponha agora que, em um triângulo ΔABC , AC < BC. Vamos provar que $\widehat{B} < \widehat{A}$. Seja então D um ponto no lado \overline{AC} tal que CD = AC.

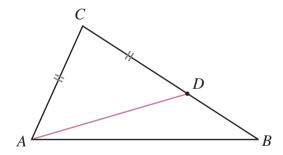


Figura 3.52 - AC < BC implica em $\widehat{B} < \widehat{A}$

Então $C\widehat{A}D < C\widehat{A}B \, (= \widehat{A})$. Mas ΔCAD é isósceles. Portanto temos que $C\widehat{D}A = C\widehat{A}D$. Como o ângulo $\angle CDA$ é externo, em relação ao ângulo interno $\angle ADB$ do ΔADB , temos que $C\widehat{D}A > A\widehat{B}D \, (= \widehat{B})$. Resulta então que $\widehat{A} > C\widehat{A}D = C\widehat{D}A > \widehat{B}$.

Suponha agora que, no $\triangle ABC$, $\widehat{B} < \widehat{A}$. Vamos provar que AC < BC. Há três possibilidades: AC = BC, AC > BC e AC < BC. Se

AC = BC, teríamos $\widehat{B} = \widehat{A}$, o que não ocorre por hipótese. Se AC > BC então, pela primeira parte desta demonstração, teríamos $\widehat{B} > \widehat{A}$, o que novamente contraria a hipótese. Logo AC < BC.

Um resultado imediato deste teorema é:

Corolário (do teorema 3.6). Em um triângulo retângulo qualquer cateto tem comprimento menor do que o comprimento da hipotenusa.

Segue-se daí que, dados uma reta r e um ponto P fora de r, o segmento \overline{PQ} , com Q variando em r, de menor comprimento é aquele em que \overline{PQ} é perpendicular a r. Tal medida é chamada de **Distância de um Ponto a uma Reta**.

3.5.6 A Desigualdade Triangular

O teorema 3.6 permite demonstrar uma das mais importantes desigualdades da matemática.

Teorema 3.7 (Desigualdade Triangular em Triângulos). Em todo triângulo a medida de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Demonstração: Seja um triângulo $\triangle ABC$. Veremos que AC < AB + BC (as outras desigualdades se provam de forma análoga). Seja um ponto D na semi-reta \overrightarrow{AB} tal que B está entre A e D e BD = BC.

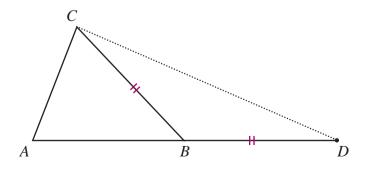


Figura 3.53 - AC < AB + BC

Então o triângulo ΔBCD é isósceles com $B\widehat{D}C = B\widehat{C}D$. Mas $B\widehat{C}D < A\widehat{C}D$ e, portanto $B\widehat{D}C < A\widehat{C}D$. Assim, no triângulo ΔADC tem-se, pelo teorema 3.6, que AD > AC. Mas AD = AB + BD = AB + BC. Daí tem-se AC < AB + BC.

Uma consequência imediata deste teorema é:

Corolário 1 (do teorema 3.7). Em todo triângulo a medida de qualquer lado é maior do que o valor absoluto da diferença das medidas dos outros dois lados.

Demonstração: Seja um triângulo ΔABC . Do teorema 3.7 temos que:

- i) AC < AB + BC.
- ii) AB < AC + BC e
- iii) BC < AB + AC.

De (i) e (ii) obtemos: BC > AC - AB e BC > AB - AC. Logo, BC > |AC - AB|. As outras designaldades se provam analogamente.

Teorema 3.8 (**Desigualdade Triangular no Plano**). Dados três pontos A, B e C (não necessariamente distintos), a medida de qualquer um dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} ou \overline{BC} é menor ou igual à soma dos outros dois. A igualdade ocorre somente se os pontos forem colineares.

Demonstração: Parte da demonstração deste teorema é a demonstração do teorema 3.7 e, se os pontos forem colineares, basta analisar caso a caso. Note que, neste caso, apenas uma igualdade pode ocorrer. Por exemplo, AB = AC + BC se, e somente se, C estiver entre A e B. Se houver coincidência de pontos, por exemplo, se A e B forem um só ponto, então AB = 0.

Observação: Este teorema nos diz que, se três pontos distintos *A*, *B* e *C* são tais que os segmentos por eles formados satisfazem as

três desigualdades **estritas**, então estes três pontos formam um triângulo ΔABC . Na verdade, basta verificar apenas duas desigualdades em relação a qualquer um dos segmentos. Por exemplo, basta verificar que |AC-BC| < AB < AC+BC para garantir que os três pontos A, B e C formam um triângulo (por quê?).

Outra consequência do teorema 3.7 é:

Corolário 2 (do teorema 3.7). Se dois triângulos possuem dois lados respectivamente congruentes formando ângulos distintos, então os terceiros lados são distintos e o menor deles é oposto ao menor dos dois ângulos.

Demonstração: Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AB'C$ com \overline{AC} comum, BC = B'C e $\widehat{ACB} > \widehat{ACB}'$ (figura). Vamos provar que AB' < AB.

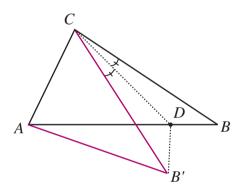


Figura 3.54 - AB' < AB

Seja \overrightarrow{CD} , com D sobre \overline{AB} , a bissetriz do ângulo $\angle BCB'$. Então $\Delta CDB \equiv \Delta CDB'$, pois BC = B'C, $B\widehat{C}D = B'\widehat{C}D$ e \overline{CD} é comum (caso LAL). Logo, DB' = DB. Agora, no $\Delta ADB'$, temos AB' < AD + DB' = AD + DB = AB (pela desigualdade triangular).

Exercícios Resolvidos

1) **Um Problema de Minimização: O Problema de Heron** – Dados dois pontos *A* e *B*, em um mesmo lado de uma reta *r*, achar o ponto *P* de *r* tal que *AP* + *BP* seja mínima (entre todas as possíveis somas com *P* variando em *r*).

Resolução: Este problema é um problema de construção com régua e compasso. A posição relativa do ponto P na reta r pode ser calculada em função das posições relativas de A e B, mas para isto será necessário usar semelhança de triângulos. Sejam então uma reta r e dois pontos A e B e dados como na figura.

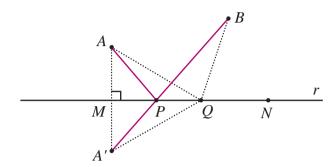


Figura 3.55 - Problema de Heron

Seja $\overline{AA'}$ perpendicular a r cujo ponto médio M está em r (dizemos que A' é o simétrico de A em relação à reta r). Note que r é a mediatriz de $\overline{AA'}$. O segmento $\overline{A'B}$ cruza a reta r. Afirmamos que o ponto de interseção P é o ponto procurado.

Justificativa: AP = A'P. Mas A'B = A'P + BP = AP + BP. Seja Q um outro ponto qualquer de r. Então AQ = A'Q. Mas, no triângulo $\Delta A'BQ$, temos A'B < A'Q + BQ = AQ + BQ. Como A'B = AP + BP, temos que AP + BP < AQ + BQ. Logo, a soma é mínima em P.

Observação: Da solução concluímos ainda que $\widehat{APM} = \widehat{BPN}$ (figura acima), pois $\widehat{BPN} = A'\widehat{PM}$ (opostos ao vértice) e $A'\widehat{PM} = \widehat{APM}$ (pois $\Delta PAA'$ é isósceles e $\overline{PM} \perp \overline{AA'}$). Este problema é conhecido em ótica como o problema da reflexão de um raio de luz, e o que se conclui é que o ângulo de incidência ($\angle APM$) é "igual" ao ângulo de reflexão ($\angle BPN$), imaginando-se um raio de luz indo de A para B e refletindo em r. Isto ocorre segundo um princípio de minimização na natureza que diz que a luz vai de um ponto a outro no menor tempo possível. Uma variação interessante do problema de Heron está enunciada no problema seguinte.

2) Dentre todos os triângulos com um lado dado e com altura relativa a esse lado dada, encontre aquele que tem o menor perímetro.

Resolução: Seja AB o lado dado. Seja r a reta que está a uma distância igual à altura dada da reta que contém \overline{AB} . A solução é a mesma do problema 1.

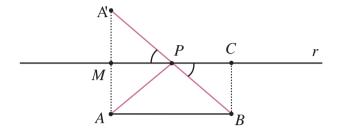


Figura 3.56 - 0 ΔABP tem perímetro mínimo

Só que agora $\triangle APM \equiv \triangle A'PM \equiv \triangle BPC$ (por quê?), onde C é o pé da perpendicular a r por B. Então AP = BP, e o triângulo de perímetro mínimo é o triângulo isósceles (note que basta minimizar AP + BP pois AB é fixo).

3) Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja P um ponto no interior deste triângulo. Prove que AP + BP < AC + BC.

Resolução:

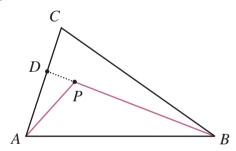


Figura 3.57 - AP + BP < AC + BC

Da figura, no $\triangle APD$: AP < AD + PD.

Assim, AP + BP < AD + PD + BP = AD + BD.

Agora, no $\triangle BCD$: BD < DC + BC.

Assim, AP + BP < AD + BD < AD + DC + BC = AC + BC.

Exercícios Propostos

1) Prove o problema "dual" do exercício 2 resolvido acima: dentre todos os triângulos com um lado dado e com o pe-

rímetro dado, aquele que possui a **maior** altura relativa ao lado dado é o triângulo isósceles.

Sugestão: Raciocine da seguinte forma: se fixarmos o lado AB e a altura através da reta r (figura 3.56), então qualquer ponto no semi-plano oposto ao dos pontos A e B, em relação à reta r, ou qualquer ponto de r distinto de P, forma com A e B um triângulo de **perímetro maior** do que o perímetro do triângulo isósceles ΔPAB (por quê?). Conclua.

2) Construir com régua e compasso o caminho mínimo para se ir de um ponto P até um ponto Q, ambos no interior de um ângulo $\angle AOB$, passando uma vez por cada lado do ângulo.

Sugestão: A solução é uma dupla aplicação da solução do problema de Heron.

3) Seja P um ponto no interior de um triângulo ΔABC . Mostre que:

$$\frac{AB + BC + AC}{2} < PA + PB + PC < AB + BC + AC$$

Sugestão: Para provar a primeira desigualdade, use a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ e $\triangle ACP$, escrevendo AB < PA + PB etc. Para a segunda desigualdade, use o exercício resolvido 3 acima.

4) Dados dois pontos A e B, em um mesmo lado de uma reta r dada, achar o ponto P sobre r tal que |AP - BP| seja máximo.

Sugestão: Observe que qualquer lado de um triângulo é maior do que o valor absoluto da diferença dos outros dois, e que A, B e P formam um triângulo (qualquer que seja P em r?).

3.5.7 Posições Relativas de Retas e Circunferências – Tangentes

Já estudamos as posições relativas de duas retas. Vamos estudar agora as posições relativas de reta e circunferência. Faremos este estudo considerando uma circunferência, um ponto do plano e as retas que passam por este ponto. Seja então uma circunferência de centro O e raio R, e seja P um ponto do plano. Há três possibilidades:

a) **O ponto** P é interior à circunferência (ou seja, está no interior do círculo delimitado pela circunferência): Neste caso, qualquer reta que passa por P intercepta a circunferência em dois pontos. Para verificar isto observe que OP < R. Se d é a distância de O a uma reta qualquer r que passa por P, então $d \le OP < R$. Agora, existe um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento R e cateto de comprimento R (ver o exercício proposto da seção 3.5.3). Seja R o pé da perpendicular a R por R entre R e podemos marcar dois pontos R e R em R entre R e R0, tais que R1 e os triângulos R2 e R3 e R4 e R5 e sejam retângulos como o triângulo descrito acima. Logo, R4 e R5 estão na circunferência. Veja a figura a seguir (sem a circunferência desenhada):

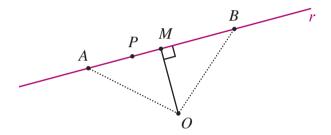


Figura 3.58 - OA = OB = R

Pode-se verificar que qualquer outro ponto de *r*, distinto de *A* e *B*, está a uma distância de *O* distinta de *R* (como?). Portanto, só existem dois pontos na intersecção de r com a circunferência.

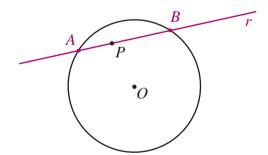


Figura 3.59 – Se P é o ponto interior, a reta r intercepta a circunferência em dois pontos

Uma reta que intercepta uma circunferência em dois pontos é chamada reta **secante** à circunferência.

b) **O ponto** *P* **está na circunferência:** Vejamos inicialmente o que acontece se a reta r for perpendicular a \overline{OP} . Neste caso, para qualquer ponto Q de r, distinto de P, teremos OQ > OP = R (pois aqui OP é a distância de O a r). Portanto, qualquer outro ponto de r é exterior à circunferência.

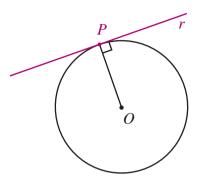


Figura 3.60 – Somente P está em r

Definição 3.6. Uma reta que intercepta uma circunferência em um único ponto é chamada **reta tangente** à circunferência.

Teorema 3.9. Uma reta é tangente a uma circunferência de centro O em um ponto P se, e somente se, ela for perpendicular a \overline{OP} .

Demonstração: Já vimos que, se uma reta r é perpendicular OP, então ela é tangente à circunferência, segundo a definição de tangência a uma circunferência. Suponha então que r seja uma reta tangente à circunferência no ponto P. Então, por definição, nenhum outro ponto de r está na circunferência. Na verdade, qualquer outro ponto de r é exterior à circunferência, pois caso contrário, haveria mais de um ponto de r na circunferência. Segue-se que se Q é um ponto de r, distinto de P, então OQ > R = OP. Então OP é a menor distância de O a um ponto r, ou seja, \overline{OP} é perpendicular a r.

Note que, por um ponto *P* de uma circunferência, passa uma **única** reta tangente a essa circunferência.

Podemos agora compreender o que significa dizer que uma circunferência está **inscrita** em um triângulo. O incentro, ponto de

intersecção das três bissetrizes, é o seu centro. Já vimos que o incentro é eqüidistante dos três lados do triângulo, ou seja, os segmentos com uma extremidade no incentro e a outra em cada um dos pés das perpendiculares pelo incentro a cada um dos lados do triângulo têm o mesmo comprimento. Assim, com centro no incentro, passa uma mesma circunferência por cada um destes pés de perpendiculares e, pelo perpendicularismo, cada lado do triângulo é tangente a esta circunferência. Pode-se provar que o raio da circunferência inscrita é sempre menor ou igual à metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo e que a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo for eqüilátero (veja a fórmula de Euler).

Observação: O conceito de reta tangente a uma curva qualquer é mais complexo do que o caso da circunferência. Não é verdade, no caso geral, que uma reta que intercepta uma curva em um único ponto é reta tangente à curva nesse ponto. Nem fica claro o que deve ser, ou satisfazer, uma reta tangente a uma curva, se utilizarmos apenas a noção de intersecção (do ponto de vista quantitativo, ou seja, quanto ao número de pontos de intersecção). Um conceito de tangência mais apropriado deveria ser local, ou seja, uma reta interceptando a curva em um único ponto (o ponto de tangência) e sem intersecções para os pontos da reta "próximos" àquele ponto, e que interceptasse a curva próximo ao ponto de tangência, se qualquer pequena "perturbação" angular fosse realizada na reta em torno daquele ponto. Isto se aplica ao caso da circunferência. Poderia, no entanto, ocorrer uma situação de tangência em que a reta tangente interceptasse a curva em infinitos pontos "próximos" ao ponto de tangência? Seja qual for o conceito de tangência que se estabeleça, ele deve ser geral o suficiente para incluir todos os caso possíveis (e desejáveis). Tal conceito não pode ser entendido com as ferramentas aqui desenvolvidas. Ele será estudado de forma apropriada no Cálculo (ou na Análise) e na Geometria Diferencial.

c) O Ponto P é Exterior à Circunferência: Neste caso há três possibilidades: retas que não interceptam a circunferência; duas retas tangentes à circunferência; e retas que interceptam a circunferência em dois pontos.

Não interceptam: Basta construir um triângulo retângulo de hipotenusa \overline{OP} com o cateto de extremidade O com medida maior do que R e menor do que OP – exercício proposto da seção 3.5.3

Tangentes: Construa um triângulo retângulo de hipotenusa \overline{OP} com o cateto de extremidade O com medida igual a R.

Dois pontos: Basta tomar um ponto interior à circunferência e considerar a reta passando por este ponto e por P.

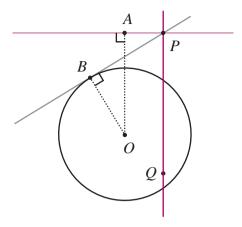


Figura 3.61 - Posições relativas de reta e circunferência

O caso (c) reúne todas as possibilidades de posições relativas de reta e circunferência. Observe que, por construção, existem duas retas tangentes à circunferência, passando por cada ponto exterior (veja a discussão sobre intersecção de circunferências mais adiante). Além disso, os segmentos de retas tangentes são congruentes. Veja a figura a seguir:

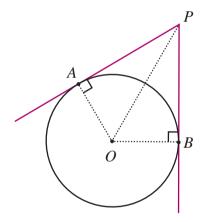


Figura 3.62 - PA = PB

Os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OBP$ são congruentes <u>pois</u> são triângulos retângulos com OA = OB = R e hipotenusa \overline{OP} comum (caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos). Logo, PA = PB. Além disso, \overline{OP} está contido nas bissetrizes de $\angle APB$ e $\angle AOB$.

Vejamos agora as posições relativas de duas circunferências. Faremos este estudo segundo os raios e a distância entre os centros das duas circunferências.

Sejam então duas circunferências de centros O_1 e O_2 e raios R_1 e R_2 respectivamente. Suponha, sem perda de generalidade, que $R_1 \ge R_2$.

Então, se $O_1O_2 > R_1 + R_2$ as circunferências não se interceptam. De fato, se P fosse um ponto comum às duas circunferências, então teríamos $O_1P + O_2P = R_1 + R_2 < O_1O_2$, o que contradiz a desigualdade triangular.

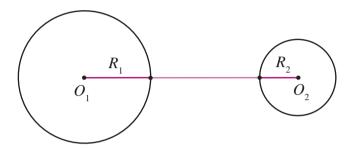


Figura 3.63 - $O_1O_2 > R_1 + R_2$

Se $O_1O_2 = R_1 + R_2$ então existe um único ponto P do plano, tal que $O_1O_2 = O_1P + O_2P$. Tal ponto está no segmento O_1O_2 e é o único ponto comum às duas circunferências.

Definição 3.7. Duas circunferências são ditas **tangentes** se elas se interceptam em um único ponto.

Da análise segue-se que, se duas circunferências são tangentes, então seus centros e o ponto de tangência são colineares. Seja r a reta perpendicular a $\overline{O_1O_2}$ no ponto de tangência P. Então r é tangente a ambas as circunferências. No caso acima, cada uma das circunferências estará contida em um semiplano distinto em relação à reta r. Dizemos então que as circunferências são **tangentes exteriores** (ou tangentes externamente).

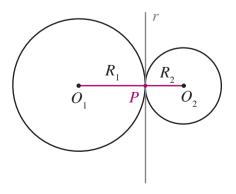


Figura 3.64 - Circunferências tangentes exteriores: $O_1O_2 = R_1 + R_2$

Há ainda um segundo caso de tangência de duas circunferências que veremos um pouco adiante.

Se $R_1-R_2 < O_1O_2 < R_1+R_2$, então as circunferências se interceptam em pelo menos um ponto P que não é colinear com O_1 e O_2 . De fato, a desigualdade triangular garante que existe um triângulo com lados de medidas O_1O_2 , R_1 e R_2 . Agora, seja Q o simétrico de P e, relação a O_1O_2 , ou seja, O_1O_2 e perpendicular a O_1O_2 e intercepta este segmento em um ponto O_1O_2 (verifique). Então $O_1PM \equiv O_1QM$ e $O_1PM \equiv O_2PM \equiv O_2PM$ (verifique). Segue-se que $O_1Q = O_1P = R_1$ e $O_2Q = O_2P = R_2$ e, portanto, O_1O_2 também pertence às duas circunferências. Veja a figura (sem as circunferências desenhadas):

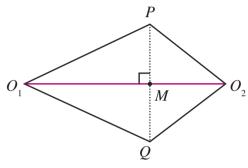


Figura 3.65 - $O_1P = R_1$ e $O_2 = R_2$ implica em $O_1Q = R_1$ e $O_2Q = R_2$

Neste caso o centro O_2 pode ser exterior, interior ou estar na circunferência de centro O_1 . Observe a figura abaixo:

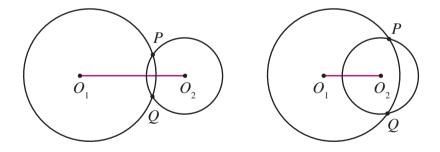


Figura 3.66 - Casos em que $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$

Observe que, da análise anterior, o segmento \overline{PQ} que une os pontos de intersecção das duas circunferências é perpendicular à reta dos centros $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Se $O_1O_2=R_1-R_2$ então temos dois casos. Se $R_1=R_2$, então $O_1O_2=0$ e as duas circunferências são coincidentes. Se $R_1>R_2$, então exis-

te um único ponto P, colinear com O_1 e O_2 , tal que O_2 está entre O_1 e P e tal que $O_2P=R_2$ e $O_1P=R_1$. Neste caso, as duas circunferências são ditas **tangentes interiores** (ou tangentes interiormente). Note que a reta r, perpendicular à reta O_1O_2 em P é tangente comum às duas circunferências.

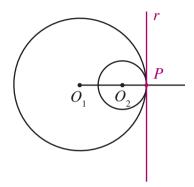


Figura 3.67 - Circunferências tangentes interiores

Finalmente, se $0 \le O_1O_2 < R_1 - R_2$ (no caso $R_1 > R_2$), então uma circunferência é interior à outra. Se os centros coincidirem, dizemos que as circunferências são **concêntricas**.

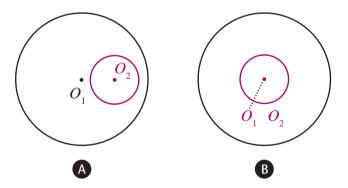


Figura 3.68 - (A) circunferência interior à outra; (B) circunferência concêntricas

Uma pergunta interessante que surge é a seguinte: dadas duas circunferências, existem pontos do plano cujos segmentos de reta tangentes às duas circunferências tenham o mesmo comprimento?

Daremos uma resposta parcial a esta pergunta nos exercícios a seguir. O estudo de tangência fornece-nos ainda diversos problemas de construção geométrica bem interessantes. Em alguns casos, pequenas variações de condições exigirão conhecimentos a serem ainda desenvolvidos.

Exercícios Resolvidos

1) Sejam duas circunferências tangentes (exteriores ou interiores) em um ponto *P*. Provar que, se *Q* é um ponto qualquer da reta tangente às circunferências em *P*, então os segmentos de reta tangentes às duas circunferências têm o mesmo comprimento.

Resolução: Vamos considerar duas circunferências tangentes exteriores (a demonstração para tangentes interiores é a mesma).

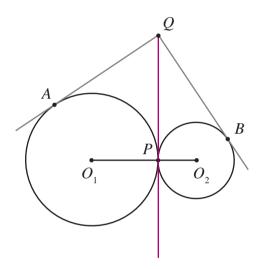


Figura 3.69 - OA = OP = OB

Como para cada ponto exterior a qualquer circunferência existem dois segmentos tangentes congruentes e como \overline{QP} é tangente às duas circunferências, seque-se que QA = QP = QB.

Observação: Pode-se provar que somente os pontos da tangente por *P* têm essa propriedade, ou seja, esta reta contém todos os pontos do plano cujos segmentos tangentes às duas circunferências são congruentes. Tal reta é chamada **eixo radical** das circunferências (Veja capítulo 7).

2) Sejam \overline{PM} e \overline{PN} os dois segmentos de reta tangentes a uma circunferência por um ponto P exterior a ela. Prove que todo triângulo ΔPAB , com A entre P e M, B entre P e N e \overline{AB} tangente à circunferência, tem perímetro igual a $2 \cdot PM = 2 \cdot PN$.

Resolução:

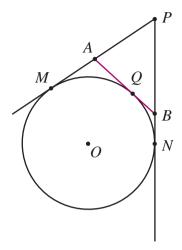


Figura 3.70 - $PA + AB + PB = 2 \cdot PM = 2 \cdot PN$

Seja Q o ponto de tangência de \overline{AB} na circunferência. Então AQ=MA e BQ=NB. Então o perímetro 2p do triângulo ΔPAB é igual a:

$$2p = PA + AB + PB = PA + AQ + BQ + PB =$$

= $PA + MA + NB + PB = 2 \cdot PM = 2 \cdot PN$

3) Seja $\angle AOB$ um ângulo. Construir com régua e compasso a circunferência tangente aos lados do ângulo que passa por A.

Resolução: O centro desta circunferência deve estar na bissetriz de $\angle AOB$ e na reta perpendicular a \overrightarrow{OA} passando por A.

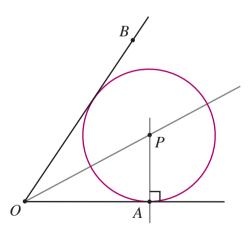


Figura 3.71 - P está na intersecção da bissetriz de $\angle AOB$ com a perpendicular \overrightarrow{OA} por A

4) Construir com régua e compasso um triângulo, sendo dados um de seus ângulos, um dos lados adjacente a este ângulo e a soma dos outros dois lados.

Resolução: Seja $\triangle ABC$ onde é conhecido o ângulo $\angle C$, o comprimento AC e a soma AB+BC. Então conhecemos o perímetro 2p=AB+AC+BC. Tracemos o ângulo $\angle C$ e, sobre seus lados marquemos os pontos M e N tais que CM=CN=p (confira o exercício 2 acima). No segmento \overline{CM} marquemos o ponto A (o comprimento AC é dado). Trace agora a circunferência tangente aos lados do ângulo nos pontos M e N (exercício 3 acima) e depois é só traçar por A a tangente a esta circunferência, encontrando o ponto B no segmento \overline{CN} (para traçar esta tangente releia o caso (c) sobre posição relativa de reta e circunferência).

Observação: Este problema é exatamente o mesmo do exercício resolvido 5 da seção 3.5.2. A solução agora apresentada é bem mais complicada do que a anterior. No entanto, ela serviu como exemplo de uma técnica (o uso do exercício 2 acima) que será necessariamente utilizada em outros problemas de construção (veja os problemas propostos ao fim do capítulo).

5) Dadas duas circunferências tal que uma delas não seja interior à outra, traçar com régua e compasso uma reta tangente a elas de modo que ambas pertençam ao mesmo semiplano determinado por esta tangente.

Resolução: Vamos fazer uma análise do problema. Observe a figura, considerando o problema resolvido:

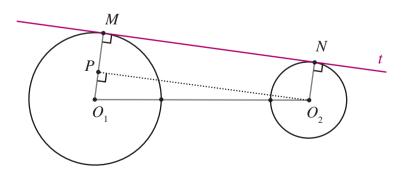


Figura 3.73 - $O_1P = R_1 - R_2$

Seja t a tangente às circunferências de centros O_1 e O_2 nos pontos M e N respectivamente. Então t é perpendicular a O_1M e O_2N .

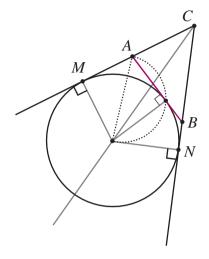


Figura 3.72 - Construção do triângulo $\triangle ABC$

 $\frac{\text{Por }O_2}{O_2P}$ tracemos uma paralela a t que cruza $\overline{O_1M}$ em P. Então $\overline{O_2P}$ é perpendicular a $\overline{O_1M}$. Agora, a distância de $\overline{O_2P}$ à reta t é constante e igual a $O_2N=R_2$ (raio da circunferência de centro O_2). Segue-se que $MP=R_2$ e ΔO_1O_2P é um triângulo retângulo com $O_1\widehat{P}O_2=90^{\rm o}$ e $O_1P=O_1M-MP=R_1-R_2$ (R_1 é o raio da circunferência de centro O_1 – estamos supondo $R_1>R_2$).

Assim, como O_1O_2 , R_1 e R_2 são conhecidos, basta construir o triângulo ΔO_1O_2P e depois traçar $\overrightarrow{O_1P}$ que cruzará a circunferência de centro O_1 em M. A reta tangente t procurada será, como já sabemos, perpendicular a $\overrightarrow{O_1M}$ passando por M.

Observação: Se $R_1 = R_2$ então $\overline{O_1 M}$ e $\overline{O_2 N}$ serão perpendiculares à reta dos centros $\overline{O_1 O_2}$.

6) São dados uma circunferência, um ponto *P* nesta circunferência e uma reta *r*. Construir com régua e compasso uma circunferência tangente à reta *r* e tangente à circunferência dada no ponto *P*.

Resolução: Vejamos a análise do problema através de um possível caso (r não interceptando a circunferência):

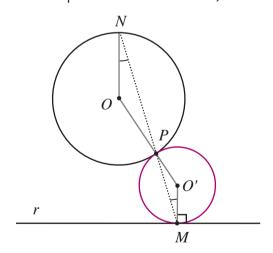


Figura 3.74 - $\overline{O'M}$ e \overline{ON} são paralelas

Supondo o problema resolvido, seja M o ponto tangência da circunferência procurada (centro O') com a reta r. Unindo M a P e prolongando, obtemos o ponto N na circunferência dada. Observe que $\overline{O'M}$ é perpendicular a r e que $O'\widehat{P}M = O\widehat{P}N$ (opostos pelo vértice). Como $\Delta O'PM$ e ΔOPN são isósceles, com O'M = O'P e OP = ON respectivamente, então $O\widehat{N}P = O\widehat{P}N = O'\widehat{P}M = O'\widehat{M}P$.

Segue-se que a transversal \overrightarrow{MN} às retas \overrightarrow{ON} e $\overrightarrow{O'M}$ produz dois ângulos alternos internos congruentes e, portanto, tais retas são paralelas. Logo, \overrightarrow{ON} é perpendicular à reta r.

Assim, para realizar a construção, basta traçar por O a perpendicular a r encontrando N. Trace depois a reta \overrightarrow{NP} que cruzará r em M. Finalmente, o centro O' estará na intersecção de \overrightarrow{OP} e da perpendicular a r por M.

Observação: Pode haver uma segunda solução com a circunferência de centro O ficando tangente interiormente à circunferência tangente pedida (faça uma análise deste caso e construa a solução). Deve-se observar ainda que o problema não tem solução se P pertence à reta r, exceto no caso em que \overline{OP} é perpendicular a r, quando, então, haverá infinitas soluções (verifique). Há apenas uma solução nos casos em que a reta r é secante à circunferência (sem passar por P), ou quando r não intercepta a circunferência e \overline{OP} é perpendicular a r (analise todos esses casos).

7) São dados uma reta t e dois ponto A e B, em um mesmo semiplano em relação a t, tais que \overrightarrow{AB} é perpendicular a t. Construa com régua e compasso uma circunferência tangente a t passando por A e B.

Resolução: Analisando o problema:

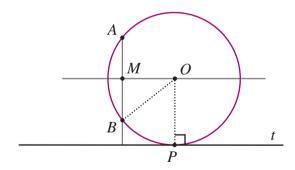


Figura 3.75 - OB = OA = OP e \overrightarrow{OM} é mediatriz de \overrightarrow{AB}

O centro desta circunferência deve estar na mediatriz de AB que, por sua vez, é paralela a t. Então a distância desta mediatriz a t é constante e será igual ao raio da circunferência procurada. Por outro lado, este raio é igual a OB e a OA.

Assim, basta traçar a mediatriz de AB, achar a distância desta mediatriz a t (através de uma perpendicular comum) e, com a ponta seca do compasso em A ou B e abertura igual àquela distância, achar o ponto O.

O problema tem uma segunda solução de mesmo raio com centro simétrico a O em relação à reta \overrightarrow{AB} .

8) São dadas duas circunferências exteriores e um ponto *P* em uma delas. Construir com régua e compasso uma terceira circunferência tangente às duas circunferências dadas e passando por *P* (ou seja, tangente a uma delas em *P*).

Resolução: Observe a figura, supondo o problema resolvido: Suponha $O_1P=R_1>R_2=O_2Q$.

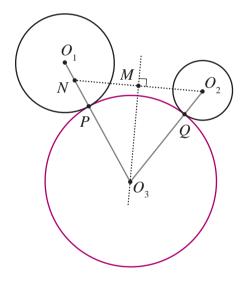


Figura 3.76 - $NP = O_2Q$ implica em $\overline{MO_3}$ mediatriz de $\overline{NO_2}$

Então, se $NP=O_2Q$, teremos $O_3N=O_3O_2$ e o triângulo ΔO_3NO_2 será isósceles. O centro O_3 estará na mediatriz de $\overline{NO_2}$ e na reta $\overline{O_1P}$. Ache, então, o ponto N em $\overline{O_1P}$ e depois trace a mediatriz de $\overline{NO_2}$.

Observação: Pode haver uma segunda solução, dependendo das posições relativas das duas circunferências. Considere a reta s tangente à circunferência de centro O_1 no ponto P. Então, se a circunferência de centro O_2 não tangenciar a reta s o problema terá sempre duas soluções, uma delas sendo tangente exteriormente

às duas circunferências dadas, e a outra tangente interiormente a uma delas e exteriormente à outra. Se a circunferência de centro O_2 tangenciar a reta s, então o problema terá uma única solução exceto no caso em que aquela circunferência tangenciar s exatamente no ponto P. Neste último caso, o problema terá infinitas soluções com centro na reta $\overline{O_1P}$ (analise todos esses casos).

Exercícios Propostos

- 1) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com $\widehat{A}=90^{\circ}$. Sejam BC=a, AC=b, AB=c e $p=\frac{a+b+c}{2}$ (o semi-perímetro do $\triangle ABC$). Prove que o raio r da circunferência inscrita nesse triângulo é dado por r=p-a.
- 2) Dadas duas circunferências exteriores, ou seja, tais que a distância entre seus centros seja maior do que a soma dos seus raios, construir com régua e compasso uma reta tangente interiormente a elas (ou seja, tais que as circunferências fiquem em semiplanos distintos em relação à reta tangente). Veja o problema resolvido 5 nesta seção.
- 3) São dadas uma circunferência, uma reta *r* e um ponto *P* nesta reta. Construir com régua e compasso uma circunferência tangente à circunferência dada e tangente à reta *r* em *P* (veja o exercício resolvido 6 desta seção).

3.5.8 Ângulos na Circunferência

Vamos estudar agora ângulos cujos lados têm, cada um, pelo menos um ponto comum com uma circunferência dada. Pretendemos relacionar a medida desses ângulos com **arcos** determinados por eles na circunferência. Comecemos com o ângulo central.

Definição 3.8. Um ângulo é dito **central** em uma circunferência se o seu vértice for o centro da circunferência.

Os lados de um ângulo central interceptam a circunferência em dois pontos. Estes dois pontos dividem a circunferência em duas partes: uma contida no interior do ângulo e a outra no seu exterior. Chamamos cada uma dessas partes de **arcos de circunferên-**

cia. Os dois pontos são chamados extremidades dos arcos. Se A e B são estes pontos então denotamos por \widehat{AB} o arco menor (que está no interior do ângulo). Para diferenciar o arco maior do menor costumamos incluir um ponto qualquer C no arco maior (que está no exterior do ângulo) e denotá-lo por \widehat{ACB} .

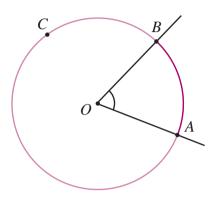


Figura 3.77 - Ângulo central $\angle AOB$ e arcos \widehat{AB} e \widehat{ABC}

Diz-se ainda que o ângulo $\angle AOB$ subentende ou delimita ou define o arco \widehat{AB} . Um conceito operacionalmente útil é o seguinte: a medida do arco \widehat{AB} (não confundir com comprimento de arco), onde \widehat{AB} é a parte de uma circunferência de centro O que está no interior do ângulo central $\angle AOB$, é a medida \widehat{AOB} desse ângulo. Portanto falaremos, por exemplo, de um arco de medida 60° . Denotaremos a medida do arco \widehat{AB} também por \widehat{AB} . Para diferenciar se estamos falando do objeto geométrico arco ou de sua medida será necessário considerar o contexto em que \widehat{AB} é citado. Em operações, igualdades etc, obviamente o símbolo \widehat{AB} denotará medida de arco. Diremos que a medida do arco \widehat{ACB} , que está no exterior do ângulo $\angle AOB$, é igual a $360^\circ - \widehat{AOB}$. A razão para isto é que duas retas que se interceptem em um ponto formam em torno dele quatro ângulos cuja soma é igual a quatro ângulos retos, ou seja, igual a 360° . Isto corresponde a uma extensão do conceito de ângu-

lo em termos de medida. Assim, ângulos centrais na circunferência variam de 0° a 360° . Por exemplo, um ângulo de 240° é um ângulo que corresponde ao arco maior, que não está no interior do ângulo $\angle AOB$ da figura 3.78, cuja medida é 120° .

O arco de medida 180°, correspondente ao "ângulo" raso, é uma semicircunferência. O segundo tipo de ângulo na circunferência mais importante é definido a seguir.

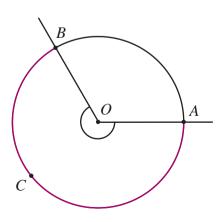


Figura 3.78 - $\overrightarrow{ABC} = 240^{\circ}$

Definição 3.9. Um ângulo é dito **inscrito** em uma circunferência se o seu vértice pertence a essa circunferência e os seus lados forem secantes a ela.

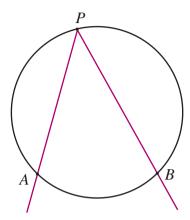


Figura 3.79 - ∠APB é um ângulo inscrito

Sejam \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} os lados de um ângulo inscrito. Dizemos aqui também que o ângulo $\angle APB$ subentende, delimita ou define o arco \widehat{AB} que está em seu interior.

O resultado a seguir é fundamental no estudo de ângulos na circunferência, em todas as situações em que surgem figuras inscritas em uma circunferência e em uma grande quantidade de problemas de construções geométricas envolvendo ângulos.

Teorema 3.10. A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco por ele delimitado.

Demonstração: Seja uma circunferência de centro O e seja P um ponto nesta circunferência. Consideremos três casos:

(i) P, O e B (ou A) são colineares: Neste caso, considere o triângulo $\triangle OAP$. Como OA = OP (raio da circunferência), então $O\widehat{A}P = O\widehat{P}A$. Agora, o ângulo $\angle AOB$ é externo ao ângulo $\angle AOP$ no triângulo $\triangle OAP$. Segue-se que $A\widehat{O}B = O\widehat{A}P + O\widehat{P}A = 2O\widehat{P}A$. Mas $\angle OPA$ é o mesmo que $\angle APB$ e $A\widehat{O}B = \widehat{AB}$.

Segue-se que
$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$
.

(ii) O está no interior de $\angle APB$: Neste caso, considere a semireta \overrightarrow{PO} , no interior de $\angle APB$, que cruza a circunferência em D.

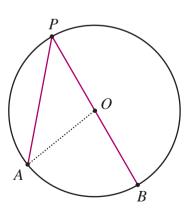


Figura 3.80 - Caso (i)

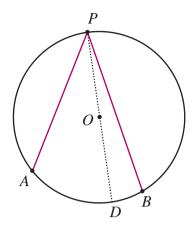


Figura 3.81 - Caso (ii)

Então $A\widehat{P}B = A\widehat{P}D + B\widehat{P}D$. Mas, por (i), $A\widehat{P}D = \frac{\widehat{AD}}{2}$ e $B\widehat{P}D = \frac{\widehat{BD}}{2}$. Então $A\widehat{P}B = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ (a soma de medidas de arcos decorre imediatamente da soma das medidas dos ângulos centrais correspondentes).

(iii) O está no exterior a $\angle APB$:

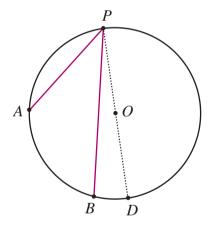


Figura 3.82 - Caso (iii)

Deixamos este caso como exercício.

Vamos olhar esse resultado da seguinte forma: considere uma circunferência e dois pontos distintos A e B nesta circunferência. Considere o arco maior da circunferência, com extremidades A e B (se A, B e O forem colineares, ou seja, se \overline{AB} for diâmetro da circunferência, então considere uma das semicircunferências). Tal

arco está todo contido em um dos semiplanos definidos pela reta \overrightarrow{AB} . O que o teorema 3.10 nos diz é que **qualquer ponto** deste arco é vértice de um ângulo inscrito na circunferência cujos lados passam por A e por B, com medida $\frac{\widehat{AB}}{2}$ (como foi convencionado, supomos \widehat{AB} o arco menor). Na figura abaixo representamos este arco onde $\frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$.

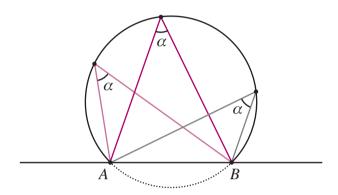


Figura 3.83 - $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} < 90^{\circ}$

No caso da semicircunferência teremos $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$, um resultado que já havíamos obtido na seção 3.5.3 como conseqüência do teorema 3.5.

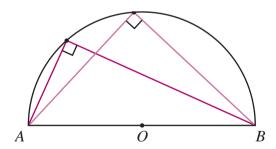


Figura 3.84 - Ângulos na semi-circunferência: $\alpha = 90^{\circ}$

Observe que, no caso dos vértices sobre o arco maior, \widehat{AB} < 180°, e daí teremos $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$ < 90°. Portanto, pontos sobre arcos maiores formam com as extremidades do arco ângulos agudos (Confira novamente a figura 3.83).

Observe ainda que os pontos sobre o arco menor \widehat{AB} formarão com A e B um ângulo suplementar a α , pois se P está neste arco menor e se C é um ponto do arco maior, então

$$A\widehat{P}B = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{360^{\circ} - \widehat{AB}}{2} = 180^{\circ} - \frac{\widehat{AB}}{2} = 180^{\circ} - \alpha$$
.

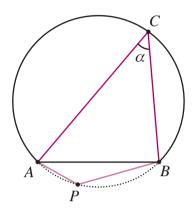


Figura 3.85 -
$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{ACB}}{2} 180^{\circ} - \alpha$$

Observe também, considerando novamente o arco maior, que qualquer ponto, no mesmo semiplano do arco em relação à reta \overrightarrow{AB} , que está no exterior da circunferência, forma com A e B um ângulo **menor** do que α , e qualquer ponto no mesmo semiplano do arco e no interior da circunferência forma com A e B um ângulo **maior** do que α . Veja a figura:

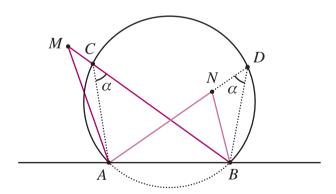


Figura 3.86 - $\widehat{AMB} < \alpha < \widehat{ANB}$

De fato, na figura vemos que $\widehat{AMB} < \widehat{ACB} = \alpha$ (pois $\angle ACB$ é externo no vértice C do triângulo ΔACM), e $\widehat{ANB} > \widehat{ADB} = \alpha$ (pois $\angle ANB$ é externo no vértice N do triângulo ΔBDN).

Portanto, o arco maior divide os pontos do semiplano, em relação à reta \overrightarrow{AB} , ao qual ele pertence, em três regiões: uma, cujos pontos formam com A e B ângulos **iguais** a α ; outra, cujos pontos formam com A e B ângulos **menores** do que α ; e a terceira, cujos pontos formam com A e B ângulos **maiores** do que α .

Isto é verdadeiro também, obviamente, para o arco menor que está no outro semiplano, e cujos pontos formam com A e B ângulos iguais a 180° – α .

Observe que os centros das circunferências que passam por A e B estão na mediatriz de \overline{AB} . Seja O o centro da circunferência que passa por A e B cujo arco contém os pontos que formam com A e B um ângulo α . Os pontos da mediatriz que estão no mesmo semiplano de

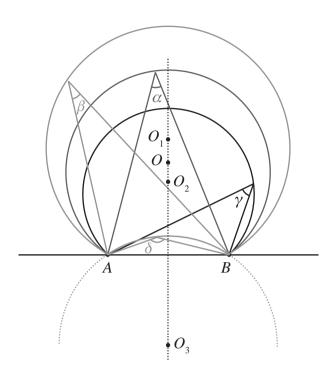


Figura 3.87 - centro $O_1: \beta < \alpha$; centro $O_2: \gamma > \alpha$; centro $O_2: \gamma > \alpha$;

O e estão a uma distância da reta AB maior do que a distância de O a esta reta são centros de circunferências que passam por A e B cujos arcos, naquele semiplano, estão no exterior do arco do ângulo α e, portanto, cujos pontos formam com A e B ângulos menores do que α . Os pontos da mediatriz que estão no mesmo semiplano de O e estão a uma distância da reta \overrightarrow{AB} menor do que a distância de O a esta reta, ou que estão no outro semiplano, são centros de circunferências que passam por A e B cujos arcos, naquele semiplano, estão no interior do arco do ângulo α e, portanto, cujos pontos formam com A e B ângulos maiores do que α .

Considere agora um segmento AB e um dos semiplanos determinados pela reta \overrightarrow{AB} . É fácil obter neste semiplano um ponto P tal que $\widehat{APB} = \alpha$ (basta, por exemplo, construir o triângulo ΔAPB isósceles, com AP = BP, e $\widehat{APB} = \alpha$ e, para isto, construa o ângu-

lo
$$B\widehat{A}P = \frac{180^{\circ} - \alpha}{2} = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$$
). Se considerarmos o arco da circunfe-

rência circunscrita ao triângulo $\triangle APB$ que passa por P, veremos que todo ponto deste arco fará com A e B um ângulo igual a α , e tal arco dividirá o semiplano nas regiões citadas acima. Tal arco é uma região maximal naquele semiplano.

Definição 3.10. O arco capaz de um ângulo α em relação a um segmento \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos, em um dos semiplanos definidos pela reta \overline{AB} , que são vértices de ângulos cujos lados passam por A e B e têm medida igual a α . Tal lugar geométrico é um arco de uma circunferência que passa por A e B e está contido naquele semiplano.

O arco capaz é utilizado em diversos problemas de construções geométricas.

Exemplo. Construir com régua e compasso um triângulo ΔABC sendo dados o lado \overline{AB} , o ângulo $\angle C$ e a altura relativa ao lado \overline{AB} .

Resolução: Seja $\alpha = \widehat{C}$. A análise do problema é:

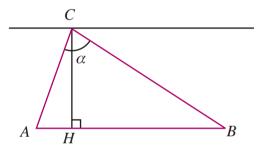


Figura 3.88 - São dados \overline{AB} , α e CH

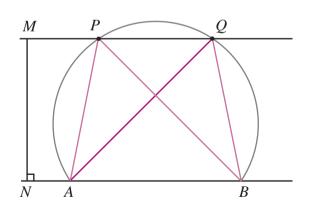


Figura 3.89 - MN é igual à altura dada; $\Delta APB \equiv \Delta BQA \ \ \ \hat{P} = \hat{Q} = \alpha$

Basta então construir o arco capaz do ângulo α em relação ao segmento \overline{AB} (como? Já vimos uma sugestão algumas linhas acima – há uma outra forma usualmente utilizada, que veremos adiante) e traçar uma reta paralela à reta \overline{AB} cuja distância desta seja igual ao comprimento da altura dada. Esta paralela pode não cruzar o arco capaz (neste caso, os dados são incompatíveis e o problema não tem solução), pode tangenciar o arco capaz (neste caso há uma única solução – um triângulo isósceles) ou pode ser secante ao arco capaz (neste caso, há duas soluções que são congruentes – por que?). Veja a figura 3.89, para o caso em que há duas soluções.

Vejamos agora outro ângulo na circunferência.

Definição 3.11. Dada um circunferência, um ângulo de segmento é um ângulo com vértice na circunferência, com um lado secante e o outro lado tangente à circunferência.

Também chamado ângulo semi-inscrito.

Se P e A são pontos de uma circunferência e, se B é um ponto da reta tangente à circunferência por P, então $\angle APB$ é um ângulo de segmento. Tal ângulo subentende o arco \widehat{PA} , que está no seu interior.

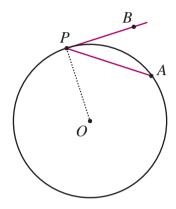


Figura 3.90 - Ângulo do segmento ∠APB

Teorema 3.11. A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do arco por ele subentendido.

Demonstração: Seja uma circunferência de centro O e seja $\angle APB$ um ângulo de segmento com A e P nesta circunferência e \overrightarrow{PB} tangente a ela. Seja \overrightarrow{OM} perpendicular à corda \overrightarrow{PA} , com M em \overrightarrow{PA} . Então, como $\triangle OPA$ é isósceles, $P\widehat{OM} = \frac{P\widehat{OA}}{2} = \frac{\widehat{PA}}{2}$.

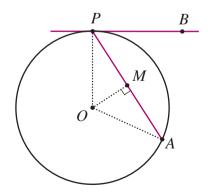


Figura 3.91 -
$$\frac{\widehat{PA}}{2} = \frac{\widehat{POA}}{2} = \widehat{POM} = \widehat{APB}$$

Como \overrightarrow{OP} é perpendicular a \overrightarrow{PB} (pois \overrightarrow{PB} é tangente à circunferência) e como \overrightarrow{PA} é perpendicular a \overrightarrow{OM} ($\triangle OPA$ é isósceles e \overrightarrow{OM} é altura da base), segue-se que os ângulos $\angle POM$ e $\angle APB$ são congruentes (exercício resolvido 3, da seção 2.7). Note que os dois ângulos na figura são agudos e, portanto, não podem ser suplementares.

Assim:
$$A\hat{P}B = P\hat{O}M = \frac{\widehat{PA}}{2}$$

Este resultado justifica a seguinte construção usual do arco capaz de um ângulo α em relação a um segmento \overline{AB} (mas não a única, como já vimos anteriormente):

Com vértice em B (ou \overline{A}) marque (transporte) um ângulo $\angle PBA$ de medida α tendo \overline{BA} (ou \overline{AB}) como lado. Construa a reta r perpendicular ao lado \overline{BP} do ângulo no ponto B. Seja s a mediatriz de \overline{AB} . O ponto de intersecção O das retas r e s é o centro de uma circunferência cujo arco no semiplano oposto ao lado \overline{BP} , em relação à reta \overline{AB} , é o arco capaz procurado.

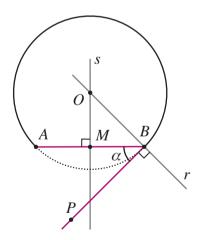


Figura 3.92 - Construção do arco capaz de um ângulo α em relação ao segmento \overline{AB}

Justificativa: Pela construção, \overrightarrow{BP} é tangente à circunferência e, portanto, $\angle ABP$ é um ângulo de segmento com $A\widehat{BP} = \widehat{\frac{AB}{2}}$. Mas $A\widehat{BP} = \alpha$. Logo $\alpha = \widehat{\frac{AB}{2}}$ e o arco no semiplano oposto ao lado \overrightarrow{BP}

(no caso da figura, o <u>arc</u>o maior) é o arco capaz do ângulo α em relação ao segmento \overline{AB} . Vejamos agora os ângulos com vértices que não pertencem à circunferência.

Definição 3.12. Dada uma circunferência, um ângulo **ex-inscrito** em relação a essa circunferência é um ângulo cujo vértice não pertence à circunferência e cujos lados têm pelo menos um ponto comum com ela.

Há dois casos: (i) o vértice é exterior à circunferência (ângulo exinscrito externo); e (ii) o vértice é interior à circunferência (ângulo ex-inscrito interno). No caso (i) os lados do ângulo podem ser secantes ou tangentes à circunferência. No caso (ii) os lados do ângulo só podem ser secantes à circunferência.

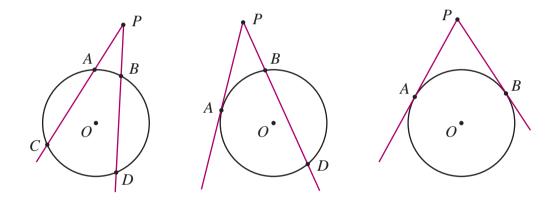


Figura 3.93 - Caso (i): ângulos ex-inscritos externos

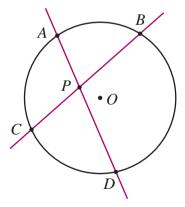


Figura 3.94 - Caso (ii): ângulo ex-inscrito interno

Em qualquer caso, ficam determinados dois arcos no interior do ângulo.

Teorema 3.12. A medida de um ângulo ex-inscrito externo é igual à semi-diferença das medidas dos arcos por ele determinados na circunferência. A medida de um ângulo ex-inscrito interno é igual à semi-soma das medidas dos arcos por ele determinados.

Demonstração: Vamos demonstrar o caso do ângulo ex-inscrito externo em que os lados são secantes à circunferência. Seja P um ponto exterior à circunferência que é vértice de um ângulo cujos lados interceptam a circunferência em A, C e B, D respectivamente.

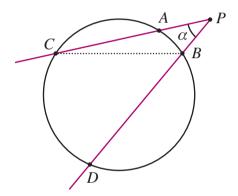


Figura 3.95 - $\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$

Seja a a medida desse ângulo. Na figura vê-se que $A\widehat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$ ($\angle ACB$ é inscrito) e $C\widehat{B}D = \frac{\widehat{CD}}{2}$ ($\angle CBD$ é inscrito). Mas $\angle CBD$ é externo ao ângulo $\angle CBP$ no triângulo $\triangle CBP$. Logo $C\widehat{B}D = C\widehat{P}B + P\widehat{C}B = \alpha + A\widehat{C}B$. Segue-se que:

$$\frac{\widehat{CD}}{2} = \alpha + \frac{\widehat{AB}}{2}$$
 ou $\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$

Os outros casos deixamos como exercício. Note que no vértice do ângulo ex-inscrito interno temos dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

Exercícios Resolvidos

Seja <u>uma circunferência</u> de centro *O*. Mostre que duas cordas *AB* e *CD* nesta circunferência são congruentes se, e somente se, os ângulos centrais ∠AOB e ∠COD forem congruentes.

Resolução: Suponha inicialmente $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$. Então, $\Delta AOB \equiv \Delta COD$, pois OA = OC = OB = OD (caso LAL). Logo, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

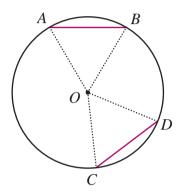


Figura 3.96 - $AB = CD \Leftrightarrow A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$

Suponha agora que AB=CD. Então, $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (caso LLL). Logo, $A\widehat{O}B=C\widehat{O}D$.

2) Construa com régua e compasso um triângulo $\triangle ABC$, sendo dados o lado \overline{AB} , o ângulo $\angle C$ e a **soma** dos outros dois lados.

Resolução: Observe a figura abaixo (e lembre do exercício resolvido 5 da seção 3.5.2 – a diferença aqui é que é dado o ângulo oposto ao lado \overline{AB} e naquele exercício era dado o ângulo $\angle A$):

Seja CD=BC. Como $\angle ACB$ é exterior ao ângulo $\angle BCD$ no triângulo ΔBCD , temos que $A\widehat{C}B=C\widehat{D}B+C\widehat{B}D$. Mas, como CD=BC, temos $C\widehat{D}B=C\widehat{B}D$. Logo, $A\widehat{C}B=2C\widehat{D}B$. Assim, se $A\widehat{C}B=\alpha$, enquanto C pertence ao arco capaz do ângulo α em relação ao segmento \overline{AB} , D pertence ao arco capaz do ângulo α em relação a \overline{AB} .

Basta então construir o arco capaz de $\frac{\alpha}{2}$ em relação a \overline{AB} e, com a ponta seca do compasso em A (ou em B) e abertura igual à soma

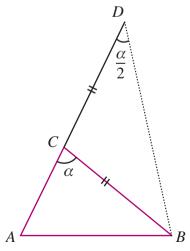


Figura 3.97 - \overline{AB} , $\angle C$ e $AC + BC \text{ dados: } A\widehat{D}B = \frac{A\widehat{C}B}{2}$

dos outros dois lados, achar o ponto D na intersecção. Depois é só proceder como no exercício 5 da seção 3.5.

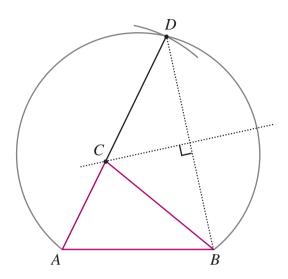


Figura 3.98 - Construção do ΔABC

3) Provar que, entre todos os triângulos $\triangle ABC$ com lado \overline{AB} dado e ponto C sobre um arco de circunferência dado que passa por A e B, aquele que tem perímetro **máximo** é o triângulo isósceles (este problema pode ser enunciado da seguinte maneira: dividir um arco de circunferência em duas partes, de modo que a soma dos comprimentos das cordas correspondentes seja máxima – da forma enunciada, o problema pede para provar que as cordas devem ser congruentes).

Resolução: Este problema poderia ser demonstrado facilmente com conhecimentos das propriedades de uma curva chamada elipse. No entanto, como não dispomos até aqui destes resultados, vamos apresentar um bela solução inspirada no exercício 2 acima.

Como o lado \overline{AB} está fixado e como queremos o perímetro máximo, devemos obter um triângulo ΔABC tal que a soma AC+BC dos outros dois lados seja máxima. O ponto C pertence a um arco de circunferência dado, que passa por A e B, ou seja, pertence a um arco capaz de um ângulo α em relação a \overline{AB} . Ora, no exercício 2 acima, vimos que enquanto o ponto C percorre o arco capaz de α em relação a \overline{AB} , o ponto D tal que

AD = AC + BC percorre o arco capaz de $\frac{\alpha}{2}$ em relação a \overline{AB} .

Queremos então achar D sobre este arco capaz de modo que AD seja máximo. Tal comprimento será máximo quando \overline{AD} passar pelo centro O do arco capaz de $\frac{\alpha}{2}$, ou seja, quando \overline{AD} for um diâmetro da circunferência daquele arco capaz. Então o ponto C será o ponto de intersecção deste segmento \overline{AD} com o arco capaz de α . Acontece que este ponto é o próprio ponto O que, pela propriedade do ângulo inscrito, estará também na mediatriz de \overline{AB} , pois OA = OB, ou seja, CA = CB e, portanto, o triângulo ΔABC é isósceles.

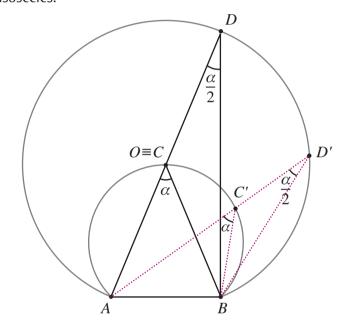


Figura 3.99 - $AD > AD' \Rightarrow$ perímetro $\triangle ABC >$ perímetro $\triangle AC'B$

Observação: Este resultado permitirá provar que, entre todos os polígonos de *n* lados inscritos em uma circunferência dada, aquele que tem o perímetro máximo é o polígono regular (veja o próximo capítulo). Uma outra maneira ainda de enunciar o exercício 3 é: entre todos os triângulos inscritos em uma circunferência dada, com um lado dado, aquele que tem perímetro máximo é o triângulo isósceles (veja os exercícios propostos para uma aplicação).

4) **(Problema de Regiomontanus):** Dados uma reta r e dois pontos A e B, no mesmo semiplano em relação a r, mas nenhum deles em r, tais que \overrightarrow{AB} é perpendicular a r, encontrar com régua e compasso o ponto P da reta r tal que \widehat{APB} seja **máximo**.

Resolução: A elegante solução para este problema tem sua análise baseada na discussão feita nesta seção sobre arco capaz. Considere os arcos capazes em relação a \overline{AB} , em um mesmo semiplano da reta \overline{AB} (veja a figura 3.100). Se um arco está no interior de outro, então o ângulo a ele correspondente é maior do que o ângulo correspondente ao outro. Existem arcos que, naquele semiplano, não interceptam r. Há apenas um que tangência r em um ponto P, cujo ângulo correspondente é, digamos, α . Agora, qualquer outro arco que contenha este último corresponderá a um ângulo menor do que α e interceptará r em dois pontos, ou seja, qualquer outro ponto de r no semiplano de P e distinto deste pertence a um arco no exterior do arco capaz de α .

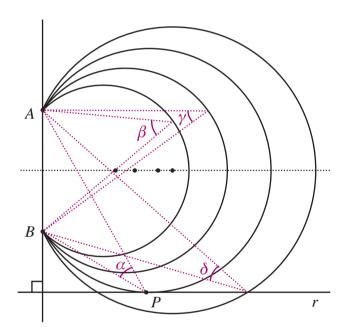


Figura 3.100 - $\beta > \gamma > \alpha > \delta$

Portanto, o ponto P procurado é o ponto de tangência do arco capaz em relação a \overline{AB} tangente à reta r. Sua construção já foi feita no exercício resolvido 7 da seção 3.5.7.

Observação: O problema admite uma outra solução, simétrica a P em relação à reta \overrightarrow{AB} (no semiplano à esquerda de \overrightarrow{AB}). O problema de Regiomontanus foi originalmente enunciado da seguinte maneira: achar a distância que um observador de altura conhecida deve ficar do pedestal (de altura conhecida) de uma estátua (de altura conhecida) de modo a olhá-la sob o **maior** ângulo de visão

Proposto pelo matemático alemão Johann Müller – 1436 a 1476 – que nasceu na cidade de Köningsberg in Bayern e era conhecido como "Regiomontanus", uma latinização do nome da sua cidade natal.

possível. A distância citada pode ser calculada facilmente, a partir das alturas dadas, usando-se o teorema de Pitágoras (capítulo 5). Este problema também pode ser resolvido, analiticamente, através do Cálculo Diferencial.

5) Seja ΔABC um triângulo acutângulo e sejam \overline{CF} , \overline{AG} e \overline{BH} as alturas relativas aos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} respectivamente. Considere o triângulo ΔFGH formado pelos pés das alturas. Provar que aquelas alturas são bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ΔFGH (tal triângulo é chamado **triângulo órtico** do triângulo ΔABC).

Resolução: Seja I o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$. Vamos provar que $\widehat{IFG} = \widehat{IFH}$ e, portanto, \overrightarrow{FI} é bissetriz do ângulo $\angle GFH$. A prova para os outros ângulos é análoga. Veja a figura a seguir.

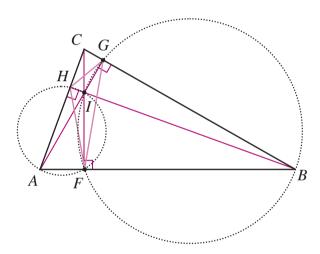


Figura 3.101 - $I\hat{F}G = \frac{\widehat{IG}}{2} = C\hat{B}H = C\hat{A}G = \frac{\widehat{IH}}{2} = I\hat{F}H$

A circunferência circunscrita ao triângulo retângulo ΔIGB ($\widehat{IGB}=90^\circ$), cujo centro é o ponto médio da hipotenusa \overline{IB} deste triângulo, passa pelo ponto F pois \overline{IB} também é hipotenusa do triângulo retângulo ΔIFB ($\widehat{IFB}=90^\circ$), de acordo com o corolário do teorema 3.5 da seção 3.5.7, ou de acordo com o fato de que o arco capaz de 90° em relação a um segmento é uma semicircunferência (em cada semiplano em relação à reta que contém o segmento) cujo centro é o ponto médio do segmento. Observe agora que, nesta circunferência, os ângulos $\angle IFG$ e $\angle IBG$ são inscritos na mesma circunferência, delimitando o mesmo arco \widehat{IG} .

Portanto
$$I\widehat{F}G = \frac{\widehat{IG}}{2} = I\widehat{B}G$$
.

Da mesma forma, os pontos A, F, I e H estão em uma mesma circunferência, cujo centro é ponto médio do segmento \overline{IA} . Os ângulos $\angle IFH$ e $\angle IAH$ são inscritos na mesma circunferência e delimitam o mesmo arco . Segue-se que $\widehat{IFH} = \frac{\widehat{IH}}{2} = \widehat{IAH}$.

Por outro lado, os triângulos retângulos ΔCBH e ΔCAG têm um ângulo agudo comum $\angle C$. Segue-se que $H\widehat{B}C = G\widehat{A}C$, que é o mesmo que dizer que $I\widehat{B}G = I\widehat{A}H$. Dos parágrafos acima concluímos que $I\widehat{F}G = I\widehat{F}H$.

Exercícios Propostos

1) Sejam r e s duas retas secantes que interceptam uma circunferência nos pontos A, B e P, Q respectivamente. Prove que r e s são paralelas se, e somente se, os arcos \widehat{AP} e \widehat{BQ} (ou \widehat{AQ} e \widehat{BP}) tiverem a mesma medida. Prove que, neste caso, $\Delta APB \equiv \Delta BQA$.

Sugestão: Trace as transversais \overline{AQ} e \overline{BP} e use os ângulos alternos internos e ângulos inscritos na circunferência.

2) (Método Aproximado da Trissecção de um Ângulo de Arquimedes): Na Figura abaixo CD = OA = OB = R, em que R é o raio da circunferência e D é a intersecção \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{OA} . Prove que $\widehat{AOB} = 3 \cdot \widehat{ADB}$.

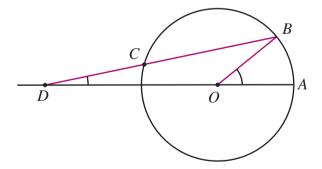


Figura 3.102 - $CD = OA = OB \Rightarrow A\widehat{O}B = 3 \cdot A\widehat{D}C$

Observação: O método de Arquimedes consiste em: dado um ângulo de vértice *O*, traça-se uma circunferência qualquer de centro

O que cruza os lados do ângulo em A e B respectivamente. Marcase então em uma régua, a partir de uma de suas extremidades (que será D) um ponto C tal que CD seja igual ao raio da circunferência traçada (isto não era permitido nas construções perfeitas dos gregos). Depois, com a régua sempre passando por B, "escorrega-se" esta, de modo que o ponto C fique sobre a circunferência e a extremidade D sobre a reta \overrightarrow{OA} .

Quando isto ocorrer (algo que é feito "a olho"), então teremos o ângulo $\angle ADC$ com medida igual a $\frac{1}{3}$ da medida do ângulo $\angle AOB$.

- 3) Construir com régua e compasso um triângulo $\triangle ABC$ sendo dados o lado \overline{AB} , o ângulo $\angle C$ e o ângulo $\angle A$.
- 4) Provar que, entre todos os triângulos inscritos em uma circunferência dada, aquele que tem perímetro máximo é o triângulo equilátero.

Sugestão: Considere que existe um triângulo de perímetro máximo e use o exercício resolvido 3 desta seção.

5) Provar que um triângulo é acutângulo se, e somente se, o seu circuncentro está no interior deste triângulo.

3.6 Conclusão

Como foi dito no início, neste capítulo apresentamos uma grande quantidade de resultados, permitindo-nos ampliar o nosso conhecimento sobre triângulos, suas propriedades e diversas conseqüências (algumas ainda por vir nos próximos capítulos), propiciando ainda resolver diversos problemas de construções geométricas com régua e compasso. O coração do capítulo é o estudo da congruência de triângulos. No entanto, os resultados apresentados são, em sua maioria, de ordem **qualitativa**, não permitindo praticamente **calcular** nenhuma medida (como se pôde ver nos exercícios). Por exemplo, não sabemos ainda calcular o comprimento de nenhum segmento no triângulo eqüilátero (ape-

nas conhecemos seus ângulos), o mais simétrico entre todos os triângulos. Muito menos sabemos calcular neste momento os comprimentos de alturas, medianas ou bissetrizes para triângulos quaisquer.

No próximo capítulo, ao estudarmos os quadriláteros, veremos mais algumas consequências do que foi aqui apresentado. Somente nos capítulos posteriores é que teremos resultados de ordem quantitativa. Em que direções deveremos olhar para obter resultados deste tipo? Que aspectos da geometria deverão ser abordados? Há dois essenciais. Um deles será o estudo quantitativo do "preenchimento" das figuras, ou seja, o estudo de áreas, que desenvolveremos no capítulo 5. O outro foi sugerido no teorema 3.5 deste capítulo: se, pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo, a paralela a qualquer um dos outros dois interceptar o terceiro em seu ponto médio, então será verdade que, se por um ponto que divide um dos lados de um triângulo em uma determinada razão tirarmos uma paralela a um dos outros dois lados, esta interceptará o terceiro lado, dividindo-o em dois segmentos naquela mesma razão? Este estudo de proporções de figuras geométricas será o objeto do capítulo sobre **semelhanças** dessas figuras. Um importante resultado relacionando as medidas dos lados de um triângulo, no caso de um triângulo específico, será consequência do estudo de congruência e do estudo de áreas (ou ainda, do estudo de semelhanças). Que tipo de triângulo será esse? Temos aqui já alguns elementos que nos permitem conjecturar a resposta. Observe que um ângulo agudo, sujeito a uma pequena "perturbação" (uma pequena mudança em seu valor, para mais ou para menos) permanece um ângulo agudo. O mesmo ocorre com um ângulo obtuso. O único tipo de ângulo que é "estruturalmente instável" é o ângulo reto: uma pequena perturbação pode levá-lo a um ângulo agudo ou a um ângulo obtuso. Do ponto de vista de um triângulo, variá-lo (por exemplo, mantendo as medidas de dois lados e variando o ângulo entre eles) de acutângulo para obtusângulo corresponde a deslocar o circuncentro do seu interior para o exterior, passando por um de seus lados no caso do triângulo retângulo. Isto pode nos sugerir que o tipo de triângulo procurado seja o triângulo retângulo. De fato, um resultado particular sobre este triângulo (uma das mais fundamentais relações em geometria) já era conhecido muito antes dos gregos

desenvolverem o método dedutivo na geometria (possivelmente desde 2000 a.C.): o teorema de Pitágoras, que será visto no final do capítulo 5.

Para finalizar, queremos fazer aqui algumas observações sobre dois tipos de exercícios que surgiram neste capítulo. Um deles, já comentado no início do capítulo, trata de construções com régua e compasso. Este é um tipo de "problema inverso" em geometria. Normalmente, os problemas em geometria apresentam um objeto geométrico, uma figura, e pedem que se estabeleçam relações entre seus elementos, ou que se calculem as medidas desses elementos. No problema de construção ocorre o oposto: são dados alguns elementos de um determinado objeto e pede-se para reconstruí-lo. Isto é feito a partir de uma análise do objeto, supondo-o já construído, para se obterem, assim, as "pistas" que permitam, passo a passo, chegar de fato ao objeto. Insistimos aqui que os aspectos técnicos de operação das ferramentas necessárias para realizar essas construções, ou seja, da utilização do compasso e da régua, e mesmo da precisão dessas ferramentas, são aqui para nós irrelevantes.

O que interessa é o conhecimento da geometria, mesmo porque, como já dissemos no início, softwares de geometria dinâmica tais como o "Cabri Géomètre II", são excelentes para se poder efetuar aquelas construções. Outro tipo de exercício de que tratamos aqui foi o de problemas de extremos: máximos e mínimos em geometria. Tais problemas, de caráter essencialmente quantitativo, surpreendentemente possuem elegantes soluções puramente geométricas (não analíticas), muitas delas sendo do tipo construtivo. Com um pouco mais de elementos de geometria quantitativa poderemos calcular medidas e posições relativas de soluções desses problemas. Exemplo disso são os problemas de Heron e de Regiomontanus: com semelhança de figuras e o teorema de Pitágoras poderemos calcular as posições dos pontos que são soluções desses problemas discutidos no capítulo. O Cálculo Diferencial é a ferramenta poderosa e apropriada para tratar tais problemas, porém soluções geométricas algumas vezes são mais diretas e simples.

Exercícios Propostos

I) Exercícios Gerais

- Provar que, se um triângulo tiver duas alturas congruentes, então ele é isósceles. Provar que, se um triângulo tiver duas medianas congruentes, então ele é isósceles.
- 2) Sejam r e s duas retas paralelas e seja t uma transversal que intercepta r e s nos pontos A e B respectivamente. Seja M o ponto médio de \overline{AB} . Prove que M também é ponto médio do segmento com extremidades em r e s determinado por qualquer outra transversal que passa por M.
- 3) Sejam r e s duas retas não paralelas e seja t uma transversal que intercepta r e s nos pontos A e B respectivamente. Considere as bissetrizes dos quatro ângulos internos (aqueles que possuem um lado contendo o segmento \overline{AB}). Mostre que os dois pontos de intersecção destas bissetrizes estão na bissetriz do ângulo formado pelas retas r e s.

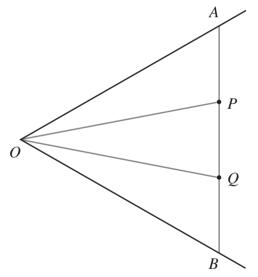


Figura 3.103 - $\widehat{AOP} = \widehat{BOQ}$

- 4) Um método para achar a bissetriz de um ângulo, baseado nas propriedades dos triângulos isósceles é o seguinte: sejam A e B pontos nos lados de um ângulo de vértice O tais que OA = OB, e seja M o ponto médio de \overline{AB} . Então \overline{OM} é bissetriz de $\angle AOB$. Explique porque um método análogo, dividindo-se o segmento \overline{AB} em três partes iguais (veja como dividir um segmento em n partes iguais no capítulo 7) não funciona. Veja a figura 3.103, onde AP = PQ = QB, e explique porque $A\widehat{OP} = B\widehat{OQ}$ mas $P\widehat{OQ}$ é maior do que a medida daqueles ângulos.
- 5) Sejam \overline{AB} e \overline{AC} dois segmentos com extremidade comum A e com comprimentos fixados. Considere todos os triângulos $\triangle ABC$, variando-se o ângulo $\angle BAC$. Mostre que medida do segmento \overline{BC} cresce conforme $B\widehat{AC}$ cresce. Em outras palavras, se $\angle BAC$ for agudo, então \overline{BC} é menor do que a hipotenusa do triângulo quando ele for retângulo em A, e se $\angle BAC$ for obtuso, então \overline{BC} é maior do que aquela hipotenusa. Entre que valores pode variar BC? E $(BC)^2$?

- 6) Considere o arco capaz de um ângulo agudo α em relação a um segmento \overline{AB} . Provar que o arco de circunferência que passa pelo centro O daquele arco capaz, pelo ponto médio M de \overline{AB} e por B, é o arco capaz de α em relação a \overline{MB} . Conclua daí que o segmento \overline{BC} , com C no arco capaz em relação a \overline{AB} , cruza o arco capaz em relação a \overline{MB} em seu ponto médio (em outras palavras, conforme C descreve o arco capaz em relação a \overline{AB} , o ponto médio de \overline{BC} descreve o arco capaz em relação a \overline{MB}). Prove que isto ainda é válido se $\alpha \ge 90^\circ$.
- 7) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com $\widehat{A} = 90^{\circ}$ e $\widehat{B} = 60^{\circ}$. Prove que a medida de cateto \overline{AB} é igual à metade da medida da hipotenusa \overline{BC} .

II) Problemas de Extremos

8) Qual é o triângulo retângulo inscrito em uma circunferência dada, cuja soma da altura relativa à hipotenusa com um dos catetos é máxima?

Sugestão: Este problema é uma aplicação do exercício proposto 4 da seção 3.5.8 – considere o triângulo retângulo simétrico ao triângulo dado em relação à hipotenusa.

9) São dados um ponto A e uma circunferência de um mesmo lado de uma reta r. Achar um ponto P em r e um ponto Q na circunferência tal que AP + PQ é **mínima**.

Sugestão: este problema é uma variação do problema de Heron (exercício 1 da seção 3.5.6).

Observação: Este problema deve ser resolvido por construção.

- 10) Provar que, dentre todos os triângulos retângulos cuja soma dos catetos é uma constante dada, aquele que tem hipotenusa **mínima** é o triângulo isósceles.
- 11) Achar o ponto do arco de circunferência da figura abaixo tal que a soma de suas distâncias às semi-retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} seja **máxima**.

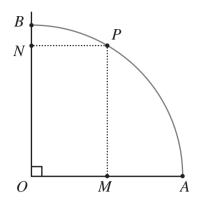


Figura 3.104 - Quando PM + PN é máxima?

12) Provar que, dentre todos os triângulos retângulos com perímetro fixado dado, aquele que tem a hipotenusa **mínima** é o triângulo isósceles.

Sugestão: use o problema resolvido 2 da seção 3.5.7.

III) Problemas de Construção com Régua e Compasso ou Aplicados

13) **(Problema da Navegação Costeira)**: Um navio navega perto da costa de um país na qual podem ser avistados dois faróis *A* e *B*. O navegador possui uma carta náutica (mapa) detalhada da região, onde aparecem identificados os faróis na costa e onde está indicada a direção norte – sul (ver figura 3.105). Sabendo-se que a proa do navio aponta na direção 30°W (oeste) e que os faróis *A* e *B* são avistados do navio respectivamente sob os ângulos de 45°W e 120°W com a proa, achar a posição deste navio no mapa.

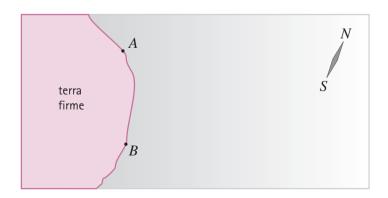


Figura 3.105 – Problema da navegação costeira

Observação: Na prática, em navegação, os ângulos eram marcados com transferidor e paralelas eram tomadas com esquadros (dizemos **eram** porque hoje em dia são usados aparelhos GPS para localização nos mapas).

- 14) Seja *P* um ponto de uma reta *r*. Construa ângulos de 60°, 45°, 30°, 15°, 75°, 90°, 120°, 135° e 105°, todos eles tendo *P* como vértice e um dos lados sobre *r*. Seja agora *Q* um ponto fora de *r*. Construa os mesmos ângulos acima tal que um dos lados esteja em *r* e o outro passe por *Q*.
- 15) Construa um triângulo isósceles sendo dados a base e a altura relativa a essa base.
- 16) Construa um triângulo $\triangle ABC$ sendo dados o lado \overline{AB} , o ângulo $\angle C$ e a mediana relativa ao lado \overline{BC} .

Sugestão: veja o exercício proposto 6 acima (página 164).

- 17) São dadas duas retas paralelas e um ponto entre elas. Traçar uma circunferência tangente às duas retas, passando pelo ponto.
- 18) São dados dois pontos A e B e uma reta r tais que \overline{AB} é paralelo a r. Traçar uma circunferência tangente a r, passando por A e B.

Resumo

Estudamos congruência de triângulos e todos os resultados sobre triângulos daí decorrentes, passando pelo estudo de tangência e de ângulos na circunferência. Abordamos também, pela primeira vez, problemas de construção geométrica com régua e compasso. Tais problemas estão espalhados ao longo de todo capítulo como aplicação do desenvolvimento do conteúdo. Iniciamos o capítulo com uma breve introdução a essas construções.

Bibliografia comentada

 DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar. 7. ed. São Paulo: Atual, 1997. v. 9.

É um livro básico e simples, contendo muitos resultados e exercícios.

2) COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

Uma referência elegante e de profundidade para muitos aspectos da matemática. Lá são comentados problemas de extremos e, em particular, a bela solução de Steiner (Jacob Steiner, 1836) do problema de Dido: dentre todas as curvas planas de perímetro fixado, aquela que delimita a maior área é a circunferência.

3) PASQUALI, K. C. Máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. 2004. 419 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

Uma referência sobre problemas de extremos em geometria com soluções exclusivamente geométricas. Encontra-se disponível no ambiente virtual da disciplina (www.ead.ufsc.br).

4) NIVEN, I. **Maxima and minima without calculus**. Dolclani Mathematical Expositions, n. 6, MAA, 1981.

Outra elegante referência a problemas de extremos. Não é mais editado.

5) WAGNER, E. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. (Coleção Professor de Matemática).

Excelente livro sobre construções geométricas onde é dada a devida importância à geometria. Está fora de edição no momento.

6) LOPES, L. **Manuel de construction de triangles**. Québec (Canadá): QED Texte, 1996.

Mais uma referência excelente sobre construções geométricas, dedicada exclusivamente a construções de triângulos. São 371 construções resolvidas.

Capítulo 4

Polígonos

Capítulo 4

Polígonos

O objetivo deste capítulo é o de estudar os quadriláteros e, em particular, os chamados quadriláteros especiais. Não é possível conceituar um quadrilátero da maneira como fizemos com um triângulo. Uma tentativa seria dizer que um quadrilátero é formado por quatro pontos não colineares três a três, mas aí não fica claro que segmentos devemos tomar para lados. Basicamente, o que se deseja é obter, como no caso do triângulo, uma figura que separe o plano em duas regiões. Apresentaremos, então, uma definição mais geral, a de polígono, que deverá satisfazer determinadas propriedades e da qual o quadrilátero é caso particular.

4.1 Linhas poligonais e polígonos

Definição 4.1. Uma poligonal é formada por um conjunto de pontos ordenados A_1, A_2, \ldots, A_n , e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são os seus lados (ou arestas).

Observação: Por pontos ordenados queremos dizer que fica preestabelecida a maneira de se formar os segmentos que são os lados da diagonal. Dois vértices de uma poligonal são ditos **consecutivos** se eles forem da forma A_k , A_{k+1} ou A_{k-1} , A_k , naquela ordenação.

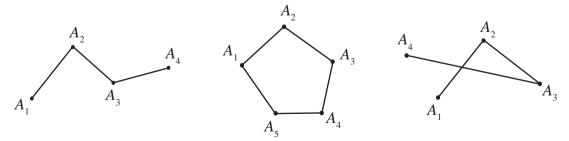


Figura 4.1 - Exemplos de poligonais

Definição 4.2. Um **polígono** de n lados é uma poligonal com vértices $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) todos os vértices são distintos, exceto por A_1 e A_{n+1} que são coincidentes;
- ii) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;
- iii) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

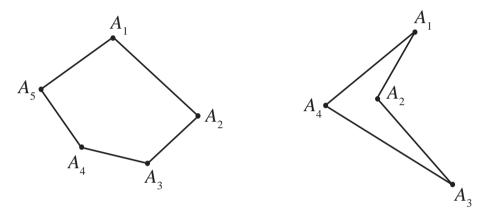


Figura 4.2 - Exemplos de polígonos

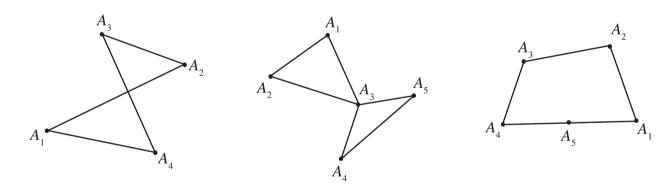


Figura 4.3 - Não são polígonos

Observações:

1) Os vértices da poligonal são os **vértices do polígono**. No caso, são *n* vértices distintos. Vértices que pertencem a um mesmo lado são ditos **consecutivos**. Os *n* lados da poligonal são os **lados do polígono**. Lados com vértices comuns são ditos **consecutivos**.

- 2) A condição (ii) da definição acima nos diz que os polígonos são simples, ou seja, não possuem auto-intersecções. Estamos excluindo com esta definição os chamados polígonos estrelados (como o desenho à esquerda da figura 4.3).
- 3) Na figura 4.3, o exemplo do meio é, na verdade, uma união de dois polígonos, e o exemplo à direita, a rigor, só não é um polígono pelo vértice A_5 . Se o retirarmos e renomearmos os vértices, então ele será um polígono.

Um triângulo satisfaz a definição de polígono e é um polígono de três lados (ou três vértices). Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados. Gostaríamos de falar em ângulos de um polígono, mais especificamente, em ângulos internos. Para isso, é necessário entender o que é o **interior** de um polígono. A definição de ponto interior, e, portanto, de interior de um polígono já não é tão simples como a que foi feita para triângulos. Por exemplo, no quadrilátero da direita na figura 4.2, a intersecção dos interiores dos ângulos $\angle A_2A_1A_4$ e $\angle A_1A_2A_3$ é vazia, de acordo com a nossa conceituação de ângulo.

Antes de qualquer coisa, é preciso perceber que, com a definição dada acima (e particularmente em função de (ii), um polígono divide o plano em duas regiões: uma limitada, ou seja, que fica contida no interior de algum círculo), e outra não limitada. Além disso, falando aqui intuitivamente, se pode dizer que a região limitada não tem "buracos"; isto equivale a dizer que a região limitada pode ser "encolhida" até um ponto sem que a poligonal saia dessa região.

Observe que a nossa definição diz que um polígono é o conjunto formado pelos lados com os respectivos vértices, mas muitas vezes a palavra polígono será utilizada para designar a poligonal "fechada" juntamente com seu interior (por exemplo, quando falarmos de área de um polígono). Às vezes, o termo "região poligonal" é utilizado para designar polígono e seu interior.

Um critério interessante para se saber se um ponto está no interior ou não (no exterior) de um polígono é o seguinte: um ponto é interior a um polígono se, e somente se, qualquer semi-reta, com

origem neste ponto, que não passe por nenhum dos vértices interceptar a poligonal um número ímpar de vezes; um ponto é exterior se, e somente se, qualquer semi-reta, com origem neste ponto, que não passe por nenhum dos vértices interceptar a poligonal um número par de vezes (que pode ser zero).

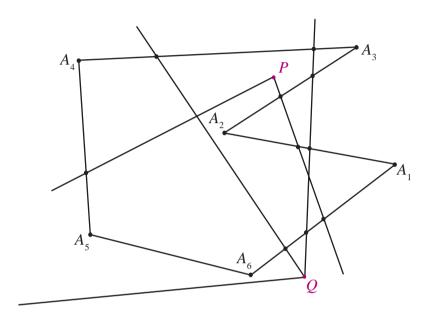


Figura 4.4 - P ponto interior; Q ponto exterior

Observação: Os resultados citados acima estão fundamentados com rigor em uma área da matemática denominada Topologia. A região que pode ser "encolhida" até um ponto sem que a poligonal saia dela (no caso, o interior do polígono) é chamado de "simplesmente conexa", e o **Teorema da Curva de Jordan** diz: "Toda curva simples (isto é, sem auto-intersecções) fechada (como no caso de um polígono, em que $A_{n+1} = A_1$) no plano divide este em duas regiões, uma delas limitada e simplesmente conexa" (o termo curva aqui é bem amplo e inclui poligonais).

Com o conceito de interior de um polígono podemos agora caracterizar dois tipos destes objetos geométricos. Observe novamente a figura 4.2. Os dois polígonos lá representados apresentam uma diferença fundamental. Por exemplo, no polígono da direita, o segmento $\overline{A_1}\overline{A_3}$ não contém pontos interiores ao polígono. Temos então a seguinte definição:

Definição 4.3. Um polígono é dito convexo se para quaisquer dois pontos $P \in Q$ deste polígono, ou de seu interior, os pontos do segmento \overline{PQ} entre $P \in Q$ forem pontos interiores do polígono. Um polígono que não é convexo é dito **não convexo**.

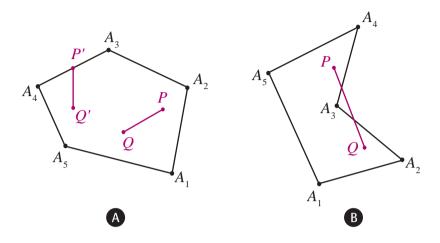


Figura 4.5 - (A) Convexo; (B) não convexo

Uma caracterização interessante é a seguinte: um polígono é convexo se, e somente se, ele estiver inteiramente contido em um único semiplano em relação à reta que contém qualquer um de seus lados.

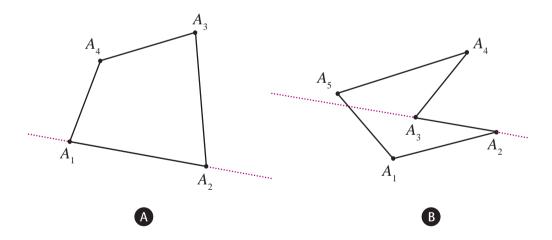


Figura 4.6 - (A) Convexo; (B) não convexo

4.2 Ângulos e diagonais de um polígono

Já citamos em 4.1 que um polígono de três lados é um triângulo e que um polígono de quatro lados é um **quadrilátero**. Os polígonos são designados segundo o número de lados (ou vértices). Um **pentágono** tem cinco lados e seguem-se: **hexágono** (6), **heptágono** (7), **octógono** (8), **nonágono** (ou eneágono) (9), **decágono** (10), **undecágono** (ou hendecágono) (11), **dodecágono** (12), **heptadecágono** (17), **icoságono** (20), etc. Uma curiosidade a respeito desta nomenclatura: o triângulo é assim designado porque apresenta três ângulos (formados pelos três vértices); o quadrilátero usa o sufixo "látero" (do latim) e significa que tem quatro lados; daí em diante usa-se o sufixo "gono" que em grego significa ângulo. Assim, pentágono é o polígono de cinco (*penta*, em grego) ângulos etc. Portanto, somente o triângulo e o quadrilátero têm uma denominação diferenciada.

Vejamos agora o que devemos entender por ângulo interno de um polígono. Três vértices consecutivos quaisquer A_{k-1} , A_k e A_{k+1} (se k=n, A_{n-1} , A_n e A_1 , ou se k-1=n, A_n , A_1 , A_2) definem um ângulo (na nossa conceituação inicial, ou seja, com medida menor do que 180°) com vértice A_k e lados $\overline{A_k}\overline{A_{k-1}}$ e $\overline{A_k}\overline{A_{k+1}}$. Se existir um segmento \overline{PQ} , com P no lado $\overline{A_k}\overline{A_{k-1}}$ e Q no lado $\overline{A_k}\overline{A_{k+1}}$, tal que todo ponto deste segmento entre P e Q estiver no interior do polígono, então o ângulo $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$ é um ângulo interno do polígono, e sua medida é menor do que 180° .

Se para todo segmento PQ, como dito acima, existir algum ponto entre P e Q no exterior do polígono, então o ângulo interno com vértice A_k é o "outro" com medida igual a $360^{\circ} - A_{k-1} \widehat{A_k} A_{k+1}$. Em outras palavras, um ângulo interno de um polígono deve estar "virado para dentro" do polígono. Na figura a seguir os ângulos internos estão marcados.

Segue-se, da definição de Polígono Convexo, que neste tipo de polígono todos os ângulos internos têm medida menor do que 180°. Vale a recíproca: se todos os ângulos internos de um polígono tiverem medida menor do que 180° então este polígono é convexo

(como se prova isto?). Isto quer dizer que um polígono não convexo possui (pelo menos) um ângulo interno com medida maior do que 180°.

Observação: A extensão do conceito de ângulo, em termos de medida, já feita na seção 3.5.8, é novamente aqui utilizada para satisfazer um resultado sobre soma de ângulos internos de um polígono, a ser vista um pouco mais adiante.

Podem os ângulos internos ser todos congruentes? Os lados de um polígono podem ser congruentes? Note que o triângulo eqüilátero tem os três lados congruentes e os três ângulos internos congruentes com medida igual a 60°.

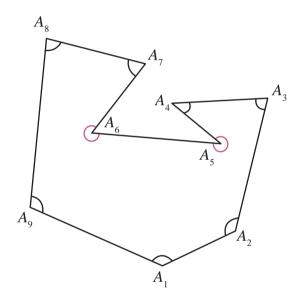


Figura 4.7 - $\angle A_4 A_5 A_6$ e $\angle A_5 A_6 A_7$ têm medidas maiores do que 180°

Definição 4.4. Um polígono é dito **regular** se ele for equilátero (lados congruentes) e equiângulo (ângulos congruentes).

Segue-se, desta definição e do fato que todo polígono possui pelo menos um ângulo interno menor do que 180°, que os polígonos regulares são convexos.

O triângulo regular é o triângulo eqüilátero. Algumas propriedades dos polígonos regulares serão deixadas para os exercícios já que, essencialmente, elas são decorrentes de congruência de triângulos. Deixamos, por enquanto, aqui a pergunta: existem polígonos equiláteros que não são equilângulos? E polígonos equilângulos que não são equiláteros? A resposta será dada no estudo dos quadriláteros na próxima seção.

Já vimos que os segmentos que unem vértices consecutivos de um polígono são chamados lados do polígono. E os outros segmentos possíveis?

Definição 4.5. Uma **diagonal** de um polígono é qualquer segmento que une vértices não consecutivos deste polígono.

Uma diagonal de um polígono pode estar, excetuando-se suas extremidades, no interior, no exterior ou parte no interior e parte no exterior do polígono. Ela pode ainda conter um lado do polígono. Todas as diagonais de um polígono estão no seu interior (exceto os vértices) se, e somente se, ele for convexo.

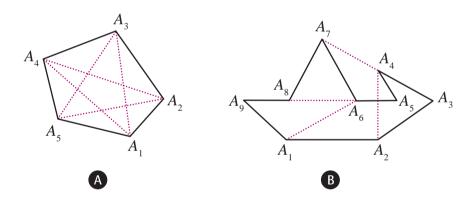


Figura 4.8 - Diagonais de um polígono: (A) convexo; (B) não convexo (algumas)

Note na figura 4.8(b) que A_4A_7 está no exterior, A_1A_6 no interior, $\overline{A_2A_4}$ parte no interior e parte no exterior e $\overline{A_6A_9}$ contém o lado A_8A_9 .

Quantas diagonais possui um polígono de *n* lados? Um triângulo não possui diagonais e um quadrilátero só tem duas (cada vértice é consecutivo a dois outros e, portanto, ele é extremidade de uma diagonal; quatro vértices nos dão quatro diagonais, cada uma contada duas vezes; portanto são apenas duas diagonais). O número total de diagonais depende de *n* e o seu cálculo é um mero exercício de contagem sistemática ou de combinatória. Como cada vér-

tice é consecutivo a dois outros, então daquele vértice saem n-3 diagonais. A figura a seguir ilustra isso no caso de um polígono convexo.

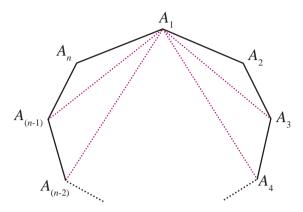


Figura 4.9 – Do vértice A_1 de um polígono de n lados partem as diagonais $\overline{A_1}$ $\overline{A_3}$, $\overline{A_1}$ $\overline{A_4}$,..., $\overline{A_1}$ $\overline{A_{n-2}}$ e $\overline{A_1}$ $\overline{A_{n-1}}$, ou seja, n-3 diagonais

Como são n vértices no polígono então teremos n(n-3) diagonais mas, como cada uma delas está sendo contada duas vezes (por cada uma das suas extremidades) então o número total de diagonais do polígono de n lados é:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$
.

Observe que n(n-3) é um número par para todo n inteiro (se n for ímpar então n-3 é par) e, portanto, a expressão acima nos dá um número inteiro. O número de diagonais ultrapassa o número de lados do polígono a partir de n=6 (exercício 2 proposto nesta seção) e nunca ultrapassa $\frac{n^2}{2}$.

O número de diagonais de um polígono não nos diz muito sobre sua estrutura. Muito mais importante e interessante é observar que, em um polígono convexo de n lados, ao se traçar as n-3 diagonais partindo de um de seus vértices, dividimos o polígono em n-2 triângulos (veja a figura 4.9 novamente): $\Delta A_1 A_3 A_2$, $\Delta A_1 A_4 A_3$,..., $\Delta A_1 A_n A_{n-1}$. A soma dos ângulos desses triângulos nos dá a soma dos ângulos internos do polígono, ou seja:

$$180^{\circ}(n-2)$$
.

Pode-se provar (mas não o faremos aqui) que qualquer polígono de n lados, convexo ou não, pode ser subdividido por diagonais apropriadas em exatamente n-2 triângulos (veja as referências) adjacentes ou justapostos, ou seja, triângulos que têm como lado comum alguma diagonal do polígono. O número destas diagonais é sempre n-3.

Se o polígono for equiângulo (ou, em particular, regular) então cada ângulo interno deste polígono será igual a:

$$\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$$
.

Isto é interessante porque nos permite constatar analiticamente que o ângulo interno de um polígono eqüiângulo é maior ou igual a 60° e menor do que 180°. Mais interessante ainda, o valor do ângulo interno de um polígono regular nos mostra quais são, dentre este polígonos, aqueles que podem ser "colados" em torno de um ponto ocupando inteiramente uma região do plano (veja exercício resolvido abaixo).

Observação: O cálculo do ângulo interno de um polígono regular de 6 lados nos dá um valor de 120° (verifique). Experimentos mostraram que a molécula do benzeno (C_6H_6) é plana no sentido que os átomos de carbono (seus centros) são coplanares. Tais átomos apresentam um ângulo de 120° entre si, o que confirma a teoria dos orbitais hibridizados para o átomo de carbono em moléculas de substâncias orgânicas (no caso o benzeno, na hibridização sp^2 , formando uma estrutura hexagonal regular) de Linus Pauling.

Um último comentário sobre polígonos em geral: alguns polígonos são **inscritíveis**, ou seja, podem ser inscritos em uma circunferência (e isto significa que todos os seus vértices estão na mesma circunferência), e outros são **circunscritíveis**, ou seja, podem ser circunscritos a uma mesma circunferência (e isto significa que todos os seus lados são tangentes à mesma circunferência).

É fácil verificar que existem tais polígonos e que, ao contrário dos triângulos, nem todos os polígonos são inscritíveis ou circunscritíveis (veja a próxima seção). No entanto, os polígonos regulares apresentam estas características (veja exercícios ao final do capítulo).

Linus Carl Pauling (1901 - 1994), foi a segunda personalidade a ter conquistado dois prêmios Nobel. Ganhou o prêmio de Química em 1954, "por sua pesquisa sobre a natureza da ligação química e sua aplicação à elucidação da estrutura das substâncias complexas". O outro foi o da Paz em 1962, por tentar proibir o uso de armas nucleares. Quando ganhou o prêmio de Química, era pesquisador no Instituto de Tecnologia da Califórnia, em Pasadena. Propôs o Diagrama de Pauling, sobre as subcamadas de elétrons no átomo.

Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Exercícios Resolvidos

1) (Soma dos ângulos externos de um polígono): Um ângulo externo de um polígono no vértice A_k é o ângulo obtido pelo prolongamento do lado $\overline{A_{k-1}A_k}$ com o lado $\overline{A_kA_{k+1}}$ do polígono. Mais exatamente, é o ângulo cujos lados são $\overline{A_kA_{k+1}}$ e a semi-reta oposta a $\overline{A_kA_{k-1}}$. Isto ocorre tanto no caso de polígonos convexos como de não convexos. A figura abaixo mostra ângulos externos nas duas situações:

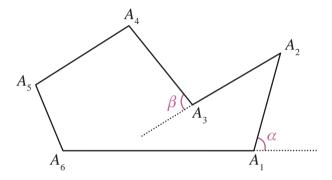


Figura 4.10 - α é ângulo externo no vértice A_1 e β é ângulo externo no vértice A_3

Se um ângulo interno γ for menor do que 180° então o externo correspondente é o seu suplemento com medida positiva $180^{\circ} - \gamma$. Se um ângulo interno γ for maior do que 180° então, mantendo este mesmo critério, o externo correspondente terá **medida negativa** $180^{\circ} - \gamma$.

Conforme introdução acima, vamos provar que a soma dos ângulos externos de qualquer polígono é igual a 360°.

Resolução: Sejam $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ os n ângulos internos de um polígono de n lados (alguns destes ângulos podem ter medida maior do que 180°). Então os ângulos externos correspondente terão medida $180^{\circ}-\alpha_i$, i=1,2,...,n (algumas destas medidas podem ser negativas). Somando estes n ângulos externos obtemos para soma S:

$$S = (180^{\circ} - \alpha_1) + (180^{\circ} - \alpha_2) + \dots + (180^{\circ} - \alpha_n) =$$

$$= 180^{\circ} \cdot n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = 180^{\circ} \cdot n - 180^{\circ} \cdot (n-2) = 360^{\circ}.$$

2) Quais são os polígonos regulares que podem ser "colados" em torno de um ponto, e, assim sucessivamente, de modo a ocupar totalmente uma região do plano?

Resolução: O problema, na verdade, se resume em achar quais polígonos regulares possuem ângulos internos cujos múltiplos interios são iguais a 360°, ou seja, quando:

$$k \cdot \frac{180(n-2)}{n} = 360$$
, para k inteiro.

Mas isto será verdade se, e somente se,

$$k \cdot 180(n-2) = 360n$$
, ou $k(n-2) = 2n$, ou $k = \frac{2n}{n-2}$.

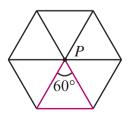
Observe que, por tentativas, k é inteiro para n=3(k=6) e para n=4(k=4). Para n=5 não teremos k inteiro. Para n=6 teremos k=3. Observe agora que k decresce quando n cresce, pois:

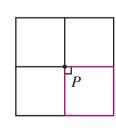
$$\frac{2(n+1)}{(n+1)-2} < \frac{2n}{n-2} \Leftrightarrow 2(n+1)(n-2) < 2n(n-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 < n^2 - n \Leftrightarrow -2 < 0$$

Assim, partindo da desigualdade (verdadeira) -2 < 0, podemos obter a desigualdade inicial. Por outro lado, k > 2, pois:

$$\frac{2n}{n-2} > 2 \Leftrightarrow 2n > 2n-2 \Leftrightarrow 0 > -2$$

Logo, como k=3 para n=6, para qualquer n>6 o número k não será mais inteiro. Assim, temos apenas três polígonos regulares que permitem "ladrilhar" o plano: o triângulo eqüilátero, o quadrado (ver próxima seção) e o hexágono regular.





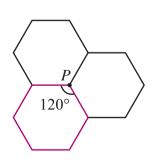


Figura 4.11 – Ladrilhamento em torno do ponto P

O símbolo \Leftrightarrow significa "se, e somente se", e indica um caminho de "duas vias", ou seja, é correto "voltar" nas implicações).

Observação: Problemas de ladrilhamento podem ser resolvidos com polígonos de lados distintos em conjunto e são complexos. Em termos de economia de linhas usadas, ou seja, de perímetros traçados, com relação a uma mesma área dada, pode-se provar que o hexágono é o melhor deles (Em três dimensões, passando a volumes de prismas, isso é "sabido" pelas abelhas na construção de seus favos). Problemas duais a estes, ou seja, achar figuras de área máxima com perímetro dado, são denominados problemas isoperimétricos. No capítulo 5, que trata de áreas, proporemos alguns deles.

Exercícios Propostos

- 1) Prove que $60^{\circ} \le \frac{180^{\circ} (n-2)}{n} < 180^{\circ}$, onde $n \notin 0$ número de lados de um polígono.
- 2) Prove que o número de diagonais de um polígono ultrapassa o número de lados do mesmo polígono a partir de n = 6. Prove que o número é o mesmo se n = 5.
- 3) Prove que se *n* é primo distinto de 3, então o número de diagonais de um polígono não pode ser múltiplo de 3.
- 4) Prove que o número de diagonais de um polígono é uma potência de 2 se, e somente se, n = 4.

4.3 Quadriláteros

Estudaremos nesta seção os quadriláteros (os polígonos de quatro lados) e, em especial os quadriláteros convexos. Dentre estes, alguns apresentam propriedades especiais e os chamaremos de **quadriláteros especiais**.

Denotaremos um quadrilátero com vértices ordenados A, B, C e D simplesmente por ABCD. Os vértices A e C e os vértices B e D são ditos opostos. Correspondentemente, são ditos **opostos** os ângulos $\angle A$ e $\angle C$ e os ângulos $\angle B$ e $\angle D$. Também são ditos opostos os lados \overline{AB} e \overline{CD} e os lados \overline{BC} e \overline{AD} .

4.3.1 Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis

Nem todos os quadriláteros são inscritíveis ou circunscritíveis. Existe uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível ou para que seja circunscritível? A resposta, em cada caso, é sim.

Teorema 4.1. Um quadrilátero é inscritível em uma circunferência se, e somente se, os seus ângulos opostos forem suplementares.

Demonstração:

1) Vamos primeiro provar que se *ABCD* é um quadrilátero inscritível em uma circunferência, então seus ângulos opostos são suplementares. Suponha que *ABCD* seja um quadrilátero inscritível (observe a figura 4.12) em uma circunferência.

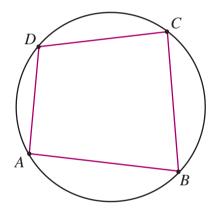


Figura 4.12 - ABCD está inscrito na circunferência

Então
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} e \ \widehat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}$$
.

Logo,
$$\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}.$$

Analogamente, prova-se que $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^{\circ}$.

2) Vamos, agora, provar que se os ângulos opostos de um quadrilátero ABCD são suplementares, então ele é inscritível em alguma circunferência. Suponha que $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$. A circunferência "candidata" é, por exemplo, a circunferência que passa por A, B e D. Vamos provar então que C está nesta circunferência. Suponha, por absurdo, que C não esteja na circunferência. Então C é interior ou é exterior a ela. Suponha C um ponto interior àquela circunferência. Confira a figura a seguir:

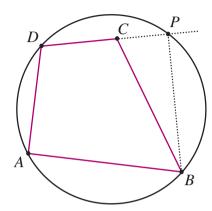


Figura 4.13 – ABCD com C interior

Então, prolongando-se o lado \overline{DC} este encontra a circunferência no ponto P. O quadrilátero ABPD é inscritível e, pela primeira parte (já demonstrada) deste teorema, temos que:

$$\widehat{A} + \widehat{P} = 180^{\circ}$$
.

Mas o ângulo $\angle C$ ($\angle BCD$) é externo em relação ao ângulo $\angle BCP$ do triângulo $\triangle BCP$. Segue-se que:

$$B\widehat{C}D > \widehat{P}$$
 ou $\widehat{C} > \widehat{P}$.

Por outro lado temos, $\widehat{A}+\widehat{C}=180^{\rm o}=\widehat{A}+\widehat{P}$, o que nos dá $\widehat{C}=\widehat{P}$, o que é uma contradição. Se C é exterior à circunferência chegamos, de forma análoga, a uma contradição. Portanto o teorema está provado.

Teorema 4.2. Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

Demonstração: Vamos primeiro provar que se um quadrilátero é circunscritível, então as somas das medidas dos lados opostos são iguais. Suponha que *ABCD* seja um quadrilátero circunscritível.

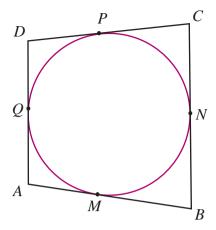


Figura 4.14 – ABCD está circunscrito à circunferência.

Sejam M, N, P e Q respectivamente os pontos de tangência da circunferência inscrita no quadrilátero com os lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} . Então, pelos resultados de tangência, temos:

$$AM = AQ$$

$$BM = BN$$

$$CP = CN$$

$$DP = DQ$$

Somando as igualdades obtemos:

$$(AM + BM) + (CP + DP) = (BN + CN) + (AQ + DQ)$$
, ou:

$$AB + CD = BC + AD$$
.

Vamos provar agora que se a soma das medidas dos lados opostos de um quadrilátero são iguais, então ele é circunscritível. Suponha que ABCD seja um quadrilátero tal que AB+CD=BC+AD. Vamos provar que ele é circunscritível. Uma "candidata" para circunferência inscrita é a circunferência tangente aos três lados \overline{AB} , \overline{AD} e \overline{BC} do quadrilátero. O centro desta circunferência é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ (por que elas se cruzam?). Vamos provar que o quarto lado, \overline{CD} , também é tangente àquela circunferência. Suponha, por absurdo, que isto não ocorra. Então \overline{CD} é exterior à circunferência, ou \overline{CD} cruza a circunferência em dois pontos.

Suponha que \overline{CD} não intercepte a circunferência. Seja então E um ponto de \overline{AD} tal que \overline{CE} seja tangente à circunferência no ponto P. Note que E está entre A e D e, portanto, AE + ED = AD.

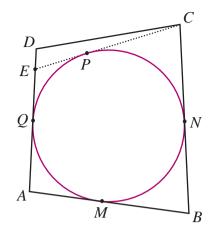


Figura 4.15 – ABCD com \overline{CD} não tangente.

Então, pelo que foi demonstrado na primeira parte do teorema, temos:

$$BC + AE = AB + CE$$
.

Somando ED aos dois lados obtemos

$$BC + AE + ED = AB + CE + ED$$
, ou:

$$BC + AD = AB + CE + ED > AB + CD$$

(pela desigualdade triangular no ΔCED : CD < CE + ED).

Mas então chegamos a uma contradição com a hipótese. O caso em que \overline{CD} intercepta a circunferência em dois pontos prova-se de forma análoga.

Observação: Para garantir que os pontos Q e N estejam entre A e D, e entre B e C, respectivamente, devemos escolher \overline{AB} como o menor lado de ABCD.

4.3.2 Quadriláteros especiais

Vamos tratar aqui de alguns quadriláteros com características especiais (paralelismo entre lados, congruência de lados, congruência de ângulos). Estas características determinarão classes (ou subconjuntos) de quadriláteros, algumas contendo outras. Daremos, no entanto, as definições de cada um de forma independente (por exemplo, não definiremos losango como um paralelogramo eqüilátero) e obteremos as propriedades que determinarão se uma classe de quadriláteros está ou não contida em outra. Lembramos que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a 360°.

Definição 4.6. Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

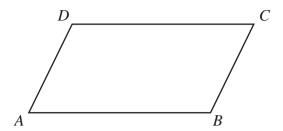


Figura 4.16 - Paralelogramo: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Da definição acima obtemos as seguintes equivalências que permitem caracterizar um paralelogramo:

Teorema 4.3. Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos forem congruentes.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo com $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{BC}//\overline{AD}$. Tracemos uma das diagonais, por exemplo, \overline{AC} e consideremos os triângulos ΔABC e ΔCDA .

Então \overline{AC} é uma transversal às paralelas \overline{AB} e \overline{CD} e é transversal às paralelas \overline{BC} e \overline{AD} . Segue-se que $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (alternos internos) e, como \overline{AC} é um lado comum aos dois triângulos, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (caso ALA). Logo, AB = CD e BC = AD.

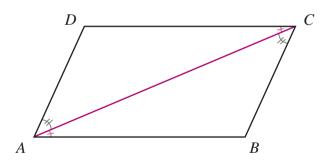


Figura 4.17 - $B\widehat{A}C = D\widehat{C}A$ e $A\widehat{C}B = C\widehat{A}D$

Suponha agora ABCD um quadrilátero tal que AB = CD e BC = AD. Neste caso, os triângulos ΔABC e ΔCDA são con-

gruentes (caso LLL). Segue-se que $B\widehat{A}C = D\widehat{C}A$ e, portanto, \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos, e que $A\widehat{C}B = C\widehat{A}D$ e, portanto, \overline{BC} e \overline{AD} são paralelos.

Teorema 4.4. Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se interceptam em seus pontos médios.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo com $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{BC} // \overline{AD}$. Seja P o ponto de intersecção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} .

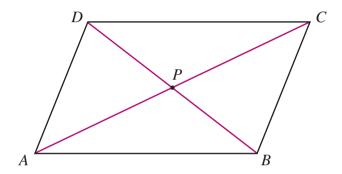


Figura 4.18 - $\triangle APB \equiv \triangle CPD$ e $\triangle BPC \equiv DPA$

Então, como AB = CD, $B\widehat{A}P = D\widehat{C}P$ e $A\widehat{B}P = C\widehat{D}P$, temos que $\Delta APB \equiv \Delta CPD$ (caso ALA). Logo, AP = CP e BP = DP.

Suponha agora que ABCD seja um quadrilátero em que suas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} se interceptam em um ponto P tal que AP=CP e BP=DP. Então, como $A\widehat{P}B=C\widehat{P}D$ (opostos pelo vértice) temos que $\Delta APB\equiv\Delta CPD$ (caso LAL) e, portanto, $B\widehat{A}P=D\widehat{C}P$, o que implica em $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$. Da mesma forma teremos que, como $B\widehat{P}C=D\widehat{P}A$ (opostos pelo vértice) que $\Delta BPC\equiv\Delta DPA$ (caso LAL), e daí $B\widehat{C}P=D\widehat{A}P$ e, portanto, $\overline{BC}/\!/\overline{AD}$. Logo, ABCD é um paralelogramo.

Teorema 4.5. Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, possui um par de lados paralelos e congruentes.

Demonstração: Se ABCD é um paralelogramo com \overline{AB} // \overline{CD} e \overline{BC} // \overline{AD} então, pelo teorema 4.3, ele possui um par de lados paralelos e congruentes (na verdade dois pares). Suponha que ABCD

seja um quadrilátero tal que $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$ e AB=CD . Seja P o ponto de intersecção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} .

Então $B\widehat{A}P=D\widehat{C}P$ e $A\widehat{B}P=C\widehat{D}P$ (alternos internos) e, como AB=CD, temos $\Delta ABP\equiv \Delta CDP$. Segue-se que AP=CP e BP=DP. Pelo teorema 4.4 o quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

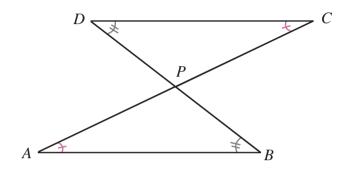


Figura 4.19 - $\overline{AB}//\overline{CD}$ e BC = AD

Observação: A condição suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo, enunciada neste teorema, é bastante útil para identificar um paralelogramo em uma figura (veja exercícios).

Teorema 4.6. Um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos são congruentes.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo com $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{BC}//\overline{AD}$. Sejam P e Q pontos nas semi-retas \overline{CD} e \overline{BC} respectivamente como na figura.

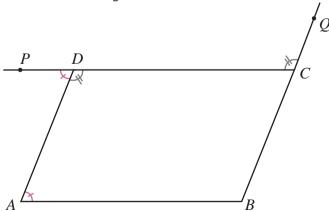


Figura 4.20 - $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{D} + \widehat{C}$

Então, do paralelismo dos lados, temos que $\widehat{A}=A\widehat{D}P$ e $A\widehat{D}C=D\widehat{C}Q$ (alternos internos). Mas $A\widehat{D}P+A\widehat{D}C=180^\circ$. Logo, $\widehat{A}+A\widehat{D}C=180^\circ$. Também, $B\widehat{C}D+D\widehat{C}Q=180^\circ$. Logo, $B\widehat{C}D+A\widehat{D}C=180^\circ$. Daí obtemos que $\widehat{A}=B\widehat{C}D$ ou $\widehat{A}=\widehat{C}$. Analogamente, prova-se que $\widehat{B}=\widehat{D}$.

Suponha agora que ABCD seja um quadrilátero tal que $\widehat{A}=\widehat{C}=\alpha$ e $\widehat{B}=\widehat{D}=\beta$. Como $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$, segue-se que $\alpha+\beta=180^\circ$, ou $\widehat{A}+\widehat{D}=180^\circ$ e $\widehat{C}+\widehat{D}=180^\circ$. Mas então $\angle A$ é congruente ao suplemento de $\angle D$ é congruente ao suplemento de $\angle C$. Segue do teorema 2.2 da seção 2.7, que $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$ e $\overline{BC}/\!/\overline{AD}$ (veja a figura 4.20 novamente). Logo, ABCD é um paralelogramo.

O teorema acima nos diz que dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares. Os paralelogramos podem ser inscritíveis ou circunscritíveis? Veremos a seguir.

Definição 4.7. Um **losango** é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes.

Teorema 4.7. Todo losango é um paralelogramo.

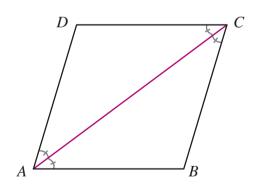


Figura 4.21 - AB = BC = CD = DAimplica em $\overline{AB}/\overline{CD}$ e $\overline{BC}/\overline{AD}$

Demonstração: Seja ABCD um losango, ou seja, AB = BC = CD = DA. Considere a diagonal \overline{AC} . Então $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (caso LLL). Segue-se que $B\widehat{AC} = D\widehat{C}A$ e $A\widehat{C}B = C\widehat{A}D$ (na verdade os quatro ângulos têm a mesma medida pois os triângulos são isósceles). Segue-se que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{BC}//\overline{AD}$ e, portanto, ABCD é um paralelogramo (figura).

Então o losango herda todas as propriedades de um paralelogramo: diagonais cruzando-se ao meio, ângulos opostos congruentes. Mas os losangos possuem outra característica que os difere de um paralelogramo qualquer.

Teorema 4.8. Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais forem perpendiculares.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo que é um losango. Então AB = BC = CD = DA e suas diagonais se interceptam em seus pontos médios. Seja P o ponto de intersecção destas diagonais.

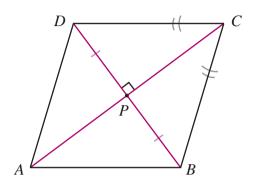


Figura 4.22 - $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Então $\Delta BPC \equiv \Delta DPC$ (caso LLL). Segue-se que $\widehat{CPB} = \widehat{CPD}$ e como $\widehat{CPB} + \widehat{CPD} = 180^{\rm o}$, temos $\widehat{CPB} = \widehat{CPD} = 90^{\rm o}$ e as diagonais são perpendiculares.

Seja agora ABCD um paralelogramo cujas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} são perpendiculares. Seja P o ponto de intersecção destas diagonais. Então AP = CP e BP = DP. Segue-se que os triângulos retângulos ΔCPB e ΔCPD são congruentes (catetos respectivamente congruentes). Logo, BC = CD. Mas ABCD é um paralelogramo e, portanto, AB = CD e BC = AD. Segue-se que AB = BC = CD = DA e, portanto, ABCD é um losango.

Note que todo losango é circunscritível (soma dos lados opostos iguais). Note, também, que se um losango não tiver todos os seus ângulos internos congruentes então ele nos fornece um primeiro exemplo de um polígono equilátero, mas não equiângulo (não regular).

Definição 4.8. Um **retângulo** é um quadrilátero cujos ângulos internos têm medida igual a 90°. Costuma-se denominar um dos lados de um retângulo de **base** e o outro adjacente a ele de **altura**.

Teorema 4.9. Todo retângulo é um paralelogramo.

Demonstração: Seja ABCD um retângulo. Então, como $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^{\circ}$, segue-se que \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos e \overline{BC} e \overline{AD} são paralelos. Logo, ABCD é um paralelogramo.

O retângulo também herda todas as propriedades do paralelogramo. Que outra propriedade ele possui que o faz diferir de um paralelogramo qualquer?

Teorema 4.10. Um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, suas diagonais forem congruentes.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo que é um retângulo. Então AB = CD e BC = AD. Além disso, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^{\circ}$.

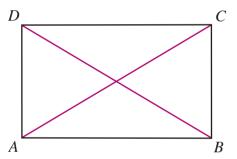


Figura 4.23 - AC = BC

Segue-se que os triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BAD$ são congruentes (catetos respectivamente congruentes). Logo, AC = BD.

Seja agora ABCD um paralelogramo cujas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} são congruentes. Então $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (caso LLL). Segue-se que $\widehat{A} = \widehat{B}$. Mas $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ (propriedade do paralelogramo). Logo, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ e, como $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$, temos que ABCD é um retângulo.

Note que todo retângulo é inscritível (ângulos opostos suplementares). Note também que se um retângulo não tiver todos os lados congruentes então ele nos fornece um primeiro exemplo de um polígono equiângulo, mas não equilátero (não regular).

Se losango e retângulo são ambos paralelogramos é de se perguntar se existe um losango que é um retângulo.

Definição 4.9. Um **quadrado** é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

Da definição depreende-se que um quadrado é um losango e é um retângulo, e, portanto, é um paralelogramo. Ele herda, portanto, todas as propriedades daqueles quadriláteros: suas diagonais são congruentes, perpendiculares e se interceptam ao meio. Além disso, todo quadrado é inscritível e circunscritível.

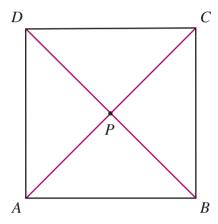


Figura 4.24 - Quadrado: $AC = BD, \overline{AC} \perp \overline{BD}, AP = CP \in BP = DP$

Um outro caso particular de quadrilátero que não está contido nem contém as classes anteriores é:

Definição 4.10. Um **trapézio** é um quadrilátero que possui um único par de lados paralelos.

A definição nos diz que o outro par de lados opostos de um trapézio não é dado por segmentos paralelos. Segue-se imediatamente da definição, e do teorema 4.5 deste capitulo, que os lados paralelos de um trapézio não são congruentes. Os lados paralelos do trapézio são chamados bases; o que tem maior medida é, comumente, chamado **base maior**, e o que tem menor medida é a **base menor**. A distância entre os lados paralelos é chamada **altu**ra do trapézio. Se um dos lados não paralelos for perpendicular aos lados paralelos, então, o trapézio é chamado **trapézio retângulo**. Se os dois lados não paralelos forem congruentes, então o trapézio é dito **trapézio isósceles**. Observe ainda que se \overline{AB} e \overline{CD} são as bases do trapézio e se A e D são vértices consecutivos, então $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ}$.

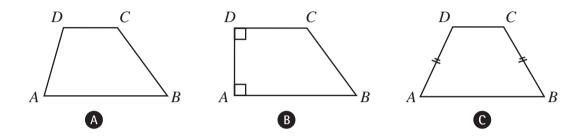


Figura 4.25 - Trapézios: (A) qualquer; (B) retângulo; (C) isósceles

Decorre ainda do teorema 4.4 que as diagonais de um trapézio não se interceptam em seus pontos médios. De acordo com o teorema, o ponto de intersecção das diagonais não é ponto médio de pelo menos uma das diagonais. Na verdade, este ponto não é ponto médio de ambas (exercício proposto nº 6, ao final deste capítulo).

O segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é chamado **base média**. A base média é paralela às bases e tem medida igual à semi-soma dessas bases (exercício resolvido nº 1 desta seção).

Teorema 4.11. Um trapézio é isósceles se, e somente se, os ângulos das bases forem congruentes.

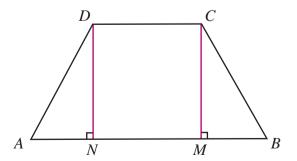


Figura 4.26 - Trapézio isóceles

Demonstração: Seja ABCD um trapézio isósceles com BC = AD. Seja \overline{AB} a base maior deste trapézio e sejam M e N os pés das perpendiculares por C e D, respectivamente, ao lado \overline{AB} .

Então, como \overline{AB} é paralelo a \overline{CD} , temos CM=DN. Segue-se que $\Delta ADN \equiv \Delta BCM$, pois AD=BC (caso hipotenusa-cateto de congruência de triângulos retângulos). Logo, $\widehat{A}=\widehat{B}$. Como $\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180^{\circ}$, concluímos que $\widehat{C}=\widehat{D}$.

Suponha agora que $\widehat{A}=\widehat{B}$. Então também $\Delta ADN\equiv \Delta BCM$, pois CM=DN (caso cateto-ângulo agudo de congruência de triângulos retângulos). Logo, AD=BC.

Observação: Em um trapézio isósceles os pés das perpendiculares traçadas dos vértices da base menor à base maior estão contidos nesta base (por quê?).

Finalmente, quanto a ser ou não inscritível um trapézio, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.12. Um trapézio é inscritível se, e somente se, ele for isósceles.

Demonstração: Se um trapézio é isósceles, decorre do teorema 4.11 que os ângulos opostos são suplementares e, portanto, ele é inscritível (teorema 4.1).

Suponha agora que ABCD seja inscritível. Então $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$ onde A e C são vértices opostos. Mas $\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$. Segue-se que $\widehat{A}=\widehat{B}$ e $\widehat{C}=\widehat{D}$ e, pelo teorema 4.11, o trapézio é isósceles.

Exercícios Resolvidos

1) Provar que a base média de um trapézio é paralela às bases e tem medida igual à semi-soma das medidas dessas bases.

Resolução: Seja \overline{ABCD} um trapézio com base maior \overline{AB} e base menor \overline{CD} . Seja \overline{MN} a sua base média, com M em \overline{AD} e N em \overline{BC} . Então AM = DM e BN = CN.

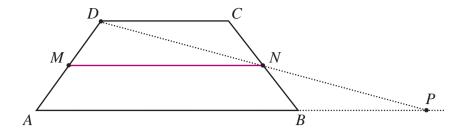


Figura 4.27 - $\Delta CND \equiv \Delta BNP$

Seja P o ponto de intersecção das retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{DN} (figura). Então, como $N\widehat{C}D=N\widehat{B}P$ (alternos internos), CN=BN e $C\widehat{N}D=B\widehat{N}P$ (opostos pelo vértice), temos que $\Delta CND\equiv \Delta BNP$ (caso ALA). Segue-se que BP=CD. Por outro lado, como M e N são respectivamente os pontos médios dos lados \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{PD} do triângulo ΔAPD , temos que \overrightarrow{MN} é paralelo a \overrightarrow{AP} (e, portanto, a

$$\overline{AB}$$
) e $MN = \frac{AP}{2} = \frac{AB + BP}{2} = \frac{AB + CD}{2}$.

 Provar que se um trapézio é circunscritível então a medida de sua base média é maior do que o diâmetro da circunferência inscrita.

Resolução: Seja \overline{ABCD} um trapézio circunscrito a uma circunferência e sejam \overline{AB} e \overline{CD} suas bases. Então a distância entre \overline{AB} e \overline{CD} é exatamente o diâmetro da circunferência (por quê?). Seja PQ este diâmetro. Veja a figura seguinte:

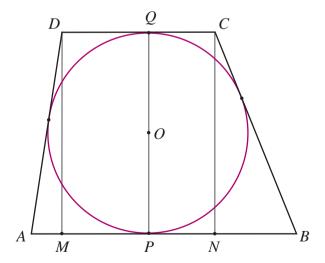


Figura 4.28 - $AD \ge DM$ e $BC \ge CN$

Sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares por D e C ao lado \overline{AB} . Então $AD \ge DM$ e $BC \ge CN$. Mas DM e CN são iguais ao diâmetro. Como AD + BC = AB + CD (o trapézio é circunscritível – ver teorema 4.2 deste capítulo), então $AB + CD \ge DM + CN = 2PQ$. Mas como não pode ocorrer simultaneamente AD = DM e BC = CN (por que?), então AB + CD > 2PQ, ou $\frac{AB + CD}{2} > PQ$.

3) Provar que o quadrilátero de **perímetro máximo** inscrito em uma circunferência dada é o quadrado.

Resolução: Vamos provar este fato partindo de um quadrilátero qualquer não quadrado, inscrito na circunferência e mostrando que o quadrado tem perímetro maior do que ele. Seja então ABCD um quadrilátero inscrito na circunferência. Tomemos uma de suas diagonais, por exemplo, \overline{AC} .

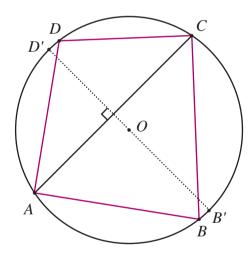


Figura 4.29 - $AD' + CD' \ge AD + CD$ e $AB' + CB' \ge AB + CB$

Considere o diâmetro perpendicular a \overline{AC} . Sejam D' (do mesmo lado de D em relação à reta \overline{AC}) e B' (do mesmo lado de B) as extremidades desse diâmetro. Então, pelo exercício resolvido 3 da seção 3.5.8, $AD' + CD' \ge AD + CD$ e $AB' + CB' \ge AB + CB$, as igualdades ocorrem se, e somente se, os pontos D e D' forem coincidentes, ou se B e B' forem coincidentes. Logo, o perímetro do quadrilátero AB'CD' é maior (ou igual no caso da coincidência dos pontos) ao perímetro do quadrilátero original ABCD. Tomemos agora o diâmetro $\overline{B'D'}$ que é também diagonal a AB'CD'.

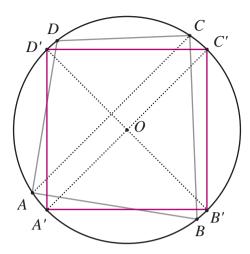


Figura 4.30 - A'C' = B'D' e $\overline{A'C'} \perp \overline{B'D'}$

Tracemos o diâmetro perpendicular a $\overline{B'D'}$ cujas extremidades são A' (do mesmo lado de A) e C' (do mesmo lado de C). Então, pelo exercício citado anteriormente, teremos $B'C' + D'C' \geq B'C' + D'C$ e $B'A' + D'A' \geq B'A' + D'A$. Segue-se que o perímetro do quadrilátero A'B'C'D' é maior ou igual ao perímetro do quadrilátero AB'CD'. Logo, o perímetro de A'B'C'D' é maior ou igual ao do quadrilátero original ABCD. Mas as diagonais de A'B'C'D' são congruentes, perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios. Logo, pelos teoremas 4.8 e 4.10, A'B'C'D' é um losango e um retângulo, ou seja, é um quadrado. Como só há um quadrado inscrito na circunferência (a menos de con-

gruência), cuja diagonal é igual ao seu diâmetro, e como, partindo de um quadrilátero qualquer sempre obtemos este quadrado de perímetro maior, segue-se que o quadrado é o quadrilátero inscrito de perímetro máximo.

4) Prove que o quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de outro quadrilátero qualquer é um paralelogramo (Teorema de Varignon).

Resolução: Seja ABCD um quadrilátero qualquer, e sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente. Considere a diagonal \overline{AC} do quadrilátero.

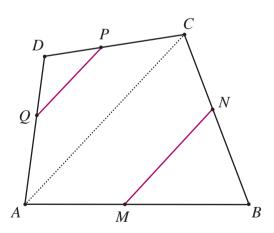


Figura 4.31 - Teorema de Varignon

Então, no triângulo ΔACD temos que $\overline{QP}/\!/\overline{AC}$ e $QP = \frac{AC}{2}$, e no triângulo ΔABC temos $\overline{MN}/\!/\overline{AC}$ e $MN = \frac{AC}{2}$ (teorema 3.5

do capítulo 3). Segue-se que $\overline{QP}//\overline{MN}$ e QP=MN . Pelo teorema 4.5 deste capítulo, MNQP é um paralelogramo.

Exercícios Propostos

- 1) Prove que um paralelogramo é inscritível se, e somente se, ele for retângulo.
- 2) Prove que um paralelogramo é circunscritível se, e somente se ele for um losango.
- Prove que um quadrilátero é um losango se, e somente se, as suas duas diagonais são bissetrizes de seus quatro ângulos internos.
- 4) Dar exemplo de um quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares mas não é um losango.
- 5) Dar exemplo de um quadrilátero que tem as diagonais congruentes mas não é um retângulo.

Exercícios Propostos

I) Exercícios Gerais

1) Prove que todo polígono regular é inscritível.

Sugestão: primeiro encontre um "candidato" para centro da circunferência circunscrita ao polígono: seja O o centro da circunferência que passa por três vértices consecutivos, por exemplo, A_1 , A_2 e A_3 ; use congruência de triângulos para provar que a mesma circunferência passa por A_4 etc.

2) Prove que todo polígono regular é circunscritível.

Sugestão: use como centro da circunferência inscrita no polígono o centro da circunferência circunscrita encontrada no exercício 1.

- 3) Prove que se um polígono é eqüilátero e é inscritível, então ele é regular.
- 4) Já vimos que um retângulo não quadrado é um polígono eqüiângulo inscritível mas não é regular. Dê um exemplo de um hexágono eqüiângulo inscritível mas não regular.

Sugestão: comece partindo de um hexágono regular com a sua circunferência circunscrita desenhada; mantenha os vértice A_1 e A_3 fixos e modifique a posição do vértice A_2 na circunferência; depois, mantenha também fixo o vértice A_5 e modifique A_4 de modo que $A_2 \widehat{A}_3 A_4 = 120^{\rm o}$, etc).

5) Mostre que se um pentágono é eqüiângulo e inscritível então ele é regular. **Generalize**: se um polígono de *n* lados, *n* ímpar, for eqüiângulo e inscritível então ele é regular.

Sugestão: no caso do pentágono, observe que as diagonais $\overline{A_1}\overline{A_3}$ e $\overline{A_1}\overline{A_4}$ são congruentes e delimitam um arco (menor) de 144º cada uma – por quê?; segue-se que o lado $\overline{A_3}\overline{A_4}$ delimita um arco (menor) de 72°; prova-se então que qualquer outro lado do pentágono corresponde ao mesmo arco).

6) Prove que o ponto de cruzamento das diagonais de um trapézio não é ponto médio de **nenhuma** delas.

Sugestão: suponha, por absurdo, que o ponto de cruzamento P seja ponto médio da diagonal \overline{AC} de um trapézio ABCD; trace por P a paralela às bases e considere os triângulos ΔADB e ΔACD .

II) Problemas de Extremos

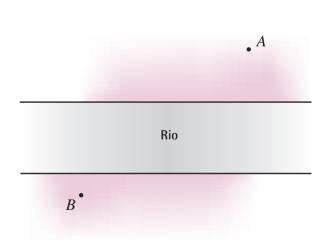


Figura 4.32 - A e B são duas cidades situadas em lados opostos de um rio cujas margens são paralelas.

- 7) Duas cidades A e B estão situadas em lados opostos de um rio cujas margens são paralelas. Uma ponte deve ser construída sobre o rio de forma a poder unir as duas cidades. Onde deve ser construída a ponte de modo que o percurso entre as duas cidades seja mínimo? (a estrada de cada uma das cidades até a cabeceira da ponte é um segmento de reta no mapa).
- 8) Explique por que não existe um trapézio inscrito em uma circunferência dada cujo perímetro é **máximo**.

Sugestão: você pode "aproximar" um trapézio do quadrado inscrito tanto quanto se queira.

9) Prove que, dentre todos os polígonos de *n* lados (*n* fixado) inscritos em uma circunferência dada, aquele que tem perímetro **máximo** é o polígono regular.

Sugestão: suponha que exista um polígono de perímetro máximo; suponha que ele não seja regular; então existem dois lados consecutivos não congruentes; use agora o exercício resolvido 3 da seção 3.5.8.

10) Encontre o retângulo com um lado sobre o diâmetro de uma circunferência dada e os outros dois vértices nesta circunferência, tal que a soma dos comprimentos dos três lados que não estão sobre o diâmetro seja máxima.

Sugestão: ache o simétrico da figura e pense no quadrilátero de perímetro máximo inscrito na circunferência.

11)Encontre o trapézio inscrito em uma circunferência dada cuja base maior é um diâmetro desta circunferência e que tenha perímetro máximo.

Sugestão: os outros três lados do trapézio devem ser congruentes – justifique.

12) Prove que, dentre todos os triângulos circunscritos a uma circunferência dada, aquele que tem perímetro mínimo é o triângulo equilátero.

Sugestão: admita que exista um triângulo de perímetro mínimo; mostre então que, fixado um dos lados com comprimento maior que o diâmetro da circunferência, o triângulo circunscrito de perímetro mínimo é o isósceles cuja base é aquele lado, e depois conclua.

III) Problemas de construção com régua e compasso

- 13) Construa um quadrado sendo dado o seu lado.
- 14) Construa um quadrado inscrito em uma circunferência dada.
- Construa um quadrado circunscrito a uma circunferência dada.

- 16) Construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência dada.
- 17) Dado um retângulo de base *a* e altura *b*, *a* > *b*, construa um quadrado nele inscrito (três vértices sobre três lados consecutivos e o quarto "solto") tal que a medida de seu lado seja **mínima.**

Sugestão: analise o problema e depois use o exercício proposto 3.5.8.

18) São dados um quadrilátero qualquer e um ponto *P* no seu interior. Supondo que *P* é o centro de um paralelogramo (ponto de intersecção das diagonais) inscritos no quadrilátero (ou seja, cujos vértices estão, cada um, sobre cada lado do quadrilátero), reconstruir este paralelogramo.

Sugestão: na análise do problema use o exercício proposto 5 ao final do capítulo 3.

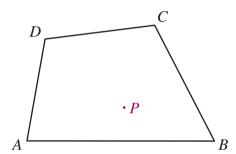


Figura 4.33 - P é o centro de um paralelogramo inscrito em ABCD

Resumo

Neste capítulo definimos polígono, polígono convexo e polígono regular. Em seguida, passamos a estudar os quadriláteros e as características que eles devem apresentar para que sejam inscritíveis ou circunscritíveis. Finalmente, estudamos os quadriláteros especiais. Vimos que todo losango e todo retângulo são um paralelogramo e que o quadrado está na intersecção daquelas duas classes de quadriláteros. Vimos também que todas as propriedades dos quadriláteros especiais foram deduzidas a partir da congruência de triângulos. Pode-se perguntar, então, qual a importância de se considerar tais quadriláteros? Vimos que a circunferência, introduzida axiomaticamente por Euclides (Postulado III) teve, e terá, um papel importante no estudo de ângulos e na construção de figuras. Os quadriláteros especiais, em particular o quadrado, terão um papel fundamental no estudo de áreas de figuras planas. Neste estudo, o caminho percorrido será o inverso do que escolhemos para apresentar aqueles quadriláteros: da área do quadrado, passaremos à área do retângulo, daí para o paralelogramo, deste para o triângulo e, finalmente, para o trapézio.

Bibliografia Comentada

1) LIMA, E. L. **Matemática e ensino.** Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

Um excelente livro com discussões sobre diversos temas do Ensino Fundamental e Médio.

2) WAGNER, E. **Construções geométricas.** Rio de Janeiro: SBM, 1993. (Coleção do Professor de Matemática).

Já comentado no capítulo 3 desta disciplina.

 LIMA, E. L. Meu professor de matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção do Professor de Matemática).

Outro livro excelente sobre temas diversos.

Capítulo 5

Áreas de Figuras Planas

Capítulo 5

Áreas de Figuras Planas

Neste capítulo você irá conhecer a noção de área de uma figura plana, calcular as áreas de figuras geométricas mais conhecidas e compreender como se calcula a área de uma região plana delimitada por uma curva fechada e simples por falta e por excesso a partir de aproximações por polígonos. Após, vamos demonstrar o Teorema de Pitágoras e explorar algumas de suas conseqüências.

5.1 O conceito de área

Nesta seção vamos definir a área de uma região plana. No entanto, precisamos definir para quais tipos de regiões planas é possível atribuir um valor de área. Em primeiro lugar, o conceito de área só é admissível para regiões do plano delimitadas por uma curva fechada. Em nosso estágio atual, é difícil fornecer uma conceituação precisa do que vem a ser uma curva fechada, ou o que vem a ser uma curva aberta. A figura 5.1 ilustra um exemplo de curva aberta e um exemplo de curva fechada.

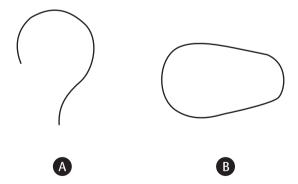


Figura 5.1 - Um exemplo de curva plana aberta (a), e de uma curva plana fechada (b)

Portanto, quando nos referimos à noção pictórica em geometria, será referente à noção induzida pela apreciação visual das figuras geométricas e não

através de uma definição

matemática formal.

Relativo a ou próprio da pintura. Pitoresco: que diverte; recreativo. Fonte: Dicionário Houaiss.

Para obtermos algo mais que uma simples idéia pictórica, a noção de continuidade é um conceito elaborado em matemática, com o qual você terá contato em disciplinas posteriores deste curso. Por hora, bastam-nos duas características intuitivas das aplicações

contínuas: (1) Uma aplicação contínua associa pontos próximos a pontos próximos. (2) Uma aplicação contínua não admite rupturas, cortes ou colagens, isto é, se considerarmos os conjuntos como feitos de borracha, uma aplicação contínua somente admitiria que se esticasse ou encolhesse, sem no entanto cortar ou colar, podemos considerar as seguintes definições formais:

Definição 5.1. Uma curva plana é fechada quando ela for a imagem de uma aplicação contínua de uma circunferência no plano.

Definição 5.2. Uma curva plana é aberta quando ela for a imagem de uma aplicação contínua de um intervalo, de uma semi-reta ou de uma reta no plano. No caso de um intervalo, as imagens das extremidades devem ser distintas.

Dito de outra maneira e, apelando para a sua intuição geométrica, podemos dizer que toda curva fechada pode ser traçada a partir de uma circunferência, considerando-a feita de "elástico" ou "barbante", sem "arrebentar" ou "emendar". Da mesma forma, uma curva aberta pode ser pensada como produzida a partir de um intervalo, de uma semi-reta, ou de uma reta, de uma maneira contínua, sem cortes ou emendas. Dentre todas as curvas planas fechadas, vamo-nos ocupar com as curvas simples.

Definição 5.3. Uma curva simples é uma curva que não possui auto-intersecções.

A figura 5.2 mostra-nos um exemplo de uma curva simples e um exemplo de uma curva não simples. Enfatizamos na figura que o conceito de simplicidade está relacionado com a ausência de autointersecções e não com a complexidade do traçado da mesma.

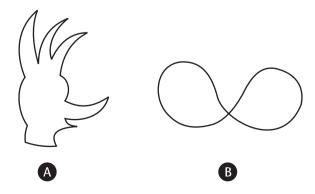


Figura 5.2 - Um exemplo de curva simples (a) e de uma curva não simples (b)

A noção de continuidade é um conceito elaborado em matemática, com o qual você terá contato em disciplinas posteriores deste curso. Por hora, bastam-nos duas características intuitivas das aplicações contínuas: (1) Uma aplicação contínua associa pontos próximos a pontos próximos. (2) Uma aplicação contínua não admite rupturas, cortes ou colagens, isto é, se considerarmos os conjuntos como feitos de borracha, uma aplicação contínua somente admitiria que se esticasse ou encolhesse, sem no entanto cortar ou colar partes antes desgrudadas.

O nome do teorema é devido ao matemático francês Camile Jordan, pois foi ele quem deu a primeira "prova" do resultado, isso em 1877. Um resultado profundo sobre curvas fechadas e simples, cuja demonstração está muito além do escopo deste livro é o teorema da curva de Jordan. Basicamente, esse teorema estabelece o fato, razoavelmente intuitivo, que uma curva fechada e simples divide o plano em duas regiões disjuntas, a de dentro e a de fora.

Teorema 5.1 (Teorema da Curva de Jordan). Uma curva plana fechada e simples divide o seu complementar no plano em dois subconjuntos disjuntos.

Isto vem do fato que uma circunferência é um conjunto compacto, em particular limitado, quando considerado como subconjunto do plano, e que a compacidade é preservada por aplicações contínuas. Não entraremos em detalhes sobre compacidade e continuidade neste momento do curso. Esses conceitos serão melhor discutidos na disciplina de Introdução à Análise. Para nossos objetivos, bastanos o fato de que toda curva fechada é limitada. Existe ainda uma liberdade de escolha no sentido de definirmos qual região do plano será considerada interior e qual será exterior. Sabemos, no entanto, que uma curva fechada, sendo a imagem por uma aplicação contínua de uma circunferência será limitada. Portanto, vamos considerar como a região interior à curva a imagem do círculo pela mesma aplicação, que também será limitada no plano, conforme ilustrado na figura 5.3. Uma outra forma de caracterizar a região interior é escolher, ao movimentar-se pela curva no sentido anti-horário, a região que fica sempre à esquerda. Portanto, ao falarmos de área de uma região plana, estará subentendido que essa região é a região interior de uma curva plana fechada e simples. A essa região atribuiremos um número real positivo que será sua área.

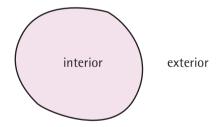


Figura 5.3 - Região interior e região exterior a uma curva plana fechada e simples

É necessário que a área seja definida de forma não ambígua, logo, vamos exigir que duas figuras congruentes possuam o mesmo valor para suas áreas. Também a área deve ser aditiva, ou seja, que a área total de duas figuras planas distintas seja a soma das áreas de cada uma delas. A partir dessas duas propriedades da área podemos definir a área de uma figura plana a partir da comparação com uma unidade padrão, a saber, um quadrado de lado unitário.

Definição 5.4. Seja uma região plana Σ , delimitada por uma curva fechada simples γ . A área de Σ é um número real positivo, denotado por $A(\Sigma)$, satisfazendo as seguintes condições:

- 1) Se $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$, então $A(\Sigma_1) = A(\Sigma_2)$, isto é, duas figuras congruentes possuem a mesma área.
- 2) Se duas regiões, Σ_1 e Σ_2 são tais que sua intersecção não contém pontos interiores, ou seja, se intersectam no máximo pela sua fronteira, então $A(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2)$. Isto é, a área é uma grandeza aditiva.
- 3) Um quadrado de lado igual a 1 possui área igual a 1.

Um ponto $P \in \Sigma$ é dito ser interior a Σ se existir um número real positivo r, tal que o círculo de centro P e raio r esteja inteiramente contido na região Σ .

Exercício Resolvido

Mostre que se uma região Ω está contida propriamente dentro de uma região Σ , então $A(\Omega) \leq A(\Sigma)$. E mostre que se o complementar de Ω em Σ tiver pontos interiores, então $A(\Omega) < A(\Sigma)$.

Resolução: Seja $\Sigma \setminus \Omega$ o complementar de Ω em Σ , assim, temos que $\Sigma = \Omega \cup (\Sigma \setminus \Omega)$, e obviamente $\Omega \cap (\Sigma \setminus \Omega) = \emptyset$.Logo, pela aditividade da área, temos que:

$$A(\Sigma) = A(\Omega \cup (\Sigma \setminus \Omega)) = A(\Omega) + A(\Sigma \setminus \Omega) \ge A(\Omega) \quad (5.1)$$

Se o complementar $\Sigma \setminus \Omega$ possuir pontos interiores, então existe um número real positivo tal que o círculo com centro nesse ponto e raio igual a este número está inteiramente contido no complementar. Assim $A(\Sigma \setminus \Omega) > 0$, logo, $A(\Sigma) > A(\Omega)$.

Uma conseqüência da aditividade da área que também será amplamente utilizada, inclusive por razões práticas, é a decomposição. Basicamente, a idéia é: para calcularmos a área de uma região cujo formato é complexo, basta subdividirmos a região em regiões menores cujo formato nos permite calcular facilmente sua área, por fim somamos as áreas de todas as sub-regiões e obtemos a área total da figura em questão.

Uma última observação que faremos nesta seção é sobre as unidades de área. Durante todo o texto, utilizaremos apenas as unidades do sistema métrico decimal. A unidade fundamental de área

Um conjunto A está contido propriamente dentro de um conjunto B se $A \subseteq B$ e $A \ne B$.

Qualidade, atributo, característica de aditivo. Fonte Dicionário Houaiss.

Quando nos referirmos à aditividade da área, estaremos nos referindo à propriedade (2) da definição 5.4.

Múltiplos do m2:

- 1 dam² = 10^2 m²;
- 1 hm² = 10^4 m²;
- $1 \text{ km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$.

Sub-unidades:

- 1 dm² = 10^{-2} m²;
- 1 cm² = 10^{-4} m²;
- 1 mm² = 10^{-6} m².

será o metro quadrado m^2 , cujos múltiplos são o decâmetro quadrado (1 dam² = 10^2 m²), o hectômetro quadrado (1 hm² = 10^4 m²) e o quilômetro quadrado (1 km² = 10^6 m²), e cujas subunidades são o decímetro quadrado (1 dm² = 10^{-2} m²), o centímetro quadrado (1 cm² = 10^{-4} m²) e o milímetro quadrado (1 mm² = 10^{-6} m²).

Exercícios Propostos

- 1) Dê exemplos de curvas abertas simples e curvas abertas não simples.
- 2) Dê exemplos de curvas abertas limitadas e ilimitadas.
- Discuta como se poderia oferecer uma caracterização precisa de curvas abertas e fechadas no contexto do ensino fundamental.
- 4) Discuta, como no exercício anterior, como caracterizar a região interior e exterior de uma curva plana fechada e simples no contexto do ensino fundamental e proponha atividades para serem feitas em sala de aula para fixar estas idéias.
- 5) Seja uma região Ω contida propriamente dentro de uma região Σ . Mostre que $A(\Sigma \setminus \Omega) = A(\Sigma) A(\Omega)$. Faça um desenho interpretando o que significa esse resultado.

5.2 Áreas de polígonos elementares

A partir da definição de área, vamos mostrar que é possível medir a área de qualquer figura plana. Nosso primeiro resultado, que será essencial para todo o resto da discussão, será a respeito das área de um quadrado.

Teorema 5.2. A área de um quadrado de lado a é igual a a^2 .

Demonstração: Vamos tomar, de início, um quadrado cujo valor do lado é um número inteiro n. De acordo com a figura 5.4, são necessários n^2 quadrados de área 1 para cobrir inteiramente o quadrado de lado n, logo, como todos os quadrados se intersectam apenas por pontos de fronteira, o fato de a área ser aditiva garante que o quadrado de lado n possui área n^2 .

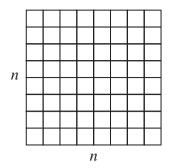


Figura 5.4 - Área de um quadrado de lado n

Para o caso de um quadrado onde o valor do lado a não seja igual a um número inteiro mas que seja um número racional, basta escolher uma nova unidade de comprimento l tal que $l = n \cdot l$, e

$$a = m \cdot l$$
, portanto $a = \frac{m}{n}$ (ver a figura 5.5).

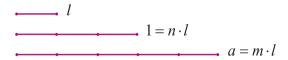


Figura 5.5 - Os segmentos de comprimento l, 1 e a

O quadrado de lado 1, possui uma área igual a n^2 vezes a área do quadrado de lado l. Denotando por A a área do quadrado de lado l, teremos:

$$1 = n^2 \cdot A \implies A = \frac{1}{n^2}.$$
 (5.2)

O quadrado de lado a, por sua vez, possui uma área igual a m^2 vezes a área do quadrado de lado l, logo a sua área será

$$S = m^2 \cdot A = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} = a^2.$$
 (5.3)

Para o caso em que o número a é um número irracional, provaremos que qualquer número $b < a^2$ corresponde à área de um quadrado menor que a do quadrado de lado a, e qualquer número $b > a^2$ corresponde à área de um quadrado maior que a do quadrado de lado a.

Primeiramente, é fácil verificar que qualquer quadrado de lado racional r < a está inteiramente contido em um quadrado de lado

Esta será uma prova por redução ao absurdo. Freqüentemente utilizaremos esse argumento: Para provarmos que duas grandezas são iguais, basta provar que qualquer uma delas não pode ser menor que a outra.

a. Da mesma forma, qualquer quadrado de lado racional s > a contém um quadrado de lado a, como nos ilustra a figura 5.6. Assim, denotando por A a área de um quadrado de lado a, teremos $r^2 < A < s^2$. Veja o exercício resolvido no final da seção 5.2.

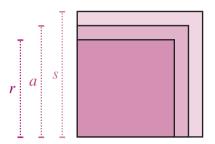


Figura 5.6 – Qualquer quadrado de lado racional $\,r < a\,$ está inteiramente contido em um quadrado de lado $\,a\,$. Da mesma forma, qualquer quadrado de lado racional $\,s > a\,$ contém um quadrado de lado $\,a\,$

Agora, considere o número real positivo $b < a^2$, podemos verificar facilmente que $\sqrt{b} < a$. Como os números racionais são densos nos números reais, existe um número racional r, tal que $\sqrt{b} < r < a$ e, portanto, $b < r^2 < a^2$. Seja então o quadrado ABCD com a medida AB = a. No segmento \overline{AB} , seja um ponto X tal que $AX = \sqrt{b}$, e um ponto Y entre X e B tal que AY = r e, portanto, de área r^2 . Por um lado, a figura 5.7 mostra-nos que o quadrado de lado AX está inteiramente contido no quadrado de lado AY = r e, portanto, de área igual a r^2 , este, por sua vez, está inteiramente contido no quadrado de lado AB = a e área A. Assim, em particular, $r^2 < A$. Portanto, qualquer número menor que a^2 não poderá ser igual à área do quadrado de lado a.

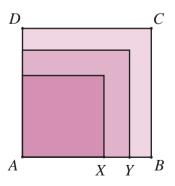


Figura 5.7 - Seja então o quadrado ABCD com a medida AB=a . No segmento \overline{AB} , o ponto X é tal que $AX=\sqrt{b}$, e o ponto Y é tal que AY=r , racional

Se dois números reais positivos a e b são tais que $a^2 < b^2$, então a < b.

De resultados sobre a construção dos números reais, temos que em qualquer intervalo real [a,b], existe um número racional $r \in [a,b]$.

Efetuando-se um raciocínio análogo para o caso de qualquer número $b>a^2$, chegamos à conclusão que esse número não poderá também ser igual à área do quadrado ABCD. Portanto, essa área é igual a a^2 .

Agora que sabemos que a área de qualquer quadrado de lado a é igual a a^2 , podemos calcular as áreas de figuras planas mais conhecidas.

Teorema 5.3. A área de um retângulo de lados $a \in b$ é igual a a.b.

Demonstração: Seja o quadrado de lado igual a a+b, conforme nos ilustra a figura 5.8.

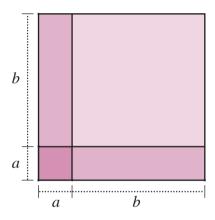


Figura 5.8 – Área de um quadrado de lado igual a a+b, disposta de maneira a calcularmos a área de um retângulo de lados a e b

A área total do quadrado é igual à soma das áreas do quadrado de lado a, do quadrado de lado b, e duas vezes a área do retângulo de lados a e b, que denotaremos por A(a,b). Assim, temos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.A(a,b).$$
 (5.4)

Por outro lado:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.$$
 (5.5)

Comparando-se as expressões (5.4) e (5.5), temos que

$$A(a,b) = a.b$$
.

A partir da área de um retângulo, podemos ainda calcular a área de um paralelogramo qualquer. Tome um lado do paralelogramo que será denominado base do paralelogramo. O segmento perpendicular à base que a liga ao lado oposto é denominado altura do paralelogramo. O axioma das paralelas afirma, entre outras coisas, que o comprimento dessa perpendicular é o mesmo, independente do ponto tomado na base.

Teorema 5.4. A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Demonstração: Seja b=AB a medida da base e h a medida da altura do paralelogramo ABCD. Sejam os segmentos $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}$, e $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{DC}$, conforme nos ilustra a figura 5.9.

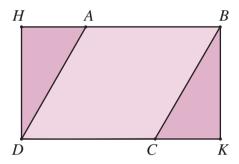


Figura 5.9 - Cálculo da área do paralelogramo ABCD

Como pode ser facilmente mostrado, temos a congruência de triângulos $\Delta DAH \equiv \Delta BCK$, deixamos como exercício a verificação que, de fato, esses dois triângulos são congruentes. Logo esses triângulos têm a mesma área. Considere agora o segmento $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{AB}$ com $E \in \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IG} \subseteq \overrightarrow{DC}$, e sejam os segmentos $\overrightarrow{EF} \subseteq \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IG} \subseteq \overrightarrow{DC}$, com $\overrightarrow{EF} \equiv \overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{IG} \equiv \overrightarrow{CK}$, conforme mostrado na figura 5.10.

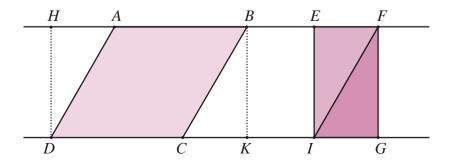


Figura 5.10 - Construção auxiliar no cálculo da área do paralelogramo

Portanto, temos a seguinte cadeia de congruências de triângulos que você poderá facilmente verificar:

$$\Delta DAH \equiv \Delta IFE \equiv \Delta FIG \equiv \Delta BCK.$$
 (5.6)

Logo, todos esses triângulos possuem a mesma área. Temos também que os triângulos ΔIFE e ΔFIG formam o retângulo EFGI, isto porque \overline{EF} // \overline{IG} e osângulos $\angle I\widehat{E}F$ e $\angle F\widehat{G}I$ são ângulos retos. Pelo teorema 5.3, a área do retângulo EFGI é igual a EF.EI = EF.h Observando a figura 5.9, temos que

$$A(HBKD) = A(\Delta DAH) + A(ABCD) + A(\Delta BCK). \quad (5.7)$$

Por outro lado, considerando-se as congruências em (5.6), temos que a expressão (5.7) ainda pode ser escrita como:

$$A(HBKD) = A(\Delta IEF) + A(ABCD) + A(\Delta FIG) =$$

$$= A(ABCD) + A(EFGI)$$
(5.8)

Utilizando a expressão da área do retângulo *EFGI* e sabendo que a área do retângulo *HBKD* é igual a

$$HB \cdot BK = (HA + AB) \cdot h = (HA + b) \cdot h$$

e sabendo que HA = EF, temos finalmente que

$$A(HBKD) = (EF + b) \cdot h = EF \cdot h + b \cdot h =$$

$$= A(ABCD) + EF \cdot h$$
(5.9),

o que nos leva à conclusão que $A(ABCD) = b \cdot h$.

De acordo com o resultado acima, quaisquer dois paralelogramos com mesma base e mesma altura possuem a mesma área. Portanto deslocamentos paralelos a um dos lados como mostrados na figura 5.11 produzem paralelogramos de mesma área. Esta propriedade é extremamente útil para a resolução de problemas.

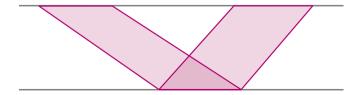


Figura 5.11 - Dois paralelogramos de mesma área, produzidos por deslocamento paralelo a um dos lados.

O valor da área de um paralelogramo independe de qual par de lados escolhemos para ser a base. A demonstração desse fato depende do conceito de semelhança de triângulos, que será visto no capítulo 7 deste livro. Por enquanto, basta-nos apenas saber esse fato e utilizá-lo nos momentos adequados para a resolução de problemas.

Denominaremos altura do triângulo, indistintamente, tanto o segmento por um dos vértices perpendicular à reta que contém a base, bem como o seu comprimento.

Falta-nos ainda encontrar o valor da área de um triângulo. Tomando-se um dos lados do triângulo como base, o segmento perpendicular que liga o vértice oposto do triângulo à reta gerada pela base é denominado altura do triângulo, conforme mostranos a figura 5.12.

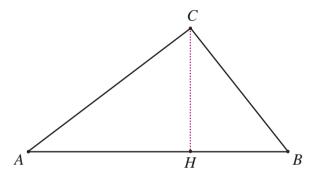


Figura 5.12 - Triângulo $\triangle ABC$, cuja base é o segmento \overline{AB} e a altura é o segmento \overline{CH}

Teorema 5.5. A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

Demonstração: Seja o triângulo ΔABC de base b = AB e altura h. Seja agora o segmento \overline{DC} // \overline{AB} , tal que $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, conforme indicado na figura 5.13.

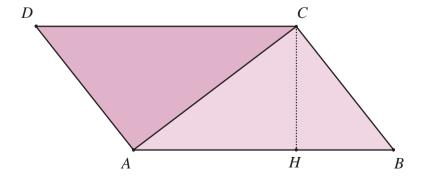


Figura 5.13 - Cálculo da área do triângulo ΔABC

Temos que $\overline{DC} \equiv \overline{BA}$, por construção, $\overline{CA} \equiv \overline{AC}$, por definição e $\angle D\widehat{C}A \equiv \angle B\widehat{AC}$, pois são alternos internos entre duas retas paralelas. Logo, pelo caso LAL, temos a congruência de triângulos $\Delta DCA \equiv \Delta BAC$ e, portanto, o quadrilátero ABDC é um paralelogramo de base igual a b e altura igual a h. Novamente, você é convidado a mostrar facilmente que o quadrilátero ABDC é realmente um paralelogramo. Portanto, teremos:

$$2S(\Delta ABC) = S(\Delta ABC) + S(\Delta DCA) = S(ABDC) = b \cdot h, \quad (5.10)$$

o que nos leva a concluir que

$$S(\Delta ABC) = \frac{b.h}{2}.$$
 (5.11)

A mesma observação feita para paralelogramos vale para triângulos. Ou seja, quaisquer dois triângulos de mesma base e mesma altura possuem a mesma área. Logo, se tomarmos um dos lados como base e efetuarmos um deslocamento do vértice oposto ao longo de uma reta paralela à base, conforme indicado na figura 5.14, teremos triângulos com mesma área.

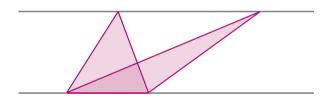


Figura 5.14 - Dois triângulos de mesma área produzidos por deslocamento do vértice ao longo de uma reta paralela à base.

Também, o valor da área de um triângulo independe da escolha do lado que será sua base, resultado este que depende de semelhança entre triângulos.

Nos exercícios ao final do capítulo você poderá calcular os valores de outras figuras planas comuns. Algumas técnicas podem ser bastante úteis para resolver problemas de áreas:

1) Em primeiro lugar, tente sempre decompor (recortar) uma figura mais complexa em figuras mais simples das quais se saiba calcular a área.

- 2) Explore no problema sempre figuras geométricas congruentes, afinal elas possuem a mesma área.
- 3) Há casos em que é interessante completar a figura utilizando uma outra figura complementar para se obter algo familiar. Nesses casos, é importante lembrar que as figuras são apenas auxiliares e, portanto, devem ser descontadas no resultado final.
- 4) Explore sempre o fato de que dois triângulos ou dois paralelogramos com mesma base e mesma altura, mesmo que não sejam congruentes ou não estejam juntos na figura, possuem a mesma área.

Exercício Resolvido

Mostre que a área de um trapézio é dada pelo produto da média aritmética de suas bases pela sua altura.

Resolução: Seja o trapézio ABCD cujas bases paralelas são \overline{AB} , a base menor, cujo comprimento é $b_1=AB$, e \overline{CD} , a base maior, cujo comprimento é $b_2=CD$, e cuja altura, a distância entre os dois lados paralelos, seja igual a h, conforme ilustrado na figura 5.15.

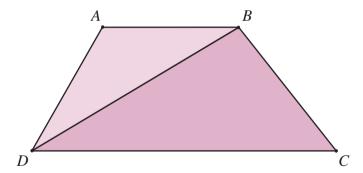


Figura 5.15 - Área do trapézio ABCD

Traçando-se a diagonal \overline{BD} do trapézio, obtemos dois triângulos, a saber, ΔABD e ΔCDB . A área do trapézio é igual à soma das áreas desses dois triângulos:

$$A(ABCD) = A(\Delta ABD) + A(\Delta CDB) =$$

$$= \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \cdot h. \tag{5.12}$$

Exercícios Propostos

- Mostre que a área de um losango pode ser obtida como a metade do produto dos comprimentos de suas diagonais (é importante relembrar os resultados principais a respeito de losangos no capítulo sobre polígonos).
- 2) Determinar o valor da área de um quadrado em função do comprimento de sua diagonal.
- 3) Seja um trapézio \overline{ABCD} , como no exercício resolvido, com os lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} medindo b_1 e b_2 , respectivamente, com $b_1 < b_2$. Seja O o ponto de cruzamento entre as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} . Mostre que a diferença entre as áreas dos triângulos ΔCDO e ΔABO é igual a: $\left(\frac{b_2-b_1}{2}\right)\cdot h$ (sugestão: tente observar que cada um desses triângulos pode ser visto como um triângulo de área conhecida menos um outro triângulo, que é o mesmo para os dois).
- 4) Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Determine a razão entre a área do quadrado e a área do losango, sabendo que as diagonais do losango estão na razão $\frac{3}{5}$ e que a diferença entre os seus comprimentos é de 40cm.

5.3 Área de uma figura plana geral

Vamos, nesta seção, indicar os procedimentos para se calcular o valor da área de uma figura delimitada por uma curva fechada e simples arbitrária. Antes, porém, precisamos entender o processo de cálculo de áreas para polígonos. Relembrando o conteúdo do capítulo 4 sobre polígonos, uma diagonal é qualquer segmento que une dois vértices do polígono e que não seja um lado do mesmo. Consideremos apenas as diagonais contidas na região interior do polígono de tal forma que a região interior fique dividida em triângulos. Isto é uma triangulação.

Definição 5.5. Uma triangulação de um polígono é uma subdivisão de sua região interior em triângulos por meio de suas diagonais.

É importante observar que, dado um polígono qualquer, em geral a triangulação não necessariamente é única, conforme nos ilustra a figura 5.16. Por este motivo, podemos sempre escolher a triangulação que seja mais conveniente do ponto de vista de cálculo de áreas de triângulos. No capítulo 7, veremos que existe uma fórmula para o cálculo da área de um triângulo a partir dos comprimentos de seus lados, assim, qualquer triangulação, a priori, poderá ser útil para o cálculo da área de um polígono. Basicamente, a área de um polígono é igual à soma dos valores das áreas dos triângulos da triangulação. Facilmente você poderá se convencer que essa soma independe de uma particular triangulação, veja o exercício (1) desta seção.

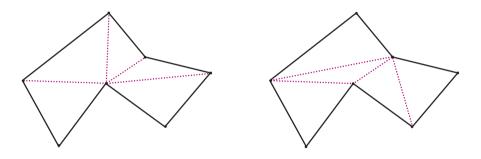


Figura 5.16 - Duas triangulações distintas em um polígono

O próximo passo é calcularmos a área de uma região plana delimitada por uma curva fechada e simples arbitrária. Para calcularmos o valor dessa área, devemos fazê-lo através de aproximações por falta ou por excesso.

Definição 5.6. Uma aproximação por falta da área de uma região plana é a área de um polígono inscrito nessa região.

Definição 5.7. Uma aproximação por excesso da área de uma região plana é a área de um polígono circunscrito a essa região.

Por polígono inscrito em uma região Σ , delimitada por uma curva fechada γ , nos referimos a um polígono no qual:

1) Todos os seus vértices estão contidos na região Σ ou sobre a própria curva γ .

2) Todas as arestas estão contidas na região Σ , sendo, no máximo, tangentes à curva γ .

A figura 5.17 nos ilustra um exemplo de polígono inscrito em uma região plana.

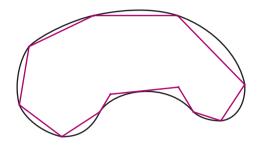


Figura 5.17 - Polígono inscrito em uma região plana

De forma similar, um polígono circunscrito a uma região Σ , delimitada por uma curva fechada e simples γ será um polígono no qual:

- 1) Toda a curva γ está contida na região interior delimitada por esse polígono.
- 2) Todas as arestas do polígono estão na região exterior a Σ , sendo permitido, no máximo, que as arestas desse polígono possuam seus vértices sobre γ ou que sejam tangentes àquela região.

A figura 5.18 nos ilustra um exemplo de um polígono circunscrito a uma região plana.

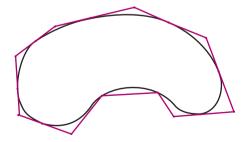


Figura 5.18 - Polígono circunscrito a uma região plana

Em ambos os casos, seja por falta ou por excesso, o valor da área é aproximado, e essa aproximação será tanto melhor quanto maior

for o número de lados do polígono inscrito e/ou circunscrito. É claro que também podemos fazer escolhas convenientes, como por exemplo, se uma curva fechada e simples γ possuir algum segmento de arco coincidente com um segmento de reta, é conveniente escolher um dos lados do polígono coincidente com esse segmento de reta.

Arquimedes (287 a.C. -212 a.C.), matemático e inventor grego foi um dos mais importantes matemático da Antigüidade. Criou um método para calcular o número π (razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro). Acreditava que nada do que existe é tão grande que não possa ser medido. Aperfeiçoou o sistema grego de numeração, criando uma notação cômoda para os números muito grandes, semelhante ao atual sistema exponencial. Fonte: Wikipedia, a



enciclopédia livre.

Arquimedes - Pintura de Domenico Fetti (1620), Museu *Alte Meister* em Dresden (Alemanha).

Novamente, o princípio de exaustão é o suporte teórico que nos assegura que a área da região será dada ao tomarmos um polígono inscrito ou circunscrito com uma infinidade de lados, sendo todos eles de comprimento infinitesimal. Utilizando esse tipo de procedimento, Arquimedes, em torno do ano 250 a.C., estimou a área de um círculo de raio 1 (que sabemos ter o valor igual a $\pi = 3.14159265...$) usando dois polígonos de 96 lados, um inscrito e o outro circunscrito, obtendo o valor $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$.

Arquimedes publicou esses resultados na célebre obra "The measurement of a circle", a tradução para a língua inglesa adotada é a de Sir Thomas Heath, publicada no volume 10 dos *Great Books da Enciclopaedia Britannica*. No curso de geometria 2, serão feitos todos os detalhes dessa construção, bem como será mostrado que o processo de duplicar o número de lados de um polígono regular inscrito ou circunscrito produz uma seqüência que satisfaz as hipóteses do princípio de exaustão. O mesmo Arquimedes calculou a área de uma figura plana limitada por um arco de parábola e por um segmento de reta, unindo dois de seus pontos através de triângulos justapostos em seu interior . Arquimedes publicou esses resultados na obra "Quadrature of the Parábola". Aqui também citamos a tradução de Sir Thomas Heath no volume 10 dos *Great Books* da *Enciclopaedia Britannica*.

Exercícios Propostos

- 1) Tome duas triangulações distintas no mesmo polígono e argumente por que a área do polígono calculada a partir dessas duas triangulações tem que resultar no mesmo valor.
- 2) Calcule o valor da área interna de sua casa. Confira depois com o valor dado nos documentos do imóvel.

- 3) Estime, aproximadamente, tanto por falta como por excesso a área de uma figura delimitada por uma curva plana fechada e simples.
- 4) Mostre que o princípio de exaustão pode também ser utilizado trabalhando-se simultaneamente com os polígonos inscritos e circunscritos. A grandeza em questão é a diferença entre a área do polígono circunscrito e a do polígono inscrito. A área da região é o número que está em todos os intervalos delimitados inferiormente pela área de um polígono inscrito e superiormente pela área de um polígono circunscrito.

A existência e unicidade desse número são garantidas pelo princípio dos intervalos encaixantes que diz: Se uma seqüência de intervalos fechados reais $I_n = [a_n, b_n]$, com $n \in N$ é tal que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n e a diferença $b_n - a_n$ tende a zero a medida que n aumenta, então existe um único número real α pertencente a todos esses intervalos simultaneamente.

5.4 Aplicações de áreas

Nesta seção veremos dois exemplos de problemas geométricos que seriam genuinamente difíceis se fossem tratados com métodos usuais de geometria, mas que são extremamente simples utilizando-se áreas. Apresentaremos os problemas na forma de exercícios resolvidos e, após a resolução, enunciaremos os resultados gerais, conforme são conhecidos na literatura.

Exercícios Resolvidos

Seja ΔABC um triângulo equilátero e P um ponto arbitrário em seu interior. Mostre que a soma das distâncias de P aos três lados do triângulo, independe da escolha do ponto P e esta soma é igual à altura do triângulo equilátero.

Resolução: A figura 5.19 ilustra mais claramente a idéia do problema. Tomea partir do ponto P ossegmentos $\overline{PK} \perp \overline{AB}$, $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ e $\overline{PM} \perp \overline{CA}$. A soma das distâncias será a soma dos comprimentos $s_P = PK + PL + PM$. Temos que provar que, na verdade, esse número s_P independe do ponto P tomado e é igual à altura do triângulo equilátero.

Em uma primeira análise, esse problema parece, e é, extremamente difícil para se resolver utilizando as técnicas de geometria. No entanto, esse problema se torna absolutamente elementar se considerarmos os segmentos \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{PC} , conforme nos ilustra a figura 5.20.

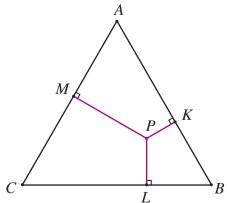


Figura 5.19 - A soma das distâncias de um ponto interno aos lados de um triângulo equilátero é independente do ponto escolhido

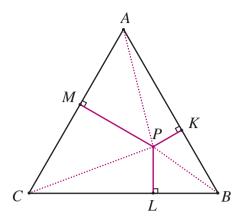


Figura 5.20 - Construção auxiliar na resolução do problema das distâncias.

Pela aditividade das áreas, temos que:

$$A(\Delta ABC) = A(\Delta APB) + A(\Delta BPC) + A(\Delta CPA) = \frac{AB \cdot PK}{2} + \frac{BC \cdot PL}{2} + \frac{CA \cdot PM}{2}.$$
 (5.13)

Por outro lado, como o triângulo é equilátero, temos que AB = BC = CA. Logo, denotando por h a altura do triângulo $\triangle ABC$, teremos que a equação (5.13) torna-se

$$A(\Delta ABC) = \frac{AB}{2} \cdot (PK + PL + PM) = \frac{AB \cdot h}{2}$$
 (5.14)

A equação (5.14) nos conduz diretamente à igualdade $s_P = PK + PL + PM = h$. Como esse resultado foi obtido de forma arbitrária, sem se levar em conta o ponto P específico, tomado de início, chegamos à conclusão que esse resultado, de fato, independe do ponto. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 5.6 (Teorema de Viviani). Em um triângulo equilátero, a soma das distâncias de um ponto arbitrário no interior do triângulo aos três lados do mesmo é sempre igual à altura do triângulo equilátero.

2) Seja um triângulo qualquer $\triangle ABC$. Sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , tome, respectivamente, os pontos K, L e M de tal forma que os segmentos \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CK} se cruzem exatamente no mesmo ponto P, conforme ilustrado na figura 5.21. Mostre que:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \tag{5.15}$$

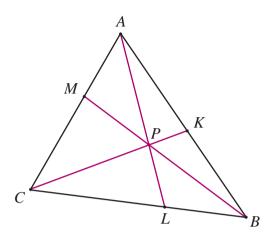


Figura 5.21 - Figura para o enunciado do problema

Novamente, esse é um problema altamente sofisticado e extremamente difícil de ser resolvido utilizando-se apenas de ferramentas tradicionais de geometria. Mas definindo-se, $A_1=A(\Delta APK)$, $A_2=A(\Delta BPK)$, $A_3=A(\Delta BPL)$, $A_4=A(\Delta CPL)$, $A_5=A(\Delta CPM)$ e $A_6=A(\Delta APM)$, temos que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + A_5 + A_6}{A_2 + A_3 + A_4} = \frac{A_5 + A_6}{A_3 + A_4},$$
 (5.16)

onde a primeira e a segunda igualdades vêm do fato que estamos comparando triângulos com bases, respectivamente, iguais a AK e KB, e de mesma altura. Você é convidado a verificar a última igualdade, que é apenas uma propriedade elementar das proporções (ver o exercício proposto (3) desta seção). De igual modo, temos as igualdades:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{A_3}{A_4} = \frac{A_3 + A_1 + A_2}{A_4 + A_5 + A_6} = \frac{A_1 + A_2}{A_5 + A_6},$$
 (5.17)

$$\frac{CM}{MA} = \frac{A_5}{A_6} = \frac{A_5 + A_3 + A_4}{A_6 + A_1 + A_2} = \frac{A_3 + A_4}{A_1 + A_2}.$$
 (5.18)

Utilizando simultaneamente as igualdades (5.16), (5.17) e (5.18), podemos concluir que:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{A_5 + A_6}{A_3 + A_4} \cdot \frac{A_1 + A_2}{A_5 + A_6} \cdot \frac{A_3 + A_4}{A_1 + A_2} = 1.$$
 (5.19)

Temos, então, mais um importante teorema da geometria clássica, o teorema de Ceva.

Teorema 5.7 (Teorema de Ceva). Dado um triângulo qualquer ΔABC , e os pontos K, L e M, respectivamente sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , de forma que os três segmentos \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CK} se cruzam exatamente no mesmo ponto, temos, então,

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Exercícios Propostos

- 1) Mostre que o teorema de Viviani é válido mesmo quando o ponto *P* está sobre um dos lados ou for um dos vértices do triângulo equilátero.
- 2) Elabore uma generalização do resultado do teorema de Viviani para o caso de um ponto no interior de um polígono regular qualquer (nesse caso, você terá que considerar as distâncias do ponto às retas que contêm os lados, e terá que relacionar com a medida do apótema do polígono).
- 3) Mostre que se $x = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, então $x = \frac{p+r}{q+s} = \frac{p-r}{q-s}$.
- 4) Mostre a recíproca do teorema de Ceva: Se em um triângulo qualquer $\triangle ABC$ toma-se sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , respectivamente, os pontos K, L e M de tal forma que $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$, então os segmentos \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CK} se cruzam exatamente no mesmo ponto (suponha que \overline{AL} não cruze \overline{BM} e \overline{CK} no ponto de cruzamento deles. Seja $\overline{AL'}$ um outro segmento que passe por este ponto de cruzamento de \overline{BM} e \overline{CK} , com $L' \in \overline{BC}$. Mostre que forçosamente L' = L).
- 5) Utilizando a recíproca do teorema de Ceva, mostre que as medianas de um triângulo se cruzam todas no mesmo ponto.

Um apótema de um polígono regular é o segmento perpendicular a um dos lados do polígono com uma extremidade no centro da circunferência inscrita (ou circunscrita) e a outra extremidade no lado do polígono.

5.5 O teorema de Pitágoras e suas consequências

Nesta seção veremos a demonstração de um dos teoremas centrais na geometria, o teorema de Pitágoras.

A palavra Matemática (Mathematike, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento, fulcrado em provas dedutivas. Da vida de Pitágoras quase nada pode ser afirmado com certeza, já que ele foi objeto de uma série de relatos tardios e fantasiosos, como os referentes a suas viagens e a seus contatos com as culturas orientais. Parece certo, contudo, que o filósofo e matemático grego nasceu no ano de 571 a.C. ou 570 a.C., foi o fundador de uma escola de pensamento grega chamada em sua homenagem de Pitagórica, cujos princípios foram determinantes para evolução geral da matemática e da filosofia ocidental cujo principais enfoques eram: harmonia matemática, doutrina dos números e dualismo cósmico essencial. Segundo o pitagorismo, a essência, que é o princípio fundamental que forma todas as coisas, é o número. Os pitagóricos não distinguem forma, lei e substância, considerando o número o elo entre esses elementos. (Fonte: Wikipedia, a enciclopédia livre).

O teorema de Pitágoras é tão fundamental que ele próprio poderia ser colocado como axioma em lugar do axioma das paralelas, sendo que todas as conseqüências da geometria euclidiana poderiam ser deduzidas a partir dele. Considerado a própria alma da geometria euclidiana, o teorema de Pitágoras também é a porta aberta para a generalização das outras geometrias não euclidianas. No século XIX, o matemático alemão Bernhard Riemann introduziu o conceito de métrica Riemanniana, que forneceria basicamente o análogo do teorema de Pitágoras para espaços curvos, isto é, não euclidianos. A geometria Riemanniana foi importantíssima posteriormente para a formulação, em 1916, da teoria da relatividade geral, pelo físico Albert Einstein.



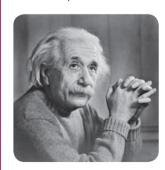
Pitágoras cunhado em moeda.

Bernhard Riemann

(1826 - 1866) foi um matemático alemão que fez contribuições importantes para a análise e a geometria diferencial, algumas das quais abriram caminho para o desenvolvimento da relatividade geral, mais tarde. O seu nome está ligado à função zeta, à integral de Riemann, ao lema de Riemann, à dobra de Riemann e às superfícies de Riemann.

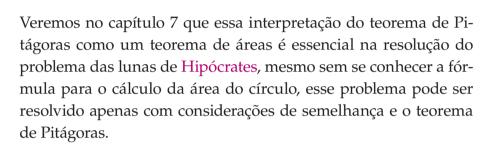
Fonte: Wikipedia, a enciclopédia livre.

Einstein (1879 - 1955) foi o físico que propôs a teoria da relatividade. Fonte: Wikipedia.



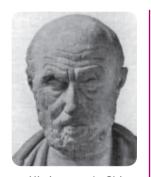
Fotografia de Albert Einstein tirada por Yousuf Karsh a 11 de Fevereiro de 1948.

Uma observação importante sobre o teorema de Pitágoras é que o seu significado tem sido geralmente negligenciado no ensino básico. Isto se deve ao fato de que o ensino de matemática tem enfatizado principalmente as habilidades de manipulação algébrica por parte dos alunos. Como conseqüência, o teorema de Pitágoras é considerado apenas como uma relação algébrica obedecida pelos lados de um triângulo retângulo. Dificilmente se explora o real significado do teorema, que é uma relação entre as áreas dos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo.



Da mesma forma, as profundas conseqüências do teorema não são exploradas, muito embora seja eventualmente demonstrado. É comum em muitos livros didáticos e em muitas salas de aula a seguinte seqüência de exercícios:

- 1) Dado um triângulo retângulo e conhecidas as medidas de seus catetos, calcular a medida da hipotenusa (são dúzias de exercícios desse tipo, disfarçados de problemas sobre o comprimento de escadas encostadas em paredes, ou distâncias entre carros que andam em ruas perpendiculares, mas não passam de um exercício numérico trivial).
- 2) Dado um triângulo retângulo onde são conhecidos os valores do comprimento da hipotenusa e de um dos catetos, encontrar o valor do outro (novamente, dezenas de exercícios desse tipo, recheados de exemplos de situações "reais").
- 3) Finalmente, dado um triângulo onde são conhecidas as medidas dos três lados, decidir se esse triângulo é retângulo ou não (em geral são problemas em que o fato de se ter um triângulo retângulo facilita grandemente sua solução, caso contrário torna-se praticamente impossível). O grande problema desse item (3) é que ele utiliza a recíproca do teorema de Pitágoras que, em geral, não é sequer enunciado, muito menos demonstrado.



Hipócrates de Chios, matemático grego importante do período pré-Euclidiano. Não confundir com Hipócrates Cós, o pai da medicina.

Demonstraremos aqui o teorema de Pitágoras seguindo a formulação de Euclides, encontrada na proposição 47 do livro I de "Os Elementos". É importante ressaltar que na obra "Os Elementos", Euclides se refere indistintamente a um quadrado ou à área desse quadrado. Portanto, sua formulação clássica se escreve como:

Proposição 47 (Livro I, Os Elementos). Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado que subentende o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados contendo o ângulo reto.

Por lado que subentende um ângulo de um triângulo, entendemos o lado oposto a esse determinado ângulo. Por lados que contém um ângulo do triângulo, entendemos os lados do triângulo cujo vértice de intersecção é exatamente o vértice do ângulo dado. Finalmente, por quadrado sobre um lado do triângulo entende-se um quadrado no qual um dos seus lados coincide com o lado do triângulo. Para colocar esse resultado em uma linguagem mais moderna, precisamos estabelecer a nomenclatura.

Definição 5.8. Em um triângulo retângulo, denominamos de hipotenusa o lado do triângulo que é oposto ao ângulo reto deste, e denominamos catetos os dois lados do triângulo retângulo cujo vértice de intersecção é exatamente o vértice do ângulo reto do triângulo.

Agora estamos em condições de enunciar o teorema de Pitágoras em uma linguagem compatível com a que vínhamos utilizando até o presente momento.

Teorema 5.8 (Teorema de Pitágoras). Em um triângulo retângulo, a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ΔABC cujo ângulo reto é o ângulo $B\hat{A}C$. Sejam, também, os quadrados ABDE, BCHK e CAFG construídos sobre os lados, conforme nos ilustra a Figura 5.22. Nosso objetivo é mostrar que

$$A(BCHK) = A(ABDE) + A(CAFG). (5.20)$$

Ainda observando a figura 5.22, considere o segmento $\overline{AQ} \perp \overline{HK}$ e seja P o ponto de intersecção de \overline{AQ} com a hipotenusa \overline{BC} .

A tradução para a língua inglesa utilizada para consultas é a de Sir Thomas Heath, publicada pela Editora Dover. Nossa tarefa será mostrar que: (1) A área do quadrado CAFG é igual à área do retângulo CHQP. (2) A área do quadrado ABDE é igual à área do retângulo PQKB.

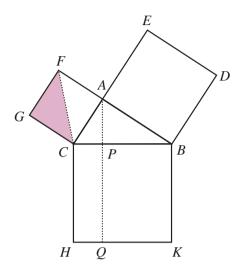


Figura 5.22 - Figura básica para a demonstração do teorema de Pitágoras.

(1) A área do quadrado CAFG é igual a duas vezes a área do triângulo ΔCFG , da figura 5.22. Considere agora o triângulo ΔCBG , conforme ilustrado na figura 5.23. Esse triângulo possui a mesma área que o triângulo ΔCFG , pois possui a mesma base, o lado \overline{CG} do quadrado, e a mesma altura, a distância entre as retas paralelas \overline{CG} e \overline{AB} . Note que aqui está implícito o quinto postulado de Euclides, pois uma das suas formulações equivalentes é que a distância entre duas retas paralelas é a mesma em todos os seus pontos.

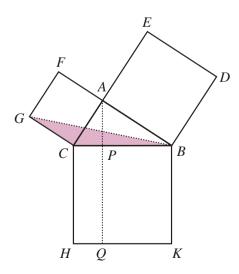


Figura 5.23 - Primeiro passo na demonstração do teorema

Considere agora o triângulo $\Delta \textit{CHA}$, conforme ilustrado na figura 5.24.

Temos que $\overline{CA} \equiv \overline{CG}$, pois se tratam de dois lados de um quadrado, com a mesma justificativa, concluímos que $\overline{CH} \equiv \overline{CB}$. Temos ainda a congruência de ângulos $\angle ACH \equiv \angle GCB$, pois ambos são a soma de um ângulo reto (de um quadrado) com o ângulo $\angle ACB$ do triângulo $\triangle ABC$. Portanto, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\triangle CBG \equiv \triangle CHA$. Como figuras congruentes possuem a mesma área, podemos concluir, também, que esses triângulos possuem a mesma área.

Finalmente, considere o triângulo ΔCHQ , conforme ilustrado na figura 5.25. A área dete triângulo é igual à área do triângulo ΔCHA , pois ambos possuem a mesma base, o segmento \overrightarrow{CH} , e a mesma altura, a distância entre as retas paralelas \overrightarrow{CH} e \overrightarrow{AQ} . Também é fácil ver que a área do triângulo ΔCHQ é igual à metade da área do retângulo CHQP.

Temos, finalmente, que:

$$A(CAFG) = 2 \cdot A(\Delta CFG) = 2 \cdot A(\Delta CBG) = 2 \cdot A(\Delta CHA) =$$

$$= 2 \cdot A(\Delta CHQ) = A(CHQP)$$
(5.21)

(2) De uma forma similar, podemos facilmente demonstrar que A(ABDE) = A(BPQK). Tente você fornecer os detalhes dessa demonstração, nos mesmos moldes do que foi feito no item (1), até para fixar melhor as idéias.

Tendo cumprido as etapas (1) e (2), podemos concluir que:

$$A(BCHK) = A(CHQP) + A(BPQK) =$$

$$= A(CAFG) + A(ABDE)$$
(5.22)

Portanto, a área do quadrado BCHK é igual à soma das áreas dos quadrados CAFG e ABDE.

Igualmente importante, mas pouco mencionado nas escolas e nos livros-texto escolares, é a recíproca do teorema de Pitágoras, que em geral é muito mais útil que o próprio teorema na resolução

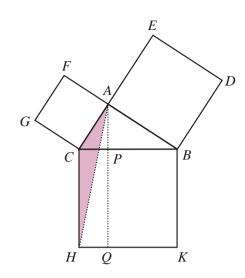


Figura 5.24 - Segundo passo na demonstração do teorema

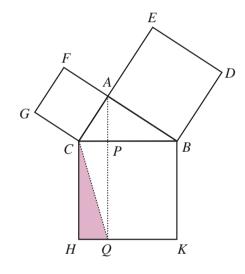


Figura 5.25 - Terceiro passo na demonstração do teorema

de problemas realmente interessantes. Esse teorema consiste em afirmar que se em um triângulo a área do quadrado sobre um dos lados é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os outros dois, então esse triângulo é retângulo e o lado do quadrado maior é a hipotenusa. O enunciado clássico desse teorema, que se encontra na proposição 48 do livro I da obra "Os Elementos", pode ser escrito da seguinte forma:

Proposição 48 (Livro I, Os Elementos). Se em um triângulo, o quadrado sobre um dos lados for igual aos quadrados sobre os outros dois lados do triângulo, o ângulo contido por esses dois lados do triângulo é reto.

Podemos reformulá-lo, conforme nossa linguagem utilizada até o presente momento neste livro, da seguinte maneira:

Teorema 5.9 (Recíproca do teorema de Pitágoras). Se em um triângulo, a área do quadrado sobre um dos lados for igual à soma das áreas dos quadrados sobre os outros dois lados do triângulo, então esse triângulo é retângulo e o seu lado correspondente ao quadrado maior é a sua hipotenusa.

Demonstração: Considere o triângulo $\triangle ABC$ tal que a área do quadrado sobre o lado \overline{BC} seja igual à soma das áreas dos quadrados sobre os lados \overline{AB} e \overline{AC} . Assim, temos a relação algébrica

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
 (5.23)

Considere agora o segmento $\overline{AD} \perp \overline{AC}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$, conforme ilustrado na figura 5.26.

Pelo teorema 5.8 aplicado ao triângulo ΔADC temos que a área do quadrado sobre o lado \overline{DC} é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os lados \overline{AD} e \overline{AC} . Temos, portanto, a relação algébrica:

$$(DC)^2 = (AD)^2 + (AC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$
 (5.24)

Assim, podemos concluir que $DC \equiv BC$. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, chegamos à conclusão que $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ e, portanto, $\angle BAC \equiv \angle DAC$. Como $D\widehat{AC}$ é um ângulo reto, temos que o ângulo $\angle BAC$ também é reto, conseqüentemente o triân-

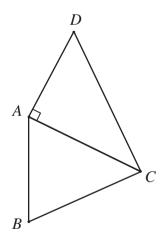


Figura 5.26 - Recíproca do teorema de Pitágoras

gulo ΔABC é retângulo e como o lado \overline{BC} , que corresponde ao maior quadrado, está oposto a esse ângulo reto, então é a hipotenusa desse triângulo.

Exercícios Resolvidos

1) Seja um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com o ângulo reto no vértice A e seja \overline{AK} a altura relativa à hipotenusa \overline{BC} . Mostre que $(AK)^2 = BK \cdot CK$.

Resolução: A figura 5.27 abaixo ilustra melhor o enunciado do problema.

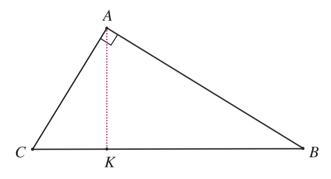


Figura 5.27 - Altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo

Como os triângulos ΔKAC e ΔKAB são retângulos no vértice K, temos, pelo teorema de Pitágoras, as seguintes igualdades:

$$(BC)^{2} = (AC)^{2} + (AB)^{2}, (5.25)$$

$$(AC)^2 = (KC)^2 + (KA)^2$$
, (5.26)

$$(AB)^2 = (KA)^2 + (KB)^2$$
. (5.27)

Substituindo (5.26) e (5.27) na equação (5.25), temos

$$(BC)^{2} = (KC)^{2} + (KB)^{2} + 2 \cdot (KA)^{2}.$$
 (5.28)

Por outro lado, como BC = KC + KB, temos

$$(BC)^2 = (KB + KC)^2 = (KC)^2 + (KB)^2 + 2 \cdot (KB) \cdot (KC)$$
. (5.29)

Comparando as expressões (5.28) e (5.29), concluímos que

$$(AK)^2 = BK \cdot CK.$$

2) (Potência de ponto) Seja uma circunferência de centro O e raio r, e um ponto P no exterior do círculo com mesmo centro e raio. Considere o segmento \overline{PQ} tangente à circunferência no ponto Q e o segmento \overline{PA} , secante à circunferência nos pontos A e B, conforme ilustrado na figura 5.28. Mostre que $(PQ)^2 = PA \cdot PB$.

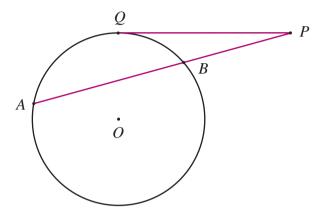


Figura 5.28 - Potência de ponto

Resolução: Vamos considerar dois casos: O primeiro, quando o segmento \overline{PA} passa pelo centro O da circunferência e o segundo caso, quando \overline{PA} não passa pelo centro.

Primeiro caso: O segmento \overline{OQ} é um raio da circunferência (O,r) como visto no capítulo 3. Uma tangente a uma circunferência em um determinado ponto é sempre perpendicular ao seu raio passando pelo ponto de tangência. Assim, $\overline{OQ} \perp \overline{PQ}$, conforme nos mostra a figura 5.29 abaixo.

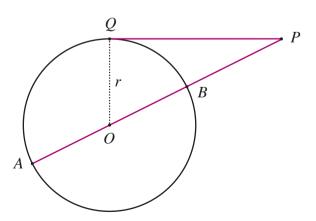


Figura 5.29 - Caso 1 da potência de ponto, quando a secante passa pelo centro

Como o triângulo $\triangle QOP$ é retângulo com o ângulo reto no vértice Q, o teorema de Pitágoras nos fornece a seguinte relação algébrica:

$$(PO)^2 = (PQ)^2 + (OQ)^2 = (PQ)^2 + r^2$$
. (5.30)

Por outro lado, como PO = PB + OB = PB + r, temos pelo teorema 5.3 que:

$$(PO)^2 = (PB)^2 + 2(PB) \cdot r + r^2$$
 (5.31)

Comparando (5.30) e (5.31), e lembrando que AB = 2.r, finalmente concluímos que

$$(PQ)^{2} = (PB)^{2} + 2 \cdot (PB) \cdot r = PB \cdot (PB + 2 \cdot r) =$$

$$= PB \cdot (PB + AB) = PB \cdot PA. \tag{5.32}$$

Segundo caso: Considere os segmentos $\overline{OQ} \perp \overline{PQ}$, \overline{OA} e \overline{OB} , todos com comprimentos iguais a r. Tome também os segmentos \overline{PO} e $\overline{OK} \perp \overline{AB}$, e que, portanto, bissecta \overline{AB} , isto é $\overline{AK} \equiv \overline{BK}$ (reveja o conteúdo do capítulo 3 para este fato). A figura 5.30 abaixo nos ilustra melhor essas construções auxiliares na resolução do problema.

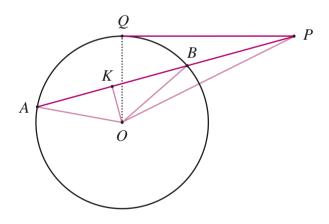


Figura 5.31 - Caso 2 de potência de ponto, quando a secante não passa pelo centro

O triângulo ΔQPO é retângulo no vértice Q, e os triângulos ΔKOP , ΔKOA e ΔKOB são retângulos, todos no vértice K. Temos, pelo teorema de Pitágoras, as seguintes relações:

$$(PO)^{2} = (PQ)^{2} + (OQ)^{2} = (PQ)^{2} + r^{2}$$
 (5.33)

$$(PO)^2 = (PK)^2 + (OK)^2 = (PB + KB)^2 + (OK)^2$$
, (5.34)

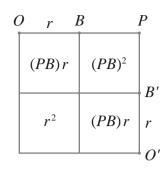


Figura 5.30 - O quadrado da soma. PB' = PB e B'O' = BO.

$$(OB)^2 = r^2 = (KB)^2 + (OK)^2$$
. (5.35)

Das expressões (5.33) e (5.34) concluímos que:

$$(PQ)^2 + r^2 = (PB)^2 + 2 \cdot PB \cdot KB + (KB)^2 + (OK)^2.$$
 (5.36)

que em decorrência de (5.35) pode ser escrito ainda como:

$$(PQ)^{2} = (PB)^{2} + 2 \cdot PB \cdot KB = PB \cdot (PB + 2 \cdot KB) =$$

$$PB \cdot (PB + AB) = PB \cdot PA. \tag{5.37}$$

3) A média geométrica entre dois números reais positivos a e b é definida como a raiz quadrada de seu produto, isto é, $x = \sqrt{a.b}$. A partir do resultado do exercício resolvido (1) desta seção, proponha uma construção geométrica com régua e compasso para encontrar a média geométrica de dois números.

Resolução: Sejam dois números reais positivos $a \in b$, considere um segmento AB de comprimento igual a a e sobre a semi-reta ABtome o segmento BC de comprimento b de forma que $B \in AC$. Para podermos utilizar o resultado do exercício resolvido(1), seção 5.5, a idéia é construirmos um triângulo retângulo ΔDAC cuja hipotenusa seja AC e de tal forma que sua altura relativa à hipotenusa seja exatamente o segmento DB, assim, $(DB)^2 = AB \cdot BC$. Para construir esse triângulo retângulo, temos que utilizar o resultado visto no capítulo 3, que estabelece que o ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Assim, temos que construir uma circunferência cujo diâmetro seja exatamente o segmento AC, isto é facilmente obtido determinando-se o ponto médio de AC, vamos denominá-lo O, e então traçar a circunferência (O,OA). Para determinar o vértice D do triângulo retângulo, basta determinar a reta \mathbf{r} , perpendicular ao segmento AC por B. O ponto D procurado poderá ser escolhido dentre os dois pontos de intersecção da reta r com a circunferência (O,OA).

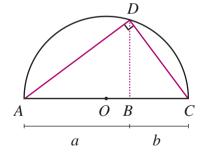


Figura 5.32 - Ângulo inscrito no semicírculo é reto

Exercícios Propostos

1) Baseado no resultado do exercício resolvido (3) da seção 5.5, elabore uma construção com régua e compasso para encontrar a raiz quadrada de um número positivo.

- 2) Baseado no resultado do exercício resolvido (1) da seção 5.5, elabore uma construção com régua e compasso para encontrar o quadrado de um número positivo.
- 3) Dados os segmentos de comprimento a e b, construa com régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.
- 4) Um bambu de 10 m se quebrou a uma altura *h*, de tal forma que sua parte superior, que não se desgrudou totalmente da inferior, se dobrou e a sua ponta tocou o chão a uma distância de 3 m da base. A que altura o bambu se quebrou?
- 5) Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado *a* .
- 6) Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado *l* .
- 7) Com uma corda de 40 m construímos um quadrado. Com a mesma corda, agora, construímos um trapézio isósceles cuja base maior é o dobro da menor e cujos lados não paralelos medem o mesmo que a base menor. Determine a razão entre as áreas do quadrado e do trapézio.

Problemas

- Calcular a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r. Calcule também a área de um hexágono regular circunscrito à mesma circunferência.
- 2) Calcule a razão entre as áreas de um quadrado circunscrito e de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio *r*.
- 3) Sejam E e F os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio ABCD, cujos lados paralelos são \overline{AB} e \overline{CD} . Mostre que $A(\Delta ABF) + A(\Delta CDF) = A(\Delta AEF) + A(\Delta CEF)$.
- 4) Por um ponto arbitrário de uma das diagonais de um paralelogramo trace duas paralelas aos lados, decompondo o paralelogramo em quatro menores. Mostre que dois desses paralelogramos possuem a mesma área.
- 5) Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são os vértices de um paralelogramo cuja área é exatamente a metade da área do quadrilátero original.

6) Na figura 5.31 abaixo, ABCD e EDGF são paralelogramos. Também temos que $E \in \overline{AB}$ e $C \in \overline{GF}$. Mostre que esses paralelogramos possuem a mesma área.

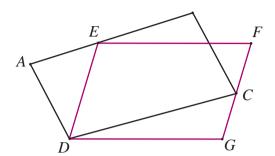


Figura 5.33 - Figura para o problema (6)

7) Na figura 5.32 abaixo, $\overline{PQ} \perp \overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ e $\overline{PA} \equiv \overline{PD}$. Sabendo-se que AB = 9, BC = 8 e DC = 7, calcule a área do quadrilátero APQB.

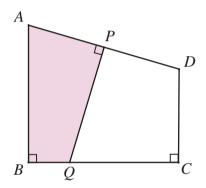


Figura 5.34 - Figura para o problema (7)

8) A partir da figura 5.33 abaixo, demonstre de outra maneira o Teorema de Pitágoras.

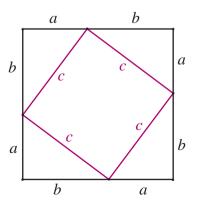


Figura 5.35 - Figura para o problema (8).

9) Mostre que a área de um polígono regular é igual ao produto da metade do seu perímetro (semiperímetro) pela medida do apótema (segmento perpendicular ao lado a partir do centro da circunferência circunscrita).

Resumo

Neste capítulo você aprendeu que:

- 1) Uma curva plana fechada e simples separa o plano em duas regiões distintas.
- 2) A área é um número real positivo associado a uma região delimitada por uma curva plana fechada e simples.
- 3) Figuras congruentes possuem a mesma área.
- 4) A área é uma grandeza aditiva.
- 5) A unidade padrão de área é um quadrado de lado 1.
- 6) A área de um quadrado de lado a é igual a a^2 .
- 7) A área de um retângulo de lados a e b é igual a a.b.
- 8) A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a b.h.
- 9) A área de um triângulo de base b e altura h é igual a $\frac{b \cdot h}{2}$.
- 10) A área de um polígono arbitrário é calculada utilizando-se uma triangulação.
- 11) A área de qualquer figura plana pode ser aproximada por excesso e por falta com o uso de polígonos inscritos e circunscritos.
- 12) Muitos problemas geométricos realmente difíceis podem ser resolvidos com facilidade pensando-se em áreas.
- 13) O teorema de Pitágoras é, primordialmente, um teorema sobre áreas, muito mais que uma simples relação algébrica entre os lados de um triângulo retângulo.

Bibliografia comentada

1) LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

Sobre o tema de áreas, o mestre Elon escreve um artigo nesse livro intitulado "Polígonos Eqüidecomponíveis". No artigo o autor discute uma caracterização do conceito de área em termos da decomposição das figuras elementares. Basicamente, demonstra-se o teorema de Bolyai-Gerwien que afirma que dois polígonos possuem a mesma área se, e somente se, puderem ser decompostos no mesmo conjunto de polígonos elementares.

2) Revista Scientific American, série Gênios da Ciência: **Arquimedes, Pioneiro da Matemática**. São Paulo: Duetto, ed. 6, 2005.

Nessa revista é feita uma revisão dos principais resultados do grande matemático de Siracusa de uma forma simples e acessível ao público com uma formação matemática compatível com o ensino médio. Além disso, discute-se a repercussão de seus trabalhos ao longo da história, bem como o trabalho de recuperação e interpretação de seus escritos.

Capítulo 6

Transformações Geométricas

Capítulo 6

Transformações Geométricas

Desenvolveremos, neste capítulo, um estudo das transformações geométricas; simetria axial (reflexões, ortogonal); simetria central; translação; rotação; e da homotetia, como transformações do plano no plano. Em algumas situações-problema vamos tratar as transformações como ferramentas para colocar em evidência propriedades. Relembraremos as principais propriedades dessas transformações: conservação das distâncias e das áreas, de alinhamento, do paralelismo, do ponto médio de um segmento, da medida dos ângulos e a ortogonalidade.

O objetivo deste capítulo é apresentar as transformações geométricas (isometrias e homotetia) e realizar o estudo de um número variado de problemas em que as configurações inerentes convidam, estimulam a aplicação de uma transformação. Transformações que, às vezes, são objeto de estudo e, em outras, têm por função ser ferramenta de resolução.

Introdução

A reforma de ensino de 1998, via os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), considera importantes o estudo das isometrias e da homotetia como ferramentas para o entendimento das configurações e sugere que isso seja feito no Ensino Fundamental.

"Deve-se destacar [...] a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permitam o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes" (Parâmetros Curriculares, p. 51).

Estudos realizados na França por LABORDE & GRENIER (1987) mostraram que as transformações geométricas no ensino, são apreendidas em três níveis:

- Nível 1 Como uma relação entre duas configurações geométricas ou uma relação entre duas partes de uma mesma configuração; nesse nível, o caráter funcional da transformação é ausente.
- Nível 2 Como a aplicação de um conjunto de pontos do plano nele mesmo.
- Nível 3 Como uma ferramenta funcional para colocar invariantes em evidência.

Se você conhece um pouco os livros didáticos do Ensino Fundamental, pode responder a seguinte pergunta: Em que níveis as transformações geométricas são estudadas? Podemos dizer que o que se faz nos livros didáticos do Ensino Fundamental é uma preparação para o estudo das transformações no Nível 1? Talvez haja autores que desenvolvam um pouco mais a simetria axial (ortogonal) na 5ª série e a simetria central na 6ª série. A rotação e a translação por vezes são citadas rapidamente nos livros da 7ª e/ou nos livros da 8ª série.

Enfim, por que estudar transformações geométricas?

Com o estudo das **isometrias** e da **homotetia** teremos uma nova ferramenta para o estudo de figuras congruentes e semelhantes e para a resolução de diferentes problemas de construção.

O uso de régua e compasso para a solução de problemas de construção geométrica adequados ao Ensino Fundamental se amplia, pois em muitos problemas de construção a resolução com o uso de transformações geométricas fica mais simples. As transformações geométricas também são ferramentas para o estudo das propriedades das figuras geométricas. Este aspecto é colocado em bastante evidência nos PCN, e talvez seja o aspecto mais considerado nos livros didáticos atuais.

Para estudar as transformações, alguns conhecimentos elementares sobre configurações usuais que você estudou nos capítulos anInvariantes: propriedades de uma figura.

teriores são necessários: triângulo isósceles, triângulo retângulo, triângulo equilátero, quadrado, losango, paralelogramo, círculo, mediatriz, bissetriz, etc. Também precisamos saber um mínimo sobre vetores: regra do paralelogramo, relação de Charles, teorema dos pontos médios e teorema do centro de gravidade de um triângulo.

Você está convidado a embarcar conosco nesta busca de conhecimento. Nos exercícios da última seção deste capítulo trabalharemos com a simetria axial (ortogonal e/ou reflexão), simetria central, rotação, translação e homotetia. E você avaliará o que aprendeu.

6.1 O Que é uma Transformação Geométrica?

Antes de abordar a definição, vamos realizar a atividade a seguir:

Atividades

Reconhecer que transformação atua sobre a figura. Ou seja, determinar:

- que transformação leva uma figura sobre a outra?
- que transformação deixa invariante uma figura?

Descreva com suas próprias palavras.

1) a) Que transformação leva F sobre F_1 ? F sobre F_2 ? F sobre F_3 ? F sobre F_4 ?

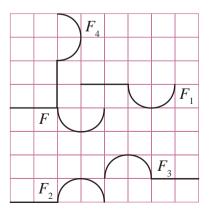


Figura 6.1

Retirada do livro Terracher-Math; Editora Hachete Éducation; 1994. b) Para cada uma das quatro figuras, determinar a transformação que a leva sobre cada uma das outras três:

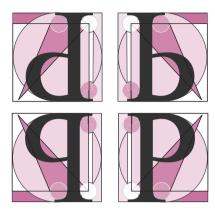


Figura 6.2

- 2) Entre as figuras abaixo precisar quais:
 - a) têm um centro de simetria?
 - b) têm um ou vários eixos de simetria? (indicar o número)
 - c) não têm centro nem eixo de simetria?
 - d) são invariantes por uma rotação? (indicar o ângulo da rotação).

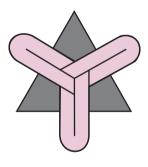


Figura 6.3.1

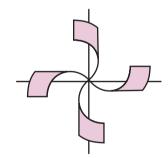


Figura 6.3.2

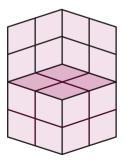


Figura 6.3.3

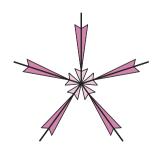


Figura 6.3.4

Você conseguiu realizar as atividades? Se você teve dificuldade, realize o estudo deste capítulo, depois volte a resolvê-las. Vamos iniciar nosso estudo com a definição de transformação do plano no plano, ou seja, uma transformação no plano.

Como você já viu, uma figura F é um conjunto de pontos de π .

Definição 6.1. Seja π um plano. Definimos uma transformação geométrica no plano π como sendo uma função de π em π que associa cada ponto M do plano π um ponto M' de π , denotado por M' = T(M). M' é chamado imagem de M por T. Em particular, se F é uma figura no plano, a imagem de F por F é o conjunto de pontos imagens de F, denotado por F' = T(F).

Interprete as ações realizadas nas atividades 1 e 2 à luz desta definição. Você conseguiu identificar as transformações que permitiram a execução das tarefas da atividade 1, itens a e b?

Se você está com dificuldade de entender, não se preocupe. Agora vamos estudar cada uma das transformações geométricas: as isometrias (simetria axial ou ortogonal ou reflexão; simetria central, translação e rotação) e a homotetia.

6.2 Simetria Axial ou Ortogonal ou Reflexão

Para compreender os conceitos, sugerimos que faça os desenhos a mão livre mesmo, porém bem legíveis. Tente representar, por meio de uma figura, o que é dito em linguagem natural. Esta ação ajuda, em geral, na compreensão e abstração dos conceitos.

Agora estudaremos *simetria ortogonal* (também designada por simetria axial ou reflexão). Daqui para a frente, neste capítulo, para simplificar, vamos usar sempre a terminologia *simetria axial*. Vamos então entender o que faz esta transformação ser chamada simetria *axial*.

Definição 6.2. Seja *d* uma reta. Definimos simetria axial em relação a *d* como sendo a transformação geométrica definida como segue:

- i) se *M* é um ponto do plano que não pertence a reta *d*, a imagem de *M* por esta transformação é um ponto *M'* tal que d seja a mediatriz do segmento *MM'*;
- ii) se *M* pertence à reta *d*, a imagem de *M*, *M'* é o próprio ponto *M*.

O ponto *M'* assim associado ao ponto *M* é chamado *simétrico de M em relação a d*, ou ainda, *imagem de M pela reflexão do eixo d*.

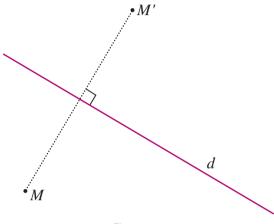


Figura 6.4

Como construir a imagem por simetria axial?

Seja d uma reta e M um ponto do plano. Para construir a imagem de um ponto M que não pertence a d, por simetria axial, procedemos da seguinte maneira: construímos uma reta r perpendicular à reta d passando por M. Depois, com centro em $P = d \cap r$ e raio PM, traçamos uma circunferência (C). Temos os pontos M e M', pontos de intersecção de $(C) \cap r$. O ponto M' assim construído é o ponto simétrico do ponto M em relação a d. Se M pertence a d, o seu simétrico em relação a d é ele próprio. Ou seja, neste caso a imagem de M, M' = M.

Notação: em geral anotamos a simetria axial de eixo d por S_d e escrevemos:

$$M' = S_d(M)$$
 ou $M \xrightarrow{S_d} M'$

Como construir a imagem de uma figura por uma simetria axial?

Vejamos o procedimento:

Seja d uma reta e ΔABC um triângulo como na fig. 6.5. Construir a imagem do triângulo ΔABC por meio de uma simetria axial em relação à reta d. Para obter a imagem de uma figura F por uma simetria axial, basta construir as imagens dos pontos da figura F permitindo a construção da imagem. No caso do triângulo, precisamos construir as imagens dos vértices. Por exemplo:

Construamos $A' = S_d(A)$, $B' = S_d(B)$ e $C' = S_d(C)$.

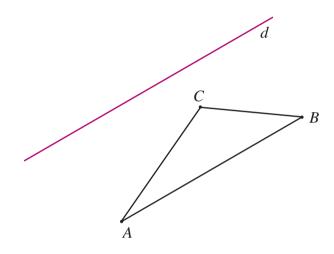


Figura 6.5 - situação inicial

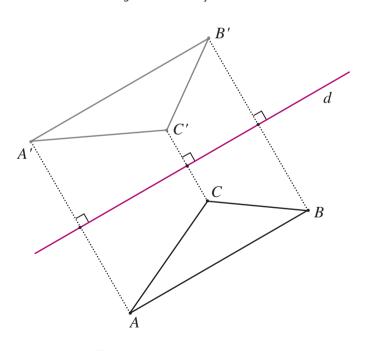


Figura 6.6 – $\Delta A'B'C' = S_d(\Delta ABC)$

Temos: $\Delta A'B'C' = S_d(\Delta ABC)$; veja, d é a mediatriz dos segmentos $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{AA'}$.

Esta transformação é dita simetria axial. As figuras são simétricas em relação a um eixo. Outras vezes é dita simetria ortogonal o que se justifica, pois para determinar a imagem construímos uma reta ortogonal ao eixo. Também é chamada de reflexão devido ao fato de que a imagem é uma reflexão da figura dada em relação ao eixo.

Exercício Proposto

1) Traçar a imagem de uma reta, de um segmento e de um círculo por simetria axial em relação à reta *d*.

Com apoio do Cabri Geométrico, determine em cada caso:

a) A imagem da reta r por simetria axial, anote sua imagem por r' e compare com o resultado dado nas seguintes figuras:

Acesse nosso ambiente virtual para realizar o download deste programa.

i) r paralela à d:

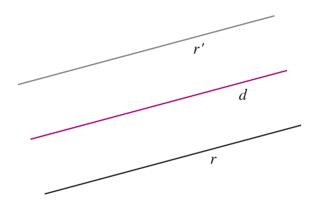


Figura 6.7

ii) r e d concorrentes:

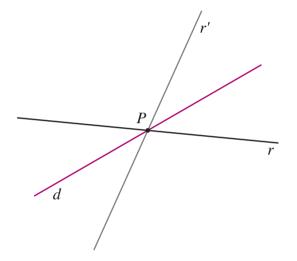


Figura 6.8

iii) r e d perpendiculares:

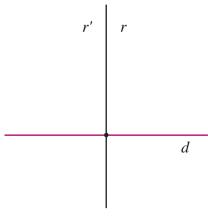
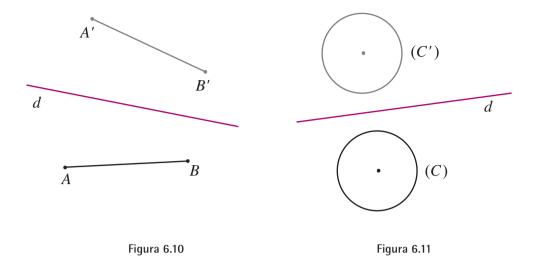


Figura 6.9

b) Por simetria axial em relação a d, determine a imagem de um segmento \overline{AB} e de um círculo (C).



O que se pode concluir?

Estes exemplos ilustram que a imagem por simetria axial de uma reta é uma reta; de um segmento é um segmento; de um círculo é um círculo.

Ainda temos a seguinte propriedade:

Propriedade 1. Sejam r e r' duas retas concorrentes em um ponto P e simétricas em relação a uma reta d. Então P o ponto de intersecção de r e r' está sobre d. (Figura 6.8)

Exercício Resolvido

1) Seja d uma reta, A e B dois pontos não situados sobre d e tais que as retas (AB) e d, não são paralelas. Sejam A' e B' os pontos tais que d seja a mediatriz dos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. Demonstre que as retas \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ se interceptam sobre d.

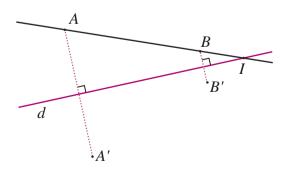


Figura 6.12

Observação: para demonstrar que duas retas \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{A'B'}$ não paralelas se cortam sobre uma reta d, é suficiente demonstrar que elas se correspondem por uma reflexão de eixo d (pela propriedade 1).

Demonstração: Seja d a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Então A' é imagem de A pela simetria axial S_d de eixo d. Analogamente, d é mediatriz do segmento $\overline{BB'}$. Então B' é imagem de B por S_d .

Assim, a imagem da reta \overrightarrow{AB} pela simetria axial S_d é, então, a reta $\overrightarrow{A'B'}$. Consideremos I o ponto de intersecção das retas \overrightarrow{AB} e d. I está sobre d. Então, $S_d(I) = I$.

Mas a reta $\overrightarrow{A'B'}$, imagem de \overrightarrow{AB} , passa pela imagem de I, isto é, por I. Portanto, as retas \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{A'B'}$ se interceptam em I, logo, sobre d.

Observação: Por uma simetria axial de eixo d, os pontos de d são invariantes.

Eixos de simetria de uma figura

Se você olhar em um livro didático da 5ª série do Ensino Fundamental, é possível perceber que inúmeros exercícios são destinados a identificar os eixos de simetria de uma figura. Mas, afinal, como definir um eixo de simetria?

Definição 6.3. Dizer que uma reta d é um eixo de simetria de uma figura F significa que a imagem de F pela simetria axial de eixo d é a própria figura F.

Você já havia se apercebido disso?

Vejamos alguns exemplos: em cada uma das figuras abaixo as retas d ou d' são eixos de simetria.

- a) Seja F um triângulo isósceles.
 - d é a mediatriz do segmento \overline{AB} .
 - d é o eixo de simetria do triângulo $\triangle ABC$

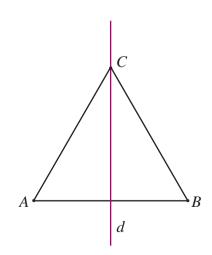


Figura 6.13

- b) Seja F formada por duas retas r e r'.
 - i) São eixos de simetria d e d', r e r' são paralelas, d é equidistante de r e r'. d' é uma reta qualquer perpendicular a d (fig. 6.14).
 - ii) Dadas r e r', conforme a figura 6.15, d e d' são eixos de simetria; d' é bissetriz do ângulo $\angle ror'$ e d é a bissetriz do ângulo $\angle r'or$ (fig. 6.15).

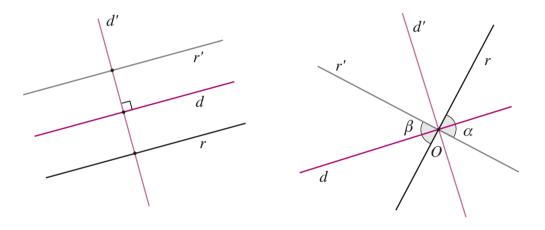


Figura 6.14 Figura 6.15

c) Seja F formada por uma circunferência.
 d, eixo de simetria, é uma reta qualquer que passa pelo ponto O, centro da circunferência.

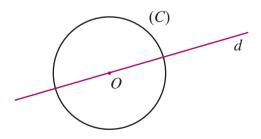


Figura 6.16

d) Seja F formada por duas circunferências. (C) e (C') são duas circunferências de mesmo raio; d, um eixo de simetria, é a reta \overrightarrow{OO} ; d', outro eixo, é a reta que passa pelos pontos A e B.

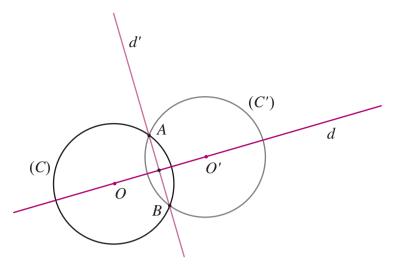


Figura 6.17

- e) Seja *F* uma figura formada por uma circunferência (*C*) e duas retas tangentes.
 - i) *d* e *d'* são eixos de simetria; *d* é equidistante das retas tangentes; *d'* é perpendicular a *d* passando pelo centro *O* da circunferência (fig. 6.18).
 - ii) as retas tangentes passam por um ponto $A \notin (C)$. As duas retas tangentes se interceptam em A; d, eixo de simetria, é a reta \overrightarrow{AO} , onde O é o centro da circunferência (fig. 6.19).

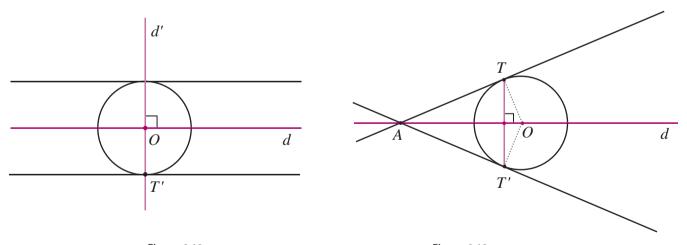


Figura 6.18

Figura 6.19

Exercício Resolvido

2) Sejam (C) e (C') dois círculos de centros respectivos O e O' e de raios de mesma medida. Sejam A e B os pontos de inter-

secção de (C) e (C'). Seja d a reta que passa por O e O' e d' a reta que passa por A e B. Seja P um ponto que pertence à circunferência (C) e distinto de A e B. Suponhamos que d e d' sejam eixos de simetria.

Determine as imagens dos pontos *P*, *A* e *B* pela:

- a) simetria axial de eixo d
- b) simetria axial de eixo d'.

Observação: para determinar os pontos imagens, nós vamos utilizar a figura associada que já conhecemos de duas circunferências de mesmo raio, onde as retas d e d' são eixos de simetria da figura. Consideremos então a figura:

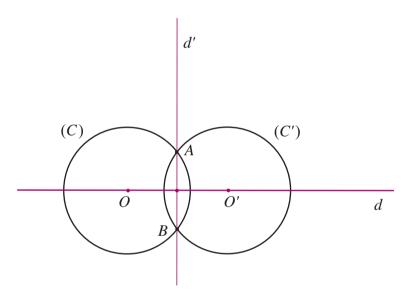


Figura 6.20 - figura de estudo

Resolução:

a) Pela simetria axial S_{d}

Denotamos M a imagem de P por S_d , isto é: $S_d(P) = M$. Então M é um ponto situado sobre a reta r, perpendicular a d, e que passa por P.

M é o ponto de intersecção da reta r e da circunferência (C).

Da mesma maneira, B é imagem de A.

O ponto O situado sobre d é invariante por $S_{d'}$, ou seja, $S_d(O) = O$.

b) Pela simetria axial de eixo d'

Denotamos por P' a imagem de P por $S_{d'}$.

P' é um ponto da figura situado sobre a reta r' paralela a d e que passa por P. O ponto P pertence à circunferência (C). Logo, o ponto P' pertence à circunferência (C'). A reta r' encontra (C') em dois pontos; a imagem de P é aquela que não se encontra no mesmo lado de d' que P.

O ponto A situado sobre d' é invariante por $S_{d'}$, isto é, $S_{d'}(A) = A$. O mesmo acontece com B, $S_{d'}(B) = B$.

A imagem do ponto $O \in O'$. De fato, $C \in C'$ são imagens um do outro por $S_{d'}$. A imagem do centro O de C é, então, o centro O' de C'.

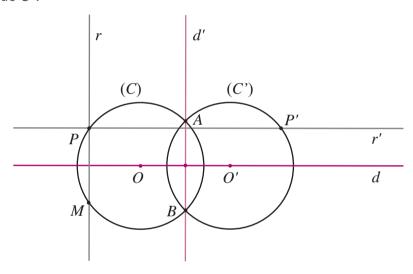


Figura 6.21

6.3 Simetria Central

Definição 6.4. Seja O um ponto fixo. A imagem de um ponto M diferente de O pela simetria de centro O é o ponto M', tal que O é o ponto médio do segmento $\overline{MM'}$. Se M = O, a imagem de M é ele mesmo.

A Simetria Central é também chamada simetria de centro *O*.

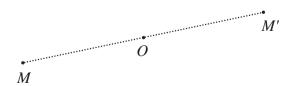


Figura 6.22

Notação: $M' = S_O(M)$; ou $M \xrightarrow{S_O} M'$

Exercício Resolvido

Construir a imagem do polígono *ABCDE* por simetria de centro *O*.

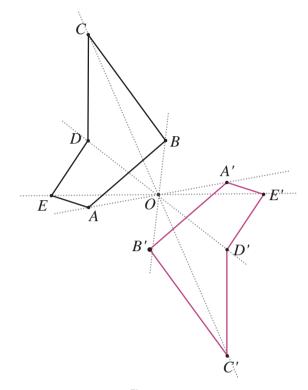


Figura 6.23

Exercício Proposto

Seja ABCD um paralelogramo de centro O e r uma reta que passa por A. Denotamos por S_o uma simetria central de centro O.

- a) Determinar $S_o(A)$; $S_o(B)$, $S_o(C)$ e $S_o(D)$.
- b) Seja M um ponto sobre r e diferente de A. Construir o simétrico de M, isto é M' por S_o .
- c) Determinar a imagem de r pela simetria S_{o} .

6.4 Translação

Para estudar a translação precisamos ter a noção de vetor, conhecer a relação de Charles e a regra do paralelogramo. Vamos apresentar aqui esses conceitos:

Conceito de vetor. Vetor é um conjunto de segmentos eqüipolentes. Um vetor tem comprimento, direção e sentido.

Notações:

• Representação gráfica:



Figura 6.24

• Quando o vetor está definido por dois pontos, é denotado por: \overrightarrow{AB} .

Note que, no vetor *AB*, *A* é o ponto de partida, de início do vetor, e *B* é o ponto de chegada.

• Muitas vezes representamos um vetor qualquer por uma letra minúscula com a flecha em cima, por exemplo, \vec{u} .

Atenção: sempre que você pegar um livro para estudar, verifique a notação usada, pois o autor escolhe o tipo de representação que prefere.

Soma de vetores - Relação de Charles

Para quaisquer que sejam os pontos *A*, *B* e *C*, temos:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
.

Vejamos na figura abaixo:

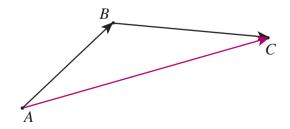


Figura 6.25 - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}

Caso geral: Sejam quatro pontos *A*, *B*, *E*, e *F*. O ponto *C*, tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}$, é o ponto *C*, tal que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$.

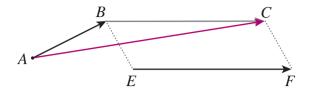


Figura 6.26 - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}

Regra do paralelogramo. Sejam os pontos A, B e C. Seja o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Assim, D é o quarto vértice do paralelogramo ABCD de lados AB e AC.

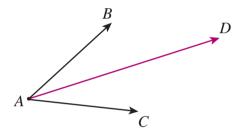


Figura 6.27

Com isto posto, vamos estudar a translação.

Seja \vec{u} um vetor dado.



Figura 6.28

Definição 6.5. Pela translação de vetor \vec{u} associamos a cada ponto P do plano um ponto P', tal que $PP' = |\vec{u}|$.

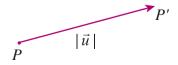
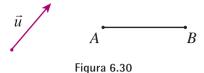


Figura 6.29

Notação: Exemplo: seja \vec{u} um vetor, \overline{AB} um segmento, conforme a figura seguinte:



A imagem do segmento \overline{AB} pela translação do vetor é o segmento $\overline{A'B'}$, onde $A' = t_{\vec{u}}(A)$ e $B' = t_{\vec{u}}(B)$.

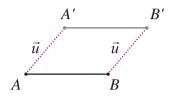


Figura 6.31

Em geral, anota-se $t_{\vec{u}}$ a translação de vetor \vec{u} , e escrevemos $P'=t_{\vec{u}}(P)$ ou, ainda, $P\to P'$, e lemos "translação de vetor \vec{u} ".

Propriedade. Se r e s são ortogonais as imagens $t_{\bar{u}}$ também são ortogonais.

Quando o vetor \vec{u} está determinado por dois pontos, por exemplo, \overrightarrow{AB} , a translação é denotada por $t_{(A,B)}$ ou por $t_{\overline{AB}}$, e lemos translação de vetor \overrightarrow{AB} .

Por exemplo:

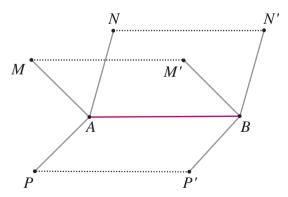


Figura 6.32

Pela $t_{\overline{AB}}$ conforme figura acima: M tem por imagem M', N tem por imagem N' e P tem por imagem P'.

No exemplo a seguir, veja que a imagem do ponto M pela translação de vetor $\overrightarrow{AA'}$ é o ponto M', tal que o vetor $\overrightarrow{MM'}$ é igual ao vetor $\overrightarrow{AA'}$.

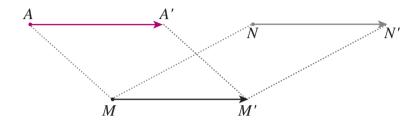


Figura 6.33

Exercício Resolvido

Construir a imagem de uma circunferência usando a translação de vetor \vec{u} .

Resolução: Tracemos uma reta A paralela ao vetor \vec{u} passando por P. Abrir o compasso de tamanho $|\vec{u}|$, centrar em P e traçar uma circunferência C''. Marcar $P' = C'' \cap s$. Analogamente construir a imagem do ponto O, centro de (C).

Temos:
$$t_{\bar{u}}(O) = O'$$
, e $t_{\bar{u}}(C) = C'$.
$$t_{\bar{u}}(P) = P'$$

C' é a circunferência de centro em O' e raio O'P'.

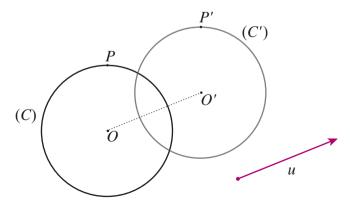


Figura 6.34

Para construir a imagem de uma circunferência basta construir a imagem do centro do círculo desta circunferência e de um ponto da circunferência.

Exercícios Propostos

1) Traçar um triângulo $\triangle ABC$, isósceles em A, depois construir os pontos D e E, imagens dos pontos A e B pela translação de vetor \overrightarrow{CB} .

Mostrar que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BDE$ são isósceles.

2) Sobre a figura a seguir, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo. O ponto C é o ponto médio dos segmentos AF e BE:

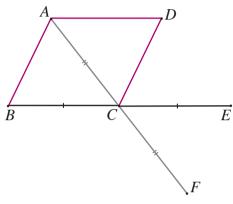


Figura 6.35

Qual é a natureza dos quadriláteros *ADEC* e *DEFC*? **Justificar**.

6.5 Rotação

Seja O um ponto fixo. A imagem de um ponto P, distinto de O pela rotação de centro O e de ângulo α no sentido anti-horário, é o ponto P', tal que OP' = OP e o ângulo $P\widehat{OP}' = \alpha$. Se P = O, sua imagem é ele próprio.

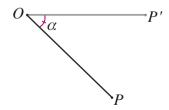


Figura 6.36

Notação: $R_{o,\alpha}(P) = P'$.

Para mostrar, construa primeiro o triângulo ΔABC , as imagens, e analise a figura.

Dizer a natureza dos quadriláteros é dizer o tipo de quadrilátero. Por exemplo, paralelogramo, retângulo etc.

Leia-se: R é rotação de centro O e de ângulo α .

Exemplo:

Seja $\alpha = 30^{\circ}$ e o sentido escolhido é anti-horário. Sejam O, M e A pontos quaisquer dados. Então:

a) Quem é M', imagem de M pela rotação de centro O e ângulo $\alpha = 30^{\circ}$? Quem é A', imagem de A pela rotação de centro O e ângulo $\alpha = 30^{\circ}$?

Vejamos:

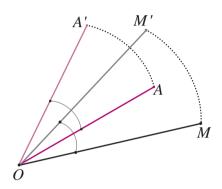


Figura 6.37

- O ponto M tem por imagem o ponto M'; $M\widehat{O}M' = 30^{\circ}$ e OM = OM'.
- O ponto *A* tem por imagem o ponto *A'*; $\widehat{AOA'} = 30^{\circ}$ e AO = OA'.
- b) Seja $\alpha = 50^{\circ}$

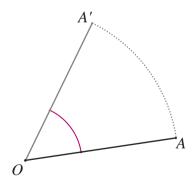


Figura 6.38

Confira usando o transferidor e a régua: $A\widehat{O}A' = 50^\circ$ e AO = OA'. E se definimos a rotação no sentido horário? Qual é a imagem dos pontos M e A para um certo α ?

Atribua valores diferentes para α e determine a imagem de A e de M (dados abaixo), pela rotação de centro O e de ângulo α no sentido horário.

`A

Figura 6.39

0

Exercícios Resolvidos

1) Construir a imagem de um paralelogramo *ABCD* usando a rotação de centro O e de ângulo $\alpha = 120^{\circ}$.

Resolução: Seja $A' = R_{O,120^{\circ}}(A)$, $B' = R_{O,120^{\circ}}(B)$, $C' = R_{O,120^{\circ}}(C)$ e $D' = R_{O,120^{\circ}}(D)$. Então $A'B'C'D' = R_{O,120^{\circ}}(ABCD)$.

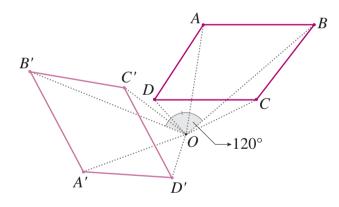


Figura 6.40

2) Seja ΔABC um triângulo retângulo isósceles em A. M é o ponto médio do segmento BC. Seja r uma rotação de um quarto de volta de centro M e no sentido anti-horário. Isto é, r é uma rotação de centro M e de ângulo 90° no sentido anti-horário.

Determine a imagem de *C* por *r*, depois a imagem de *A*.

Quando na rotação o sentido não está explicitado, por convenção, usa-se o sentido anti-horário.

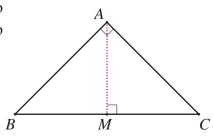


Figura 6.41

Comentário:

- a) Em um triângulo retângulo em *A*, o comprimento da mediana saindo de *A* é igual a metade da hipotenusa.
- b) Temos MA = MB, $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ e o sentido da rotação é antihorário.

Resolução:

Imagem de C

Em um triângulo $\triangle ABC$, como M é um ponto médio do segmento \overline{BC} , \overline{AM} é a mediana. Como o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles em A, então \overline{MA} é a altura de $\triangle ABC$. Logo $\widehat{AMC} = 90^{\circ}$.

Por outro lado, o triângulo ΔABC é retângulo em A. Então $AM=\frac{BC}{2}$. Portanto, AM=MC. Assim, temos $\widehat{AMC}=90^\circ$ e MC=MA.

Logo, passamos de C para A, segundo uma rotação de um quarto de volta de centro M e no sentido anti-horário. Sendo r esta rotação, temos r(C) = A.

• Imagem de A

De maneira análoga mostramos que r(A) = B

(Como exercício, redija esta demonstração como foi feito para determinar a imagem de *C*).

6.6 Propriedades das Transformações Geométricas "Isometrias"

Antes de explicitarmos as propriedades, vamos determinar a imagem de retas, ângulos, segmentos, triângulos, círculos e de qualquer outra figura que você quiser, com apoio do programa **Cabri Geométrico**, pela simetria axial, central, translação e rotação.

Em todos os exemplos, compare a imagem obtida com a figura inicial dada. Em seguida, faça conjecturas sobre as propriedades das isometrias.

Agora confira se suas conjecturas são consistentes:

Propriedades comuns às simetrias axiais, centrais, translações e rotações

Propriedade 1. Conservação do alinhamento

A imagem de uma reta é uma reta. Logo, se três pontos *A*, *B*, *C* estão alinhados, suas imagens respectivas *A'*, *B'*, *C'* também são alinhadas.

Propriedade 2. Conservação do paralelismo

Quando s e r são duas retas paralelas, suas imagens s' e r' também são paralelas. Disto resulta que a imagem de um paralelogramo, por exemplo, é um paralelogramo.

Propriedade 3. Conservação de distâncias e áreas

- A imagem de um segmento é um segmento de mesmo comprimento.
- Se uma figura D tem uma área x, sua imagem D' também tem área x.

Propriedade 4. Conservação do ponto médio

Seja M o ponto médio do segmento PQ. Seja $\overline{P'Q'}$ a imagem de \overline{PQ} . A imagem de M será M', e M' será o ponto médio do segmento $\overline{P'Q'}$.

Propriedade 5. Conservação da medida dos ângulos, logo da ortogonalidade

Sendo $\angle A'M'B'$ a imagem do ângulo $\angle AMB$, então:

$$A'\widehat{M}'B'=A\widehat{M}B.$$

Como consequência, quando duas retas r e s são perpendiculares, suas imagens também são.

Verifique estas propriedades nos exemplos que apresentamos a seguir:

• Simetria axial de eixo d

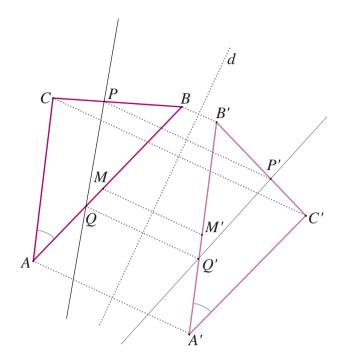


Figura 6.42

• Rotação de centro O e de ângulo 45°

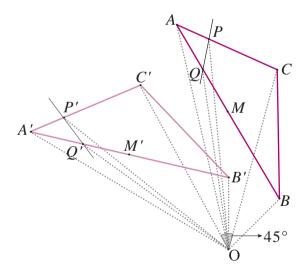


Figura 6.43

Agora você, com o apoio do programa **Cabri Geométrico**, faça um exemplo para ilustrar as propriedades apresentadas acima, usando simetria axial, simetria central, translação e rotação.

Propriedade 6. As translações e as simetrias centrais transformam uma reta em uma reta paralela.

Exemplos:

• $s' = S_o(s)$; $s \in s'$ são paralelas.

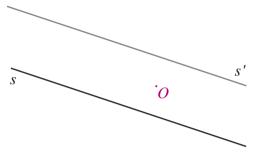


Figura 6.44

• $d' = t_u(d)$; $d \in d'$ são paralelas.

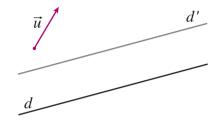


Figura 6.45

Exercícios Resolvidos

1) Traçar um paralelogramo ABCD de centro O. Traçar uma reta d passando por O. Seja P o ponto de intersecção de d com a reta \overrightarrow{AB} e Q o ponto de intersecção de d com a reta \overrightarrow{DC} . Demonstrar que o ponto O é o ponto médio do segmento \overline{PQ} , utilizando a simetria de centro O.

A figura 6.46 representa as condições do enunciado.

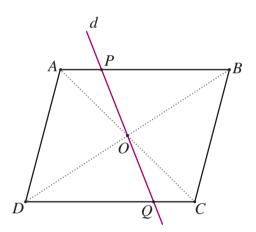


Figura 6.46

Resolução:

Seja S_o a simetria de centro O.

Por esta simetria, a imagem da reta \overrightarrow{AB} é a reta \overrightarrow{CD} , pois o quadrilátero ABCD é um paralelogramo de centro O.

A reta d passa por O, então a imagem de d é ela mesma.

Portanto, podemos deduzir que o ponto P pertence à reta \overline{AB} e também à reta d e sua imagem é o ponto Q, pois \overline{CD} e d são imagens respectivas de \overline{AB} e de d pela simetria de centro O, e Q é o ponto de intersecção, $Q = (\overline{CD} \cap d)$.

Assim, Q é o ponto simétrico de P em relação ao ponto O, e o ponto O é ponto médio do segmento \overline{PQ} .

Para mostrar que dois segmentos têm mesmo comprimento podemos mostrar que um é imagem do outro por uma simetria axial, simetria central, uma translação, ou rotação.

2) Seja ABC um triângulo isósceles em A, M o ponto médio do segmento \overline{AC} e N o ponto médio do segmento \overline{AB} . Mostre que BM = CN.

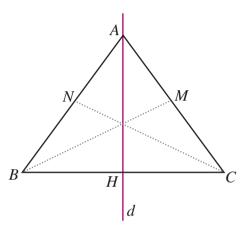


Figura 6.47

Resolução:

d é a mediatriz do segmento BC e é um eixo de simetria do triângulo isósceles ΔABC . Logo, B e C são imagens um do outro pela simetria axial S_d de eixo d. Também $S_d(A) = A$, pois A pertence a d. Assim, os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} são imagem um do outro pela simetria axial de eixo d. Conseqüentemente $S_d(N) = S_d(M)$.

A imagem do segmento \overline{BN} por S_d é então o segmento \overline{CM} , pois $S_d(B)=C$ e $S_d(M)=N$.

Logo, os segmentos \overline{BM} e \overline{CN} têm mesmo comprimento, isto é, BM = CN .

Vimos aqui a utilização da simetria central para mostrar que dois segmentos têm o mesmo comprimento e que o ponto O é o ponto médio de um determinado segmento em uma configuração dada. Nesses casos, dizemos que a simetria central foi uma ferramenta de resolução do exercício.

- 3) a) Traçar um triângulo $\triangle OAB$ isósceles em O, depois um paralelogramo ABCD. Construir o ponto E, imagem de D pela rotação de centro O, que transforma A em B.
 - b) Mostrar que o triângulo $\triangle BCE$ é isósceles.

Resolução:

- a) Desenhamos a figura, conforme acima.
- b) A rotação de centro O que transforma A em B, transforma D em E. Então ela transforma o segmento \overline{AD} no segmento \overline{BE} . Sabemos que a rotação conserva as distâncias. Logo, AD = BE.

Sabemos que o quadrilátero ABCD é um paralelogramo. Sabemos que seus lados opostos são de mesmo comprimento. Logo, AD = BC.

Portanto, temos: AD = BE e AD = BC. Então, BC = BE. Assim o triângulo ΔBCE é isósceles em B.



1) Construir uma imagem por transformação

Seja o triângulo $\triangle ABC$ tal que AB = 8 cm, AC = 6 cm e o ângulo de \overline{AB} com \overline{AC} é de 60° , isto é, $B\widehat{AC} = 60^{\circ}$ e o giramos em torno de A, no sentido anti-horário.

Seja I o ponto médio do segmento BC, J o ponto médio do segmento \overline{AC} e G o centro de gravidade do triângulo Δ ABC.

- a) Construir o triângulo $\triangle ABC$, citado acima, em folha de papel branco.
- b) Seja (C) o círculo de centro A e de raio 4 cm. Traçar a circunferência C e construir sua transformada C' pela reflexão de eixo \overrightarrow{BC} . Marque o centro de (C).
- c) Construir a transformada $\triangle MNP$ do triângulo $\triangle ABC$ pela translação de vetor \overrightarrow{BJ} .

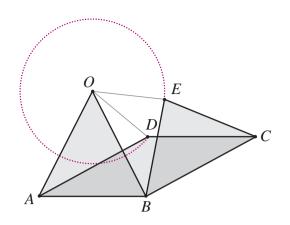


Figura 6.48

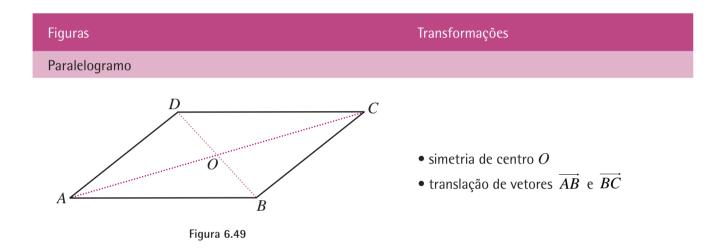
- d) Construir a transformada do triângulo $\triangle ABC$ pela simetria de centro G (ponto de gravidade do triângulo).
- e) Construir a transformada Δ *FHL* do triângulo Δ *ABC* pela rotação de centro *I* e de ângulo 120 $^{\circ}$ no sentido horário.
- Para cada uma das figuras seguintes e, para cada caso, pede-se:

Achar uma transformação *f* verificando as condições dadas, indicando os elementos característicos (centro, eixo, vetor, ângulo, ...). Atenção: nos casos em que não há solução explicar por quê.

- a) *ABCD* é um paralelogramo de centro *O*. Determinar *f*, tal que:
 - i) f(A) = D e f(B) = C;
 - ii) f(A) = C e f(B) = D.
- b) *ABC* é um triângulo isósceles retângulo em *A* e *I* é o ponto médio de *BC*. Determinar *f*, tal que:
 - i) f(A) = A e f(B) = C (propor duas soluções);
 - ii) f(A) = C e f(B) = A;
 - iii) f(A) = C e f(C) = B.
- c) ABC é um triângulo eqüilátero de centro O. Determinar f, tal que f(A) = B, f(B) = C e f(C) = A
- d) *ABCD* é um quadrado (considerar sentido anti-horário). Determinar *f*, tal que:
 - i) f(A) = B e f(D) = C (duas soluções);
 - ii) f(A)=C e f(B) = D.
 - iii) f(A) = B, f(C) = D e f(B) = C.

6.7 Utilização de Transformações para o Estudo de Figuras

Veja nesta tabela exemplos em que as transformações são ferramentas para estudar as figuras geométricas. A escolha da boa transformação na resolução dos exercícios passa pelo conhecimento de algumas figuras chaves as quais podemos associar uma ou várias transformações. As principais figuras chaves e respectivas transformações associadas são:



Triângulo isósceles

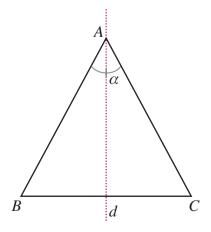


Figura 6.50

- simetria axial de eixo d
- rotação de centro A e de ângulo α , (ela leva B sobre C)

Figuras Transformações Triângulo retângulo isósceles

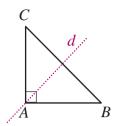


Figura 6.51

- ullet simetria axial de eixo d
- rotação de um quarto de volta de centro A

Triângulo equilátero

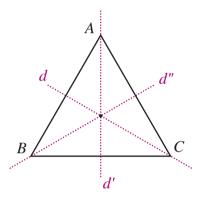


Figura 6.52

- simetria axial de eixo d, d', d''
- rotação de ângulo de 60°, de centros $A, B \in C$.

Quadrado

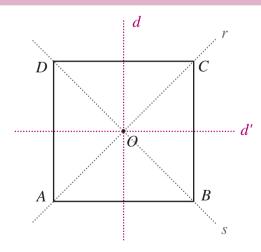


Figura 6.53

- simetria axial de eixo d, r, s, d'
- ullet simetria central de centro O
- rotação de centros *A*, *B*, *C* e *D* de um quarto de volta.

Como usá-las?

Por meio da resolução dos exercícios você verá a importância de conhecer essas figuras e as transformações associadas. Conhecendo bem as transformações associadas às figuras usuais, estaremos atentos na resolução dos exercícios, pois elas podem nos dar pistas de como usar as transformações e que transformação podemos usar.

Exercício Resolvido

Seja um terreno em forma de um polígono que representamos por ABCDE. Nas extremidades, ou seja, nos vértices A, C e D, foram plantadas palmeiras. Nos vértices B e E foram plantadas buganvílias. Sabendo que ΔABC e ΔADE formam dois triângulos equiláteros, qual é a menor distância entre uma palmeira e uma buganvília: BD ou CE?

Qual é a transformação que intervém?

Como a configuração apresenta dois triângulos equiláteros, Δ *ABC* e Δ *ADE*, que têm um vértice comum (o vértice *A*), somos chamados a perceber que podemos usar uma rotação de centro *A* e de ângulo 60° no sentido anti-horário.

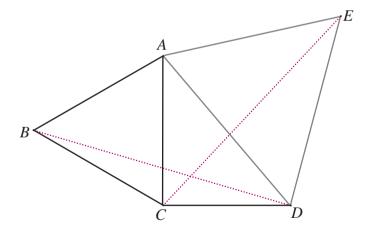


Figura 6.54

Resolução:

Seja r a rotação de centro A e ângulo 60° no sentido anti-horário.

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são equiláteros, a rotação r transforma B em C e D em E. Isto é, r(B) = C e r(D) = E.

Então, dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACE$ temos:

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$$
, $\overline{DA} \equiv \overline{AE} \implies \overline{BD} \equiv \overline{CE}$

Logo as distâncias entre palmeira e buganvília BD e CE são iguais.

Exercícios Propostos

- 1) Dada uma circunferência (*C*) de centro O e um ponto A exterior a (*C*), construa as retas \overrightarrow{AM} e $\overrightarrow{AM'}$, tangentes a (*C*) no ponto M. O que você pode dizer da reta \overrightarrow{AO} na configuração obtida? Como conseqüência, o que você pode afirmar de \overrightarrow{AO} em relação à corda $\overrightarrow{MM'}$ e à reta \overrightarrow{AO} em relação ao ângulo $\overrightarrow{MAM'}$ formado pelas tangentes?
- 2) Seja *d* o eixo de simetria de duas retas transversais *r* e *s* (**secantes**). Seja *M* um ponto situado sobre o eixo de simetria e *P* e *Q* pontos de *r* e *s* tais que \overline{MR} e \overline{MQ} são respectivamente perpendiculares sobre *r* e *s*. O que você pode afirmar sobre \overline{MP} e \overline{MQ} ? O que você pode afirmar de uma circunferência de centro *M* e raio *P*?
- 3) *Triângulo isósceles*Sobre uma folha de papel não quadriculado:
 - a) Construir um triângulo $\triangle ABC$ isósceles em A, tal que BC = 5 cm; AB = AC = 6,5 cm.

 Marcar o ponto médio I da base \overline{BC} .

 Traçar a reta \overline{AI} .
 - i) O que representa a reta \overrightarrow{AI} para o segmento \overline{BC} ? Justifique.
 - ii) O que pode afirmar com referência às retas \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{AI} ?
 - iii) Na simetria em relação a AI, qual é o simétrico do triângulo ΔABC ?
 - iv) O que pode afirmar sobre ângulos $\angle BAI$ e $\angle IAC$? E sobre os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$?

Duas retas r e s são ditas retas secantes quando r e s têm um e somente um ponto de intersecção.

b) Construir um triângulo com dois ângulos iguais

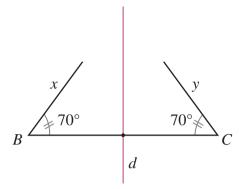


Figura 6.55

Sobre a figura começada acima, d é a mediatriz do segmento \overline{BC} , $C\widehat{B}x = B\widehat{C}y = 70^{\circ}$ e BC = 5 cm.

- i) Segundo a simetria em relação a d, qual é a simetria da semi-reta \overrightarrow{Bx} ?
- ii) Reproduzir a figura e prolongar as semi-retas \overrightarrow{Bx} e \overrightarrow{Cy} . Elas se cortam em A.
- iii) Onde se encontra o ponto A? O que se pode afirmar do triângulo \triangle ABC?
- iv) Complete a frase abaixo: Se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ de um triângulo ABC são iguais, então esse triângulo é _____ de vértice principal ____.

4) Losango

Eixos de simetria do losango

- a) Sobre uma folha não quadriculada, construir um losango ABCD tal que: AC = 11 cm; AB = 6 cm.
- b) Traçar em vermelho as retas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} . Elas se cortam em I.
 - i) O que representa a reta \overrightarrow{AC} para o segmento \overline{BD} ?
 - ii) O que representa a reta \overrightarrow{BD} para o segmento \overrightarrow{AC} ?
 - iii) O que você pode dizer:
 - das retas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} ?
 - do ponto *I*?

- c) Marcar sobre a figura as igualdades dos ângulos e dos comprimentos.
 - i) O que representa a reta \overrightarrow{AC} para os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BCD$?
 - ii) O que representa a reta \overrightarrow{BD} para os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$?
 - iii) Quais são os eixos de simetria do losango ABCD?

5) Das diagonais ao losango

a) Traçar como abaixo, duas retas perpendiculares d_1 e d. Marcar um ponto E sobre d_1 e um ponto E sobre d. Com o compasso, construir o ponto E' simétrico de E em relação a d. Construir o ponto E', simétrico de E em relação a d₁.

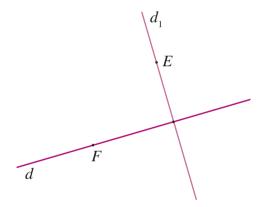


Figura 6.56

- b) Traçar o quadrilátero *EFE'F'*. Quais são os eixos de simetria?
- c) Com o compasso, comparar os comprimentos dos lados de *EFE'F'*.
 - i) O que observa? Você pode justificar?
 - ii) Qual é a natureza do quadrilátero EFE'F'?
- 6) *Retângulo, quadrado*Eixos de simetria de um retângulo
 - a) Trace duas retas paralelas d_1 e d_2 , simétricas em relação a uma reta d. Trace uma reta d_3 , perpendicular a d, que corta

- d_1 em A e d_2 em B. Trace uma reta d_4 , perpendicular a d, que corta d_2 em C e d_1 em D.
- b) Qual é a natureza do quadrilátero ABCD? Justifique.
- c) O que representa a reta *d* para o quadrilátero *ABCD*? Esse quadrilátero tem um segundo eixo de simetria?

7) Propriedades de um retângulo

- a) Trace um retângulo *EFGH*, tal que EF = 8cm, EH = 6cm e construa seus eixos de simetria $d \in d'$ (d paralela a \overrightarrow{EH} ; d' paralela a \overrightarrow{EF}).
- b) Considerando a simetria em relação a *d* ou em relação a *d'*, justifique as igualdades dos comprimentos seguintes:
 - GH = FE;
 - EG = FH;
 - FG = EH.
- c) Trace as retas \overrightarrow{EG} e \overrightarrow{FH} .
 - O que observou?
 - O que representa o ponto comum *I* dos segmentos *EG* e *FH* ? Tente justificar.
 - Marque sobre a figura as igualdades de comprimentos e dos ângulos.

8) Eixos de simetria de um quadrado

- a) Construir um quadrado de lado 5 cm. Quantos eixos de simetria ele tem? Trace esses eixos.
- b) Traçar duas retas perpendiculares d_1 e d_2 e marcar um ponto A sobre d_1 . As retas d_1 e d_2 são dois eixos de simetria de um quadrado ABCD. Construir esse quadrado e traçar seus outros eixos de simetria.

6.8 Composição de Duas Transformações

Sejam t e f duas transformações isométricas. Seja F uma figura dada. Transformar uma figura F por uma transformação t obtendo uma figura F_1 . Transformar F_1 por uma transformação f, obtendo F_2 . Assim, F_1 é imagem de F por t e F_2 é imagem de F_1 por f.

$$F \xrightarrow{t} F_1 \xrightarrow{f} F_2$$

Isto é, $(f \circ t)(F) = F_2$.

Por exemplo: Seja t uma translação de vetor \vec{u} e f uma simetria axial de eixo d:

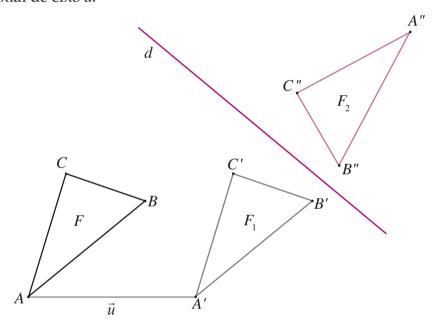


Figura 6.57

$$t(F) = F_1 \in t(F_1) = F_2$$

Ou seja, $f(t(F)) = f(F_1) = F_2$.

Denotamos: $f \circ t$, leia-se f composta com t.

Em uma tabela, considere um segmento uma figura inicial. Faça a composta de todas as isometrias, duas a duas.

Transformações	Transformações	Figura inicial
Simetria central S_o	Simetria axial S_d	Figura 6.58 A'' A'' B'' A'' B' Figura 6.59 $S_d(S_o\overline{AB}) = S_d(\overline{A'B'}) = \overline{A''B''}$ $S_d \circ S_o(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$
Simetria axial	Translação	
Simetria axial	Rotação	
Complete esta tabela		

Exercício Resolvido

1) Traçar um triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A. Construir sua imagem por uma simetria axial de eixo \overrightarrow{AB} , seguido da simetria axial de eixo \overrightarrow{AC} .

Por qual transformação você pode passar diretamente da figura inicial a figura final? Justifique sua resposta.

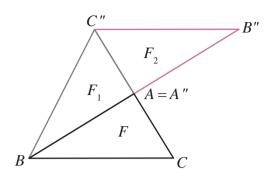


Figura 6.60

Resolução:

- F_1 é imagem de F_n por simetria axial de eixo \overline{AB} : $S_d(F) = F_1$
- F_2 é imagem de F_1 por simetria axial de eixo \overline{AC}

Poderia passar diretamente da figura F para a F_2 por uma simetria de centro em A, pois $S_A(B)=B''$, $S_A(C)=C''$ e $S_A(A)=A$.

Exercícios Propostos

- 1) Faça o mesmo que foi proposto no exercício resolvido acima.
 - a) Simetria de centro em *A*, seguida da simetria de centro *B*.
 - b) Rotação de centro em um ponto qualquer *O* de ângulo 90°, seguida dela mesma.
 - c) Da simetria axial de eixo \overrightarrow{AB} , seguida da simetria axial de eixo \overrightarrow{AC} , sendo o triângulo retângulo ΔABC isósceles em A.
 - d) A simetria axial de eixo \overrightarrow{AC} , seguida da simetria axial de eixo \overrightarrow{BC} , sendo o triângulo retângulo ΔABC isósceles em A.
 - e) A rotação de centro B, de ângulo 45°, seguida dela mesma.
- 2) Sejam r e s duas retas que se interceptam em um ponto I, mas ao exterior da folha. Traçar a reta \overrightarrow{OI} .

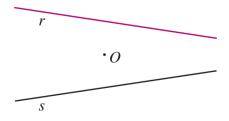


Figura 6.61

Propriedade de incidência: Sejam r e s duas retas tais que $r \cap s = I$, e r' e s' suas imagens por uma translação, uma reflexão ou uma rotação. Então, $r' \cap s' = I'$.

6.9 Homotetia

Neste tópico vamos estudar:

- como uma homotetia age sobre as configurações usuais (retas, segmentos, círculos e triângulos etc);
- descobrir a relação entre a homotetia e o teorema de Tales;
- estabelecer e explorar o fato de que a homotetia aumenta ou diminui uma figura.

Antes de começar a estudar relembre as configurações de Tales, as retas e pontos particulares do triângulo.

Atividade

Pegue um papel quadriculado e trace uma figura qualquer, um paralelogramo, por exemplo. Escolha uma escala maior que 1 e trace um outro paralelogramo aumentado segundo a escala escolhida. Depois escolha uma escala entre 0 e 1, por exemplo, $\frac{1}{2}$, e construa um paralelogramo segundo essa nova escala.

Vamos ver o que obtemos, por exemplo:

 Sendo ABCD o paralelogramo inicial, A'B'C'D' aumentado segundo escala 2, A"B"C"D" é o obtido segundo escala 0,5.

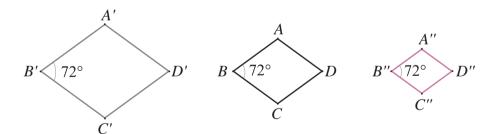


Figura 6. 62

O que podemos perceber?

- Quando aumentamos ou diminuímos uma figura segundo uma escala, as medidas dos ângulos se conservam.
- Os comprimentos são multiplicados pelo valor da escala.

Vamos representar o valor da **escala** por k. Se quisermos aumentar a figura, escolhemos um numero real k cujo módulo é maior que 1.

Note, esta escala é a razão de aumento ou de diminuição da figura. Para diminuir uma figura, escolhemos um valor de k, cujo módulo é menor que 1 e maior que 0. Mas como construir A', imagem de A por uma homotetia de centro O para k, por exemplo k = 2; k = 0.5?

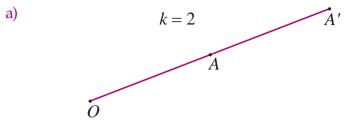


Figura 6.63

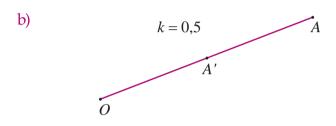


Figura 6.64

Construção: a partir do ponto fixo O e do número real k, (neste caso k = 2, k = 0.5) nós associamos a cada ponto A do plano um ponto A' verificando a condição: $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ (notação de Vetor).

Neste caso, A' é a imagem de A pela homotetia de centro O e razão k = 2 (em a) e k = 0.5 (em b). Assim A' = h(A).

Definição 6.6. Seja O um ponto do plano e k um número real e $k \ne 0$. Homotetia de centro O e de razão k é uma transformação geométrica que, a cada ponto A do plano, associa um ponto A' sobre a reta \overrightarrow{AO} , tal que OA' = kOA.

Observação: Podemos determinar um sentido na reta \overrightarrow{OA} .

Entendemos como sentido positivo aquele que vai do ponto *O* para o ponto *A* e sentido negativo aquele que vai de *A* para *O*. Assim sendo, na definição acima,

- se k > 0, o vetor \overrightarrow{OA} está no sentido positivo,
- se k < 0 o vetor \overrightarrow{OA} está no sentido negativo.

Notação: Denotamos esta homotetia por: $h_{a,k}$ ou $A \xrightarrow{h} A'$

Nos exemplos acima temos:

- em a) homotetia de razão 2: OA' = 2OA
- em **b**) homotetia de razão $\frac{1}{2}$: $OA' = \frac{1}{2}OA$.

O que acontece com a homotetia de razão 1?

Nesse caso teremos a transformação identidade, pois OA' = OA. Veja:

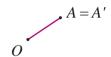
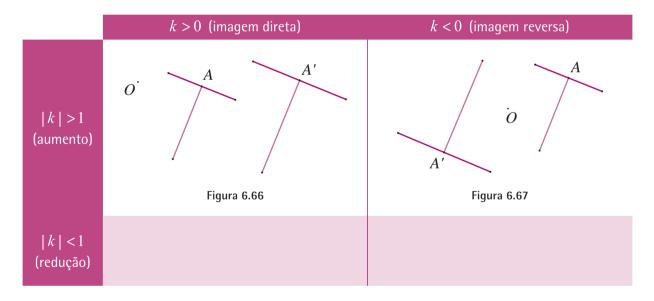


Figura 6.65

Com apoio do programa Cabri Geométrico, complete o quadro:



Uma homotetia está determinada se conhecemos seu centro O e a razão k.

Propriedade 1. Numa homotetia, um ponto, sua imagem e o centro da homotetia estão sobre a mesma reta, isto é, são alinhados. De fato, a relação OP' = k OP mostra em particular que os vetores $\overrightarrow{OP'}$ e \overrightarrow{OP} são colineares. Conseqüentemente, o ponto P e sua imagem P' pela homotetia de centro O estão **alinhados**.

Sendo dados três pontos colineares A, B e C, existe um número real k, tal que AC = kAB. Ou seja, existe uma homotetia de centro em A e de razão k, que leva B em C.

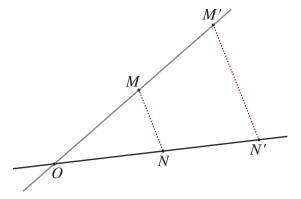


Figura 6.68

Construção da imagem de um ponto: Sejam O, M e N pontos do plano, e h uma homotetia de centro O e razão k. A imagem de M por h será um ponto sobre a reta \overrightarrow{OM} , pois M, M' e O são colineares. Considerando determinado M', N' fica determinado pela intersecção da reta \overrightarrow{ON} e a reta paralela a \overrightarrow{MN} , passando por M'. Para construir N', então construímos a reta paralela a \overrightarrow{MN} que passa por M'.

Propriedade 2. Seja h uma homotetia de razão k. Sejam M e N dois pontos quaisquer e M' e N' suas imagens respectivas por h de razão k. Então: $M'N' = k \ MN$.

Temos, por definição, que $OM' = k\ OM$ e $ON' = k\ ON$. Fazendo a subtração em ambos os membros, temos:

$$ON' - OM' = k (ON - OM),$$

isto é, pela relação de Charles, M'N' = k MN.

A relação $M'N' = k \ MN$ indica que as retas $\overline{M'N'}$ e \overline{MN} são paralelas.

Isto nos leva a perceber que a homotetia nos fornece a configuração do Teorema de Thales. Para $k=\frac{1}{2}$ e para k=-0,75.

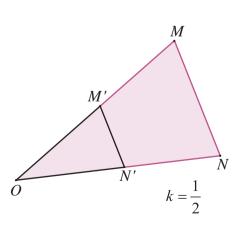


Figura 6.69

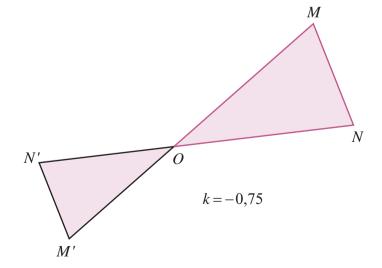


Figura 6.70

De maneira geral, podemos dizer que, em uma homotetia, dois pontos, suas imagens e o centro formam uma configuração de Thales (salvo quando *M*, *N* e o centro são alinhados).

Propriedade 3. Em uma configuração de Thales, os dois triângulos são imagens um do outro por uma homotetia em que o centro é o vértice comum aos triângulos. Por exemplo:

A homotetia de centro O que leva M em M', leva também N sobre N'. Logos os triângulos ΔOMN e $\Delta OM'N'$ são um imagem do outro pelo homotetia de centro O.

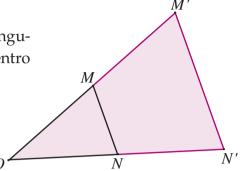


Figura 6.71

Propriedade 4. Por uma homotetia a imagem de uma reta é uma reta paralela. A imagem de um segmento \overline{AB} é o segmento \overline{AB} , onde A' é a imagem de A, B' é imagem de B e o ponto médio \overline{AB} é o ponto médio de \overline{AB} . Como conseqüência, a homotetia conserva o paralelismo e a ortogonalidade.

Propriedade 5. Seja h uma homotetia de razão $k \cdot h$ conserva os ângulos, multiplica as distâncias pelo módulo de k e as áreas pelo módulo de k ao quadrado. Vamos verificar a validade das propriedades 4 e 5 por meio de exemplos.

Exemplos:

a) Quando três pontos são alinhados suas imagens também são colineares.

A', B', C' imagens respectivas de A, B, e C, colineares.

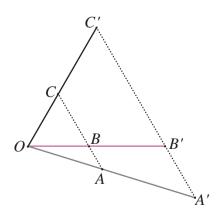


Figura 6.72

b) Seja $\angle ABC$ um ângulo, sua imagem o ângulo $\angle A'B'C'$ por uma homotetia de centro O tem mesma medida.

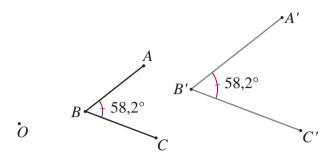


Figura 6.73

c) A relação fundamental $A'B' = k \ AB$ leva $\overline{A'B'}$ em |k|AB. Assim as distâncias ficam multiplicadas por |k| e, portanto, as áreas ficam multiplicadas por k^2 .

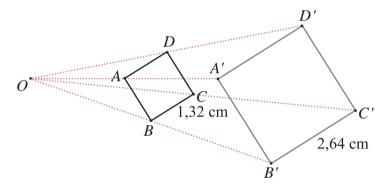


Figura 6.74

d) A reta d' imagem de d pela homotetia de centro O é paralela a d. A imagem de d é conhecida desde que se conheça a imagem de um ponto de d.

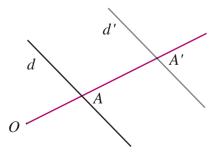


Figura 6.75

e) Se r e s são ortogonais as imagens r' e s' também são ortogonais.

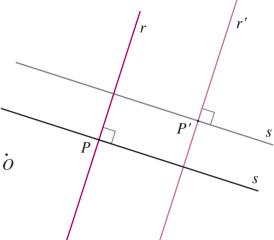


Figura 6.76

Como conseqüência das suas propriedades, a homotetia conserva as formas das figuras. Isto é, a natureza dos triângulos (isósceles, eqüilátero, retângulo) e dos quadriláteros (paralelogramo, quadrado, losango, retângulos) são conservados pela homotetia. O círculo de centro P e raio R tem por imagem o círculo de centro P' = h(P) e raio |k|R. Ainda podemos dizer que o círculo de diâmetro AB tem por imagem o círculo de diâmetro A'B', onde A' = h(A) e B' = h(B).

Exercício Resolvido

Seja h a homotetia de centro O que transforma A em A' como mostra a figura. Sendo dado um círculo (C), uma reta s e um ponto B, conforme figura 6.77. Construir as imagens por h: do ponto B, do círculo (C) e da reta s.

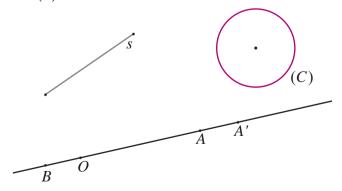


Figura 6.77

Resolução:

• Construção da imagem do ponto B.

Nós sabemos como construir a imagem de um ponto fora da reta \overrightarrow{AO} .

Como B está sobre a reta \overrightarrow{AO} , consideremos um ponto auxiliar M e sua imagem M'. Depois podemos construir a imagem de B, traçando \overrightarrow{MB} e a paralela a \overrightarrow{MB} passando por M'.

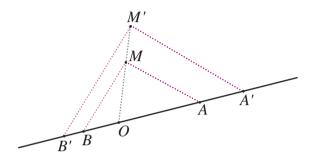


Figura 6.78

• Construção da imagem da reta s

Tomamos um ponto M de s e determinamos sua imagem M'. A imagem da reta s, s' é paralela a d, passando por M'.

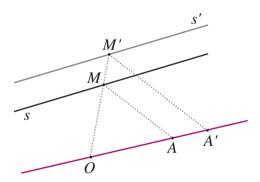


Figura 6.79

• Construção da imagem da circunferência

Construímos a imagem P' do centro P do círculo e a imagem M' de um ponto M da circunferência. E assim, a imagem da circunferência (C) é a circunferência de centro P' e de raio $\overline{P'M'}$.

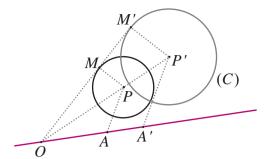


Figura 6.80

- Conhecer as propriedades de conservação e as imagens de figuras usuais.
- Sempre lembrar a propriedade segundo a qual, em uma homotetia, um ponto, sua imagem e o centro são alinhados.
- Interpretar uma propriedade geométrica ou uma relação vetorial como uma homotetia.
- Explorar a presença de uma configuração de Thales.

Exercícios Propostos

1) Construir a imagem do círculo (*C*) e do ponto *B*, segundo a homotetia dada na figura abaixo:

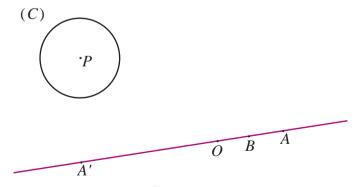


Figura 6.81

2) Seja ABCD um trapézio, como mostra a figura. Mostrar que a reta \overrightarrow{OO} passa por I, ponto médio de \overline{AB} e por J, ponto médio de \overline{CD} .

Se tiver dúvida na resolução deste exercício, discuta no fórum.

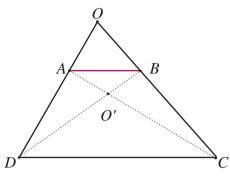


Figura 6.82

3) Seja (*C*) um círculo e *A* um ponto da circunferência de (*C*). Qual é o lugar geométrico do ponto médio *M'* do segmento \overline{AM} , quando o ponto *M* descreve a circunferência?

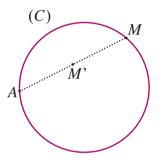


Figura 6.83

Resumo

Neste capítulo estudamos as transformações geométricas isometrias (simetria ortogonal, simetria central, translação e rotação) e a homotetia. Vimos as definições, a construção das imagens por cada uma das transformações e estudamos suas principais propriedades. Os exemplos resolvidos ilustram o uso destas transformações para resolver problemas de geometria.

Responda agora: O que é uma isometria? O que é uma homotetia?

Bibliografia comentada

1) WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. Construções geométricas. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

Este livro na unidade 5 faz uma abordagem interessante das transformações geométricas: simetrias, translações, rotações e homotetias. Você encontrará problemas interessantes se quiser conhecer um pouco mais sobre o tema.

Referências

- 1) ANTIBI, A.; BARRA, R. Nouveau transmath. Nathan: 1997.
- 2) MOLLET-PETIT, F. **Mths Irem de Strasbourg**. Paris: Hachette Livre, 1993.
- 3) PETERSEN, J. Construções geométricas. São Paulo: Nobel, 1963.
- 4) TERRACHER, P. H.; FERACHOGLOU, R. Math, seconde. Paris: Hachete Éducation, 1994.

Capítulo 7

Semelhanças

Capítulo 7

Semelhanças

Neste capítulo você irá conhecer a noção geral de semelhança, entender a relação que existe entre semelhança e homotetia, e explorar a relação entre áreas de figuras semelhantes. Também vamos utilizar o conceito de semelhança para resolver vários problemas geométricos.

7.1 O Conceito de Semelhança

Quando vamos ao cinema, conseguimos facilmente reconhecer as fisionomias dos atores, embora as imagens que estão na tela sejam muito maiores que as pessoas reais. Da mesma forma, quando vemos uma fotografia de algum parente, um amigo, ou de algum lugar conhecido, conseguimos reconhecer as características da pessoa ou do lugar mesmo naquele pequeno pedaço de papel. Qual é o motivo de se reconhecer um objeto, mesmo que seja visto com outro tamanho ou em outra posição? Basicamente, isto se deve ao fato de que todos os detalhes do objeto original estão representados na imagem, e as proporções entre o objeto real e a imagem são as mesmas entre quaisquer duas partes constituintes. Se as proporções não são as mesmas, a sensação que se tem é a de uma imagem distorcida.

O princípio que permeia todos os processos de redução ou de ampliação de figuras é o conceito de semelhança. Dadas duas figuras, isto é, dois conjuntos de pontos, F e F', para dizermos que estas duas figuras estão em uma relação de semelhança é necessário, primeiramente, que se tenha uma correspondência 1 a 1 entre os seus pontos, isto é, para todo ponto $X \in F$, existe um único ponto $X' \in F'$ que lhe seja correspondente e, de igual modo, todo ponto de F' é correspondente a um único ponto de F. Esses pares de pontos $X \in F$ e $X' \in F'$ assim formados são denominados pares de pontos homólogos. Em linguagem matemática, dizemos que existe uma função bijetora entre a figura F e F'. É necessário

também que se tenham as proporções entre as diversas partes das figuras. Então, vamos definir um fator de escala ou razão de semelhança, que é um número r>0 tal que, para quaisquer dois pontos $X,Y\in F$, cujos homólogos sejam, respectivamente, $X',Y'\in F'$, tenhamos $X'Y'=r\cdot XY$. Note que, se r>1, temos uma ampliação, se r<1, temos uma redução e se r=1, temos uma congruência. Podemos resumir todas essas condições na seguinte definição:

Definição 7.1. Dizemos que as figuras F e F' são semelhantes se:

- 1) Existe uma correspondência 1 a 1 entre os pontos de *F* e os pontos de *F*′.
- 2) Existe um número r > 0, tal que, para todos os pares de pontos $X, Y \in F$ e seus respectivos pontos homólogos $X', Y' \in F'$, tem-se $X'Y' = r \cdot XY$.

Utilizar-se-á a notação $F \sim F'$ quando essas duas figuras forem semelhantes.

Note que este conceito de semelhança é extremamente geral, não importando se os conjuntos de pontos estão contidos em um plano ou são, de fato, figuras espaciais. Em nosso contexto, trabalharemos apenas com figuras planas, mas deixamos claro que a generalização para objetos tridimensionais pode ser feita sem esforço. Outra observação importante é o fato de as congruências serem um caso particular de semelhança, a saber, quando a razão de semelhança r é exatamente igual a 1. Portanto, todas as propriedades que serão demonstradas para semelhanças, serão válidas automaticamente para o caso de congruências.

Na figura 7.1 são desenhadas duas figuras planas semelhantes. Você está convidado a verificar experimentalmente se, de fato, essas figuras são semelhantes. Para isso, identifique alguns pares de pontos homólogos e, com uma régua milimetrada, determine aproximadamente a razão de semelhança r. Você, caro aluno, verá facilmente que esta razão será a mesma para todos os pares de pontos homólogos considerados.

Uma primeira propriedade importante de semelhança entre figuras é o fato de que a semelhança é uma relação de equivalência

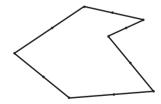




Figura 7.1 – Um par de figuras semelhantes

no conjunto de todas as figuras. Uma relação em um conjunto X é um subconjunto do produto cartesiano desse conjunto por ele mesmo, $X \times X$, ou seja, um conjunto de pares ordenados cujas entradas pertencem ao conjunto X. Para falarmos de relação de semelhança, o conjunto em questão é o conjunto de todas as figuras, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de pontos do plano (ou do espaço). Esse conjunto é realmente enorme: inclui todos os pontos, todas as retas, todos os segmentos, todas as curvas, todas as regiões planas etc. Então dizemos que duas figuras F e F' são semelhantes equivale a dizer que o par (F,F') pertence à relação de semelhança.

Definição 7.2. Uma relação de equivalência R em um conjunto X é um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$, ou seja, um conjunto de pares ordenados de elementos de X que satisfaz a três propriedades:

- 1) A propriedade reflexiva, isto é, todo par (x, x), com $x \in X$, pertence à relação R.
- 2) A propriedade simétrica, isto é, se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$.
- 3) E a propriedade transitiva, isto é, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.

Utiliza-se a notação xRy para se indicar que $(x, y) \in R$.

Existem diversos tipos de relações de equivalência, por exemplo, a igualdade entre os elementos de um conjunto, ou a relação "torcer por um mesmo time". Vamos mostrar que as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva também são satisfeitas para a relação de semelhança e, em particular, pela congruência.

Teorema 7.1. A relação de semelhança é uma relação de equivalência.

Demonstração: Temos que mostrar que a relação de semelhança entre figuras satisfaz às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva: Tome F um conjunto arbitrário de pontos e considere a aplicação identidade em F, isto é, a função que associa a cada

ponto $X \in F$ o próprio ponto X. Obviamente, a aplicação identidade é uma correspondência 1 a 1 entre os pontos de F. Também temos que, para qualquer par de pontos $X,Y \in F$, $XY = 1 \cdot XY$, logo, a razão de semelhança é igual a 1 e, portanto, $F \sim F$.

Simétrica: Seja uma figura F semelhante a uma figura F'. Temos que provar que F' também é semelhante a F. De fato, é só tomarmos a inversa da aplicação $\sigma: F \to F'$, que estabelece a correspondência 1 a 1 entre os pontos de F e os pontos de F', isto é, a aplicação $\sigma^{-1}: F' \to F$. Assim, para cada ponto $Y \in F'$, associamos o ponto $X \in F$, tal que, $Y = \sigma(X) = X'$, ou seja, tome o ponto $X \in F$ de forma que Y seja o seu ponto homólogo.

A razão de semelhança de σ^{-1} será igual a $\frac{1}{r}$, onde r é a razão de semelhança associada à aplicação σ . Isso é facilmente verificável, pois se para o par de pontos $Y_1,Y_2\in F'$ temos associados, respectivamente, os pontos $X_1,X_2\in F$, teremos

$$Y_1 Y_2 = r \cdot X_1 X_2 \tag{7.1}$$

ou seja,

$$X_1 X_2 = \frac{1}{r} \cdot Y_1 Y_2. \tag{7.2}$$

Portanto, $F' \sim F$.

Transitiva: Se uma figura F é semelhante a uma figura F' e esta figura F' é semelhante a uma figura F'', então, temos que provar que a figura F também é semelhante à figura F''. De fato, seja σ a correspondência 1 a 1 entre F e F', que a cada ponto $X \in F$ associa um único ponto $X' \in F'$, e ρ é a correspondência 1 a 1 entre F' e F'', que a cada ponto $X' \in F'$ associa um único ponto $X'' \in F''$. Então, a correspondência 1 a 1 entre F e F'' será estabelecida pela composição das duas, ou seja, para cada ponto $X \in F$, associa-se o ponto $X'' = \rho(\sigma(X)) \in F''$. Quanto à razão de semelhança, se o fator de escala de σ for igual a r e o fator de escala de ρ for igual a $r \in S$. Deixamos a você, aluno, a incumbência de verificar essa afirmação (ver o exercício (1) no final desta seção). Portanto, $F \sim F''$.

A próxima sequência de resultados irá nos garantir que a relação de semelhança, em particular de congruência, entre as figuras preserva a sua forma.

Teorema 7.2. Uma semelhança associa pontos colineares a pontos colineares.

Demonstração: Seja a semelhança $\sigma: F \to F'$, com razão igual a r. Dados 3 pontos colineares quaisquer X, Y e Z em F, tais que XZ = XY + YZ, vamos demonstrar que seus pontos homólogos $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ e $Z' = \sigma(Z)$ em F' também são colineares. De fato, como X'Y' = rXY e Y'Z' = rYZ, temos que

$$X'Y' + Y'Z' = r(XY + YZ) = rXZ = X'Z'.$$
 (7.3)

Logo, os pontos X', Y' e Z', são colineares em F'.

Corolário.

- 1) Dois segmentos de reta são sempre semelhantes.
- 2) Duas semi-retas são sempre semelhantes (de fato, podem ser congruentes).
- 3) Duas retas são sempre semelhantes (de fato, podem ser congruentes).

Demonstração: No caso dos segmentos de reta, a razão de semelhança é dada pela razão entre os seus comprimentos. Basta mostrar que, se um ponto $B \in \overline{AC}$, então o ponto B', estabelecido pela correspondência 1 a 1 da semelhança, tem que pertencer ao segmento $\overline{A'C'}$. Já sabemos que A', B' e C' são colineares pelo teorema 7.2. Basta-nos verificar que a relação de semelhança não "vira o segmento pelo avesso", mas preserva a ordem entre os pontos sobre a reta. Essa verificação é deixada ao seu encargo, aluno, (ver o exercício proposto (2) no final desta seção e no item 1 do teorema 7.3, a seguir). No caso da semi-reta e da reta, estabeleça a correspondência 1 a 1 utilizando o Axioma 1.4, que garante a correspondência 1 a 1 entre os pontos de uma semi-reta e o conjunto dos números reais não negativos (ver o exercício proposto (3) no final desta seção).

Note que o resultado do teorema 7.2 apenas afirma que a relação de semelhança preserva a colinearidade entre pontos, mesmo que os segmentos entre os pontos não estejam inteiramente contidos na figura, como nos mostra a figura 7.2.

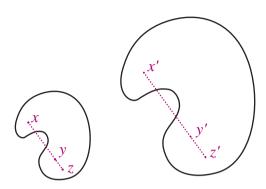


Figura 7.2 - A relação de semelhança preserva pontos colineares

A propriedade demonstrada no teorema 7.2 é a base para a demonstração de todas as propriedades interessantes e úteis das relações de semelhança para a resolução de problemas geométricos.

Teorema 7.3. Uma semelhança $\sigma: F \to F'$ de razão r transforma:

- 1) Todo segmento de reta contido em F em segmentos de reta em F'.
- 2) Um círculo de raio R contido em F, em um círculo de raio $r \cdot R$ em F'.
- 3) Uma circunferência de raio R contida em F, em uma circunferência de raio $r \cdot R$ em F'.
- 4) Pontos interiores de F em pontos interiores de F'.
- 5) Pontos do contorno, ou de fronteira, de F em pontos de cotorno de F'.
- 6) Vértices de *F* em vértices de *F*′, para o caso em que *F* é um polígono.

Demonstração:

1) Por definição, um segmento $\overline{XY} \subset F$ é formado pelos pontos X, Y e pelo conjunto dos pontos $Z \in F$, colineares com X e Y tais que XY = XZ + ZY. Pelo teorema anterior, temos que todos

os pontos homólogos $Z' \in F'$ são colineares aos pontos $\underline{X'}$ e $\underline{Y'}$ e que $\underline{X'Y'} = \underline{X'Z'} + \underline{Z'Y'}$. Logo, a imagem do segmento \overline{XY} pela semelhança σ é o segmento $\overline{X'Y'} \subset F'$.

2) Dado um ponto $X \in F$, um círculo de raio R e centro X está contido em F se todo segmento \overline{XY} de comprimento menor ou igual a R estiver contido em F. Pelo item (1), temos que a imagem por σ de todos estes segmentos, são segmentos $\overline{X'Y'} \subset F'$ de comprimento menor ou igual a $r \cdot R$, pois X'Y' = rXY.

Logo, a imagem do círculo de centro X e raio R será o círculo de centro X' e raio r.R.

- **3)** De modo análogo, demonstramos para o caso de uma circunferência.
- **4)** Se um ponto $X \in F$ é um ponto interior à figura F, então existe um número R > 0 tal que o círculo de centro X e raio R esteja contido em F, conforme ilustrado na figura 7.3.

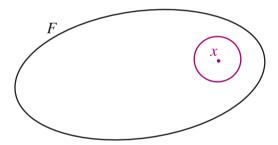


Figura 7.3 – O ponto X é interior à figura F

Como a imagem de um círculo em F de centro X e raio R pela semelhança σ é um círculo contido em F' com centro no respectivo ponto homólogo $X' = \sigma(X)$ e raio $r \cdot R$, temos que X' é um ponto interior de F'.

5) Um ponto de contorno, também chamado ponto de fronteira, de F é um ponto $X \in F$ tal que todo círculo de centro X e raio R contém pontos no interior de F e pontos no exterior de F, isto é, no interior do complementar de F no plano. A figura 7.4 nos ilustra um exemplo de ponto de contorno, ou de fronteira, de uma região plana F.

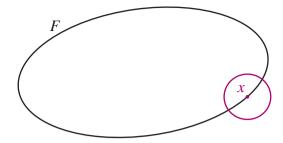


Figura 7.4 – O ponto $X \in F$ é um ponto de contorno de F

Dado um ponto de contorno $X \in F$, existem somente três possibilidades distintas para o ponto $X' = \sigma(X)$: ou X' pertence ao contorno de F', ou X' pertence ao interior de F', ou X' pertence ao interior do complementar de F'. Como toda semelhança leva pontos interiores em pontos interiores, se X' fosse interior a F', então, pela semelhança $\sigma^{-1}: F' \to F$, concluiríamos que $X = \sigma^{-1}(\sigma(X)) = \sigma^{-1}(X')$ seria interior a F. Isso contradiz a hipótese de que X é do contorno de F. Com um raciocínio análogo, podemos deduzir que X' também não pode pertencer ao interior do complementar de F'. Excluídas as outras duas possibilidades, concluímos que X' pertence ao contorno de F'.

6) Um vértice de uma poligonal F é um ponto de F que pertence à intersecção de dois segmentos não colineares. Vamos considerar apenas o caso de poligonais simples e, portanto, estas intersecções de segmentos da poligonal sempre ocorrem nas suas extremidades. Seja X um vértice de F na intersecção dos segmentos \overline{XY} e \overline{XZ} , como nos mostra a figura 7.5. Note que, pela definição de vértice, os pontos X, Y e Z não são colineares.

É possível definir vértice para qualquer curva, mas isso nos levaria a discussões fora do escopo deste livro. De fato, um vértice em uma curva qualquer é um ponto de descontinuidade da derivada da função que descreve essa curva.

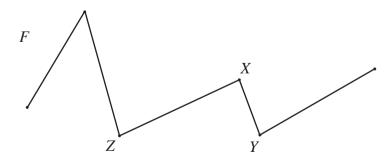


Figura 7.5 - O ponto $X \in F$ é um vértice em B'

Pelo item (1), a imagem destes dois segmentos pela semelhança σ serão segmentos em F'. Só existem duas possibilidades para os

pontos $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ e $Z' = \sigma(Z)$: ou estes três pontos são colineares ou não são. Porém, se esses três pontos fossem colineares, pela semelhança σ^{-1} concluiríamos que os pontos X, Y e Z seriam colineares, o que é uma contradição, logo, os pontos X', Y' e Z' não são colineares e, portanto, X' é vértice em F'.

Também é possível mostrar que uma semelhança transforma uma curva aberta arbitrária em uma curva aberta. Para isso, é preciso utilizar aproximações por poligonais. Quanto maior o número de lados em uma poligonal, mais próxima esta poligonal está da curva dada. No entanto, precisamos antes verificar que uma semelhança mantém o número de vértices e arestas de uma poligonal.

Exercício Resolvido

Mostre que duas poligonais semelhantes possuem o mesmo número de vértices e de arestas.

Resolução: Seja $F = A_1 A_2 \dots A_n$ uma poligonal, e seja $\sigma: F \to F'$ uma semelhança. Tome os pontos homólogos $A_1', \dots, A_n' \in F'$. Pelo teorema 7.3, esses pontos também são vértices e as imagens das arestas $\overline{A_i A_{i+1}} \subseteq F$, são os segmentos $\overline{A_i' A_{i+1}'} \subseteq F'$. Portanto, o número de vértices e o número de arestas de F' são maiores ou iguais, respectivamente, ao número de vértices e ao número de arestas de F. Considerando a semelhança inversa $\sigma^{-1}: F' \to F$, podemos concluir que o número de vértices e o número de arestas de F são, respectivamente, maiores ou iguais ao número de vértices e ao número de arestas de F'. Portanto, as poligonais F e F' possuem o mesmo número de vértices e de arestas.

As propriedades das relações de semelhança demonstradas acima é que vão garantir que figuras semelhantes possuam as mesmas propriedades geométricas. Basicamente, duas figuras semelhantes diferem a menos de um movimento rígido e de uma mudança de escala.

Exercícios Propostos

1) Mostre que o fator de escala na composição de duas semelhanças é igual ao produto dos fatores de escala de cada

- uma das semelhanças e, com isso, conclua a transitividade no Teorema 7.1.
- 2) Mostre que uma semelhança preserva a ordem dos pontos em uma reta, isto é, se o ponto *B* está entre os pontos *A* e *C*, e se os pontos *A'*, *B'* e *C'* são, respectivamente, os pontos homólogos de *A*, *B* e *C*, então *B'* está entre *A'* e *C'*.
- 3) Estabeleça a correspondência 1 a 1 entre os pontos de uma semi-reta e entre os pontos de uma reta.
- 4) Discuta, qualitativamente, por que os resultados apresentados nesta seção garantem que uma semelhança preserva a forma das figuras geométricas.
- 5) Elabore atividades para serem utilizadas no Ensino Fundamental nas quais o conceito de semelhança seja introduzido e motivado pelo reconhecimento de diversos processos que produzem semelhanças na vida quotidiana.

7.2 Semelhança e homotetia

No capítulo 6 você estabeleceu um contato com o conceito de transformações geométricas e estudou as mais importantes, como a simetria axial, a simetria central, a rotação e a translação. Todas essas transformações preservam comprimentos e ângulos, portanto, quaisquer duas figuras geométricas relacionadas por uma dessas transformações são, de fato, congruentes. Aplicações entre subconjuntos de pontos no plano ou no espaço, que preservam distâncias, são denominadas isometrias. Um resultado bem mais difícil de ser demonstrado, e que será somente mencionado neste livro, é que as isometrias possíveis em um plano consistem, tão somente, das transformações geométricas listadas acima.

Teorema 7.4. As isometrias no plano são composições das seguintes transformações geométricas básicas: (1) Rotações, (2) Translações, (3) Simetrias centrais, (4) Simetrias axiais.

Agora vamos colocar as semelhanças no contexto das transformações geométricas. Como foi exposto na seção anterior, as congruências (isometrias) são casos especiais de semelhanças. Logo, A distância entre dois pontos é definida simplesmente como o comprimento do segmento unindo esses dois pontos.

Este fato pode ser melhor demonstrado no contexto da geometria afim. Ao introduzirmos coordenadas no plano e exigirmos que a distância entre dois pontos (obtida através do teorema de Pitágoras) permaneça invariante, facilmente verificamos que a expressão da transformação tem que corresponder a uma das transformações geométricas citadas.

toda composição das transformações geométricas básicas são semelhanças. Mas também vimos que uma semelhança pode ter uma razão de semelhança diferente de 1, o que produz uma mudança de escala. Nesse caso, precisamos introduzir um novo tipo de transformação geométrica que seja responsável pela mudança de escala.

Definição 7.3. Seja um ponto *O* no plano Π (ou no espaço *E*) e um número real positivo r. Definimos uma homotetia de centro O e razão r como uma aplicação $\sigma: \Pi \to \Pi$ (ou $\sigma: E \to E$, para o caso espacial) que satisfaz às seguintes propriedades:

- 1) $\sigma(O) = O$.
- 2) Para qualquer ponto $X \neq O$, sua imagem $X' = \sigma(X)$ será o ponto na semi-reta \overrightarrow{OX} tal que $OX' = r \cdot OX$.

Duas figuras F e F' são homotéticas quando $F' = \sigma(F)$.

A figura 7.6 a seguir ilustra um exemplo de homotetia.

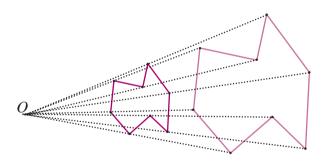


Figura 7.6 - Um exemplo de homotetia

Desta definição, podemos deduzir vários resultados imediatos, como o fato de que toda homotetia é, na verdade, uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do plano ou do espaço (ver o exercício resolvido (1) desta seção); que uma homotetia de razão 1 é simplesmente a transformação identidade (ver o exercício proposto (1) desta seção); que a inversa de uma homotetia de centro X e razão r é uma homotetia de centro R e razão r (ver o exercício proposto (2) desta seção) e , finalmente, que uma homotetia de centro R transforma toda reta que passa por R0 em si mesma.

Exercício Resolvido

 Mostre que uma homotetia de centro O e razão r é uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do plano (ou do espaço).

Resolução: A definição de homotetia afirma que todo ponto no plano ou no espaço possui uma imagem por uma homotetia. O primeiro passo é provar que cada ponto possui somente uma imagem, isto é equivalente a dizer que uma homotetia é uma função. Para isso, vamos utilizar novamente uma demonstração por absurdo. Suponha que um determinado ponto X possua duas imagens distintas, X' e X'' (o ponto O possui uma única imagem por definição). Os pontos X, X' e X'' estão sobre a mesma semi-reta. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $X' \in \overline{OX''}$. Assim, $\overline{OX'} < \overline{OX''}$. Por outro lado, temos que $OX' = OX'' = r \cdot OX$ e, portanto, $\overline{OX'} \equiv \overline{OX''}$. Desta contradição, podemos concluir que o ponto X possui uma única imagem.

Um segundo passo é mostrar que todo ponto no plano é imagem por homotetia de algum ponto do plano, ou seja, mostrar que a função dada pela homotetia é sobrejetora. Considere um ponto $X \neq O$ (o ponto O, por definição, é imagem de si próprio). Sobre a semi-reta \overrightarrow{OX} , seja o ponto Y de forma que $OY = \frac{1}{r} \cdot OX$. Assim, $OX = r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot OX\right) = r \cdot OY$, o que nos leva a concluir que X é a imagem do ponto Y pela homotetia.

Finalmente, precisamos provar que cada ponto é imagem de um único ponto, isto é, que a função dada pela homotetia é injetora. Para isso, novamente, utilize uma demonstração por absurdo. Suponha que o ponto $X \neq O$ seja a imagem dos pontos distintos Y_1 e Y_2 (o ponto O, por definição, é imagem de si próprio. Logo, só é imagem de um único ponto). Temos que os pontos Y_1 e Y_2 estão sobre a semi-reta \overrightarrow{OX} . Suponha, sem perda de generalidade, que $Y_1 \in \overrightarrow{OY_2}$. Assim, $\overrightarrow{OY_1} < \overrightarrow{OY_2}$. Por outro lado, $OX = r \cdot OY_1 = r \cdot OY_2$, o que implica que $\overrightarrow{OY_1} \equiv \overrightarrow{OY_2}$. Dessa contradição podemos concluir que cada ponto X é imagem, pela homotetia, de um único ponto.

Assim, tendo demonstrado que a homotetia é uma função injetora e sobrejetora, provamos que a homotetia é uma função bijetora no

Quando escrevemos "sem perda de generalidade" queremos dizer que os outros casos são análogos. plano (ou no espaço), o que é o mesmo que dizer que a homotetia é uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do plano (ou do espaço).

Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas paralelas no plano. Consideraremos para efeitos do Teorema de Thales apenas feixes com, no mínimo, 3 retas paralelas.

O grande resultado, no entanto, refere-se à relação existente entre paralelismo e homotetia. Desse teorema resultarão todas as conseqüências relativas à semelhança de triângulos e à proporcionalidade entre segmentos definidos por **feixes de retas paralelas**, resultados estes conhecidos como Teorema de Tales.

Teorema 7.5. Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou em uma reta paralela.

Demonstração: Seja σ uma homotetia de centro O e razão r. O caso r=1, como foi visto, corresponde à transformação identidade e, portanto, é trivial, pois transforma toda reta em si própria. Para $r \neq 1$, vamos mostrar que σ é uma semelhança de razão r. Para isso, considere dois pontos, X e Y no plano. Se X, Y forem colineares com O, então suas imagens X' e Y' serão tais que $OX'=r\cdot OX$ e $OY'=r\cdot OY$. Assim, temos dois casos a analisar:

1) Se X e Y estão na mesma semi-reta em relação a O, suponha, sem perda de generalidade, que $X \in \overline{OY}$, então XY = OY - OX. Logo,

$$X'Y' = OY' - OX' = r \cdot OY - r \cdot OX = r \cdot (OY - OX) = r \cdot XY$$
. (7.4)

2) Se X e Y estão em semi-retas opostas em relação a O, suponha então XY = OY + OX. Logo,

$$X'Y' = OY' + OX' = r \cdot OY + r \cdot OX = r \cdot (OY + OX) = r \cdot XY$$
. (7.5)

Agora considere o caso em que X, Y não são colineares com O. Vamos aqui fazer o caso r>1. Você está convidado a refazer os passos da demonstração para o caso r<1. A figura 7.7, abaixo, nos mostra os pontos X,Y e suas respectivas imagens X',Y'. Vamos mostrar que $\overline{X'Y'}/\!/\overline{XY}$.

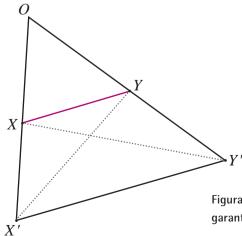


Figura 7.7 - A homotetia de centro O e razão r garante o paralelismo $\overline{X'Y'}//\overline{XY}$

Considere os triângulos $\triangle OXY$, $\triangle OXY$ e $\triangle OXY'$, temos que

$$\frac{A(\Delta OXY)}{A(\Delta OXY)} = \frac{OX'}{OX} = r,$$
(7.6)

e, de igual modo,

$$\frac{A(\Delta OXY')}{A(\Delta OXY)} = \frac{OY'}{OY} = r. \tag{7.7}$$

A partir das expressões (7.6) e (7.7), podemos concluir que

$$A(\Delta OX'Y) = A(\Delta OXY') = r \cdot A(\Delta OXY). \tag{7.8}$$

Mas ainda temos as relações

$$A(\Delta OXY) = A(\Delta XXY) + A(\Delta OXY) \tag{7.9}$$

e
$$A(\Delta OXY') = A(\Delta XYY') + A(\Delta OXY)$$
, (7.10)

o que nos leva à conclusão que $A(\Delta XX'Y) = A(\Delta XYY')$. Como ambos os triângulos possuem a mesma base, o segmento \overline{XY} , então possuem a mesma altura. Disso concluímos que os segmentos \overline{XY} e $\overline{X'Y'}$ são paralelos.

Precisamos agora mostrar que $X'Y'=r\cdot XY$. Para isso, consideremos os triângulos ΔOXY , $\Delta OX'Y$ e $\Delta OX'Y'$, ainda na figura 7.7. Temos as seguintes relações:

$$A(\Delta OXY) = A(\Delta XXY) + A(\Delta OXY) = r \cdot A(\Delta OXY) \tag{7.11}$$

$$A(\Delta OX'Y') = A(\Delta X'YY') + A(\Delta OX'Y) = r \cdot A(\Delta OX'Y)$$
 (7.12)

Das relações (7.11) e (7.12), concluímos que:

$$A(\Delta OX'Y') = A(\Delta XYY') + A(\Delta XX'Y) + A(\Delta OXY) = r \cdot [A(\Delta XX'Y) + A(\Delta OXY)], \tag{7.13}$$

ou ainda,

$$A(\Delta OXY') = r \cdot A(\Delta XX'Y) + r \cdot A(\Delta OXY) = r \cdot A(\Delta XX'Y) + [A(\Delta XX'Y) + A(\Delta OXY)].$$

$$(7.14)$$

Finalmente, das expressões (7.13) e (7.14) temos que $A(\Delta XYY') = r \cdot A(\Delta OX'Y)$. Como ambos os triângulos possuem a mesma altura, pois $\overline{X'Y'}/\!\!/\overline{XY}$, então $X'Y' = r \cdot XY$.

As conseqüências deste teorema para a semelhança de triângulos poderão ser vistas na seção 7.4. Note que o teorema 7.5 afirma que toda homotetia é uma semelhança. Também já vimos que toda isometria, por ser uma congruência, é uma semelhança. A pergunta que pode surgir é: A partir de isometrias e homotetias podem-se obter todas as semelhanças possíveis? O próximo teorema vem responder afirmativamente a esta pergunta.

Teorema 7.6. Toda semelhança é uma composição de uma homotetia e de uma isometria.

Demonstração: Considere a semelhança $\sigma: F \to F'$ de razão r. Fixemos um ponto O arbitrário e tomemos a homotetia τ , de centro O e razão $\frac{1}{r}$. E seja F' a imagem de F pela homotetia τ . A composta $\lambda = \tau \circ \sigma: F \to F''$ é uma isometria. Logo, tomando a inversa da homotetia $\tau:$ a homotetia τ^{-1} , de centro O e razão r, teremos que $\sigma = \tau^{-1} \circ \lambda$. Portanto, a semelhança σ é a composição da homotetia τ^{-1} com a isometria λ .

Exercício Resolvido

2) Mostre que dois círculos ou duas circunferências são sempre semelhantes, sendo a razão de semelhança igual à razão entre os respectivos raios.

Resolução: Sejam as circunferências (O,r), com centro em O e raio r e (O',s), com centro em O' e raio s. Tome também a circunferência (O,s). As circunferências (O,r) e (O,s) estão relacionadas por uma homotetia de centro O e razão $\frac{s}{r}$ e, portanto, são semelhantes. Por outro lado, as circunferências (O,s) e (O',s) estão associadas por uma translação que relaciona o ponto O ao ponto O'. Como uma translação é uma isometria, as circunferências (O,s) e (O',s) são semelhantes. Pela transitividade da semelhança, podemos concluir que as circunferências (O,r) e (O',s) são semelhantes.

Exercícios Propostos

1) Mostre que uma homotetia de razão 1 é simplesmente a transformação identidade.

- 2) Mostre que a inversa de uma homotetia de centro O e razão r é uma homotetia de centro O e razão $\frac{1}{r}$.
- 3) Mostre que uma homotetia de centro *O* transforma toda reta que passa por *O* em si mesma.
- 4) Faça todos os passos da demonstração do teorema 7.5 para o caso r < 1 e X, Y não colineares com O.

7.3 Semelhança de Triângulos

No capítulo 3, você estudou casos de congruência entre triângulos. Para garantir que cada lado e cada ângulo de um triângulo fosse congruente a seu respectivo lado e ângulo em um outro triângulo, bastava assegurar que dois lados e o ângulo compreendido por eles fossem congruentes (*LAL*), ou que dois ângulos e o lado comum a eles fossem congruentes (*ALA*), ou ainda, que os três lados fossem congruentes (*LLL*), ou, finalmente, que um lado , um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado fossem congruentes (*LAA*). Mas você deve ter notado, caro aluno, que o fato de os três ângulos de dois triângulos serem congruentes não garante que seus lados sejam congruentes. No entanto, a igualdade entre os ângulos de dois triângulos é suficiente para garantir que esses triângulos sejam semelhantes. Este fato é conseqüência direta do teorema 7.5 demonstrado na seção anterior.

Definição 7.4. Dizemos que os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes se os ângulos relativos a vértices homólogos são congruentes e os comprimentos de lados homólogos obedecem à mesma proporção. Ou seja, temos as seguintes congruências de ângulos:

$$C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$$
, $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$ e $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A'$.

E temos a proporção entre os comprimentos dos lados:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = r.$$

Denotaremos por $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ quando esses triângulos forem semelhantes.

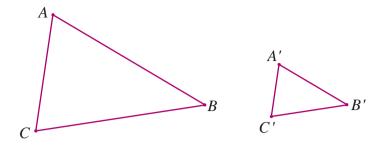


Figura 7.8 - Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes

Teorema 7.7. Se nos lados \overline{AB} e \overline{AC} de um triângulo ΔABC tomarmos, respectivamente, dois pontos B' e C' de forma a termos $\overline{B'C'}/\!/\overline{BC}$, então os triângulos ΔABC e $\Delta AB'C'$ são semelhantes.

Demonstração: A figura 7.9 abaixo ilustra o enunciado do teorema.

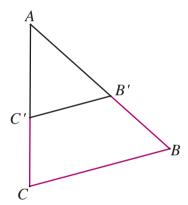


Figura 7.9 - Se $\overline{B'C'}//\overline{BC}$, então $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$

Primeiramente, vamos verificar a congruência entre os ângulos em vértices homólogos. O ângulo com vértice em A é comum aos dois triângulos, \log o, $\angle CAB \equiv \angle C'AB$. O segmento $\overline{B'C'}$ é paralelo ao segmento \overline{BC} , logo, temos a congruência entre os ângulos correspondentes como conseqüência do axioma das paralelas. Portanto, $\angle AB'C' \equiv \angle ABC$ e $\angle BCA \equiv \angle B'C'A$. Com isso, verificamos as congruências entre os ângulos.

Em segundo lugar, precisamos verificar as proporções entre os lados dos dois triângulos. Isto será feito com o auxílio do teorema 7.5. Considere uma homotetia de centro A e razão $r=\frac{AB'}{AB}$. A imagem do ponto C por essa homotetia seria um ponto $C'' \in \overrightarrow{AC}$

tal que $\frac{AC''}{AC} = r$. Pelo teorema 7.5, a reta $\overleftarrow{B'C''}$ é paralela à reta

 \overrightarrow{BC} , mas também temos $\overrightarrow{B'C'}/|\overrightarrow{BC}|$. Como ambas as paralelas à reta \overrightarrow{BC} passam pelo ponto B, podemos concluir que coincidem, assim C'' = C' por construção. Como a homotetia de centro A é uma semelhança com razão r, temos que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = r. \tag{7.15}$$

Portanto, temos que $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$.

Agora vamos demonstrar a recíproca deste resultado:

Teorema 7.8. Se $B' \in \overline{AB}$ e $C' \in \overline{AC}$ são tais que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = r$, então $\overline{B'C'} / / \overline{BC}$.

Demonstração: Isto decorre diretamente do teorema 7.5, considerando-se a homotetia de centro A e razão r.

Para verificar a semelhança entre dois triângulos não é necessário que sempre verifiquemos todas as congruências entre seus ângulos e todas as proporcionalidades entre seus lados. Um triângulo é uma figura geométrica rígida, isto é, dadas as medidas de seus lados, os seus ângulos estão univocamente definidos. Assim, podemos analisar casos em que a semelhança de triângulos fica garantida apenas verificando-se algumas congruências de ângulos ou algumas proporcionalidades entre lados.

Teorema 7.9. Se dois triângulos obedecem a uma das seguintes condições abaixo:

- 1) Têm lados proporcionais (*LLL*).
- 2) Têm dois de seus ângulos congruentes (AA).
- 3) Têm um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais (*LAL*).

Então estes triângulos são semelhantes.

Demonstração:

1) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = r \tag{7.16}$$

Então, sobre o lado \overline{AB} do triângulo ΔABC , determine um ponto B'' tal que $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$. E sobre o lado \overline{AC} , um ponto C'' tal que $\overline{AC''} \equiv \overline{A'C'}$. Então, temos a proporção:

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = r. \tag{7.17}$$

Pelo teorema 7.8, podemos concluir que $\overline{B''C''}/\!\!/\overline{BC}$, e pelo teorema 7.7, temos que $\Delta ABC \sim \Delta AB''C''$.

Por outro lado, como $\frac{BC}{B''C''} = r$, temos que $\overline{B'C'} \equiv \overline{B''C''}$,

logo, pelo caso *(LLL)* de congruência de triângulos, temos que $\Delta AB''C'' \equiv \Delta A'B'C'$, que é um tipo particular de semelhança. Portanto, pela transitividade da semelhança, temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Suponha, sem perda de generalidade, que $AB \geq A'B'$. Determine sobre o lado \overline{AB} um ponto B'' tal que $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$ e um ponto C'' sobre \overline{AC} tal que $\angle AB''C'' \equiv \angle A'B'C'$, conforme ilustrado na figura 7.10.

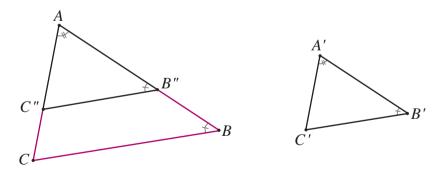


Figura 7.10 - Os pontos B'' e C'' são tais que $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$ e $\angle AB''C'' \equiv \angle A'B'C'$.

Logo, $\angle ABC \equiv \angle AB''C''$, donde concluímos que $\overline{B''C''}/\overline{BC}$ e, portanto, $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$ (Se AB = AB'', então os triângulos são congruentes). Por outro lado, como $\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}$,

 $\angle AB''C'' \equiv \angle A'B'C'$ e $\angle C''AB'' \equiv \angle C'A'B'$, pelo caso (*ALA*) de congruência de triângulos, temos que $\Delta AB''C'' \equiv \Delta A'B'C'$, que, novamente, é um tipo especial de semelhança. Portanto, pela transitividade da semelhança, temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = r$. O leitor é convidado a fazer os detalhes da demonstração deste caso (ver o exercício proposto (1) no final desta seção). Você pode supor, sem perda de generalidade, que r > 1 (se r = 1, temos o já discutido caso (LAL) de congruência entre triângulos, se r < 1 é só trocar os nomes dos triângulos).

Ainda como conseqüência do teorema 7.5, podemos demonstrar o Teorema de Thales. A sua demonstração mais comum é considerar o caso em que os segmentos divididos pelo feixe de retas são comensuráveis, isto é, a razão entre seus comprimentos é racional, e depois utilizar um argumento parecido com o que utilizamos no capítulo 1 para tratar do caso em que a razão entre os comprimentos é irracional. Em nossa exposição, toda a complexidade relativa a comprimentos irracionais já foi absorvida na discussão sobre áreas de figuras planas, no capítulo 5. Uma vez que o teorema fundamental envolvendo homotetias foi demonstrado por meio de áreas, a demonstração do Teorema de Thales decorre como conseqüência imediata, sem grandes considerações adicionais.

Teorema 7.10 (Teorema de Thales). Um feixe de retas paralelas divide quaisquer duas retas transversais em segmentos proporcionais.

Demonstração: Vamos considerar um feixe de retas paralelas com apenas três retas paralelas α , β e γ . Considere também duas transversais η e ζ que cruzam, respectivamente, essas três paralelas pelos pontos A, B, C e A', B', C', determinando os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$. Não é necessário examinar um feixe de mais de três paralelas, pois basta analisar a proporcionalidade entre pares de segmentos. Existem três configurações possíveis, conforme nos mostra a figura 7.11, a seguir.

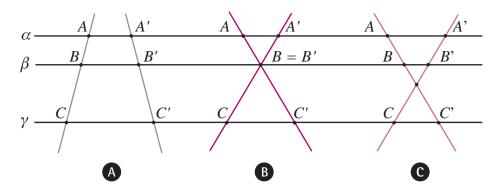


Figura 7.11 - Teorema de Thales

No caso (a) da figura 7.11, em que as transversais não se cruzam ao longo dos segmentos determinados pelas paralelas, considere o segmento $\overline{AC'}$ cruzando a reta β , no ponto X, conforme ilustrado na figura 7.12. Assim, são determinados os triângulos ΔAXB , $\Delta AC'C$, $\Delta C'XB'$ e $\Delta C'AA'$.

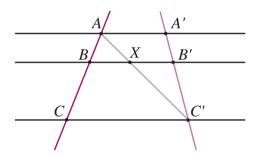


Figura 7.12 - Demonstração para o caso (a)

Como $\overline{BX}//\overline{CC'}$ e $\overline{XB'}//\overline{AA'}$ temos, pelo teorema 7.7, as seguintes semelhanças de triângulos: $\Delta AXB \sim \Delta ACC'$ e $\Delta C'XB' \sim \Delta C'AA'$. Logo,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AX},\tag{7.18a}$$

o que implica em

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC - AB}{AB} = \frac{AC}{AB} - 1 = \frac{AC'}{AX} - 1 = \frac{AC' - AX}{AX} = \frac{XC'}{AX}. (7.19)$$

Da mesma forma, temos

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC'}{XC'},\tag{7.18b}$$

o que implica em

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'C' - B'C'}{B'C'} = \frac{A'C'}{B'C'} - 1 = \frac{AC'}{XC'} - 1 = \frac{AC' - XC'}{XC'} = \frac{AX}{XC'}. (7.20)$$

Portanto, podemos concluir que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AX}{XC'} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$
 (7.21)

No caso (b), como as duas transversais se cruzam exatamente no vértice B=B' sobre a reta paralela β , podemos considerar os triângulos $\Delta ABA'$ e $\Delta C'BC$. Devido ao axioma das paralelas, podemos verificar facilmente que $\angle BAA' \equiv \angle BCC'$ e $\angle BA'A \equiv \angle BC'C$. Pelo caso (AA) de semelhança de triângulos, demonstrado no teorema 7.9, temos que $\Delta ABA' \sim \Delta CBC'$. Portanto,

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A'B}{C'B}. (7.22)$$

Para o caso (c), quando as transversais se cruzam em um ponto não pertencente a uma das retas do feixe de paralelas, considere a reta δ , paralela às retas do feixe passando por este ponto de intersecção e utilize o caso (b), já demonstrado. Você, aluno, está convidado a fazer os detalhes desta instrutiva demonstração (ver o exercício proposto (2) no final desta seção).

Exercício Resolvido

Seja o segmento \overline{BC} e os segmentos paralelos $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$, conforme indicado na figura 7.13, abaixo. Considere os pontos $M=\overline{AC}\cap \overline{BD}$ e $N\in \overline{BC}$ de forma que o segmento \overline{MN} seja paralelo aos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} . Mostre que

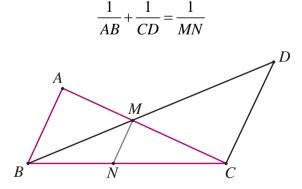


Figura 7.13 - Figura para o exercício resolvido 7.4.

Resolução: Como $\overline{MN}/\overline{AB}/\overline{CD}$, temos, pelo teorema 7.7, as seguintes semelhanças de triângulos: $\Delta ABC \sim \Delta MNC$ e

 $\Delta DCB \sim \Delta MNB$. Logo, podemos concluir que

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{BC},\tag{7.23}$$

$$\frac{MN}{DC} = \frac{NB}{CB}. ag{7.24}$$

Adicionando-se as expressões (7.23) e (7.24), temos

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD} = \frac{NC + NB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1,$$
 (7.25)

o que nos leva a concluir que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{MN}.$$
 (7.26)

Exercícios propostos

- 1) Faça os detalhes da demonstração do item (3), caso (*LAL*) de semelhança, do teorema 7.9.
- 2) Faça os detalhes da demonstração do item (c) do teorema 7.10.
- Mostre que dois ângulos semelhantes são, de fato, congruentes.
- 4) Seja um triângulo retângulo ΔABC , cujo ângulo reto está no vértice A, e considere a altura relativa à hipotenusa \overline{AK} . Identifique os triângulos semelhantes nesta figura e mostre que, de fato, esses triângulos são semelhantes. Demonstre o teorema de Pitágoras a partir dessas semelhanças.
- 5) Seja uma circunferência de centro O e raio r e um ponto P na região exterior ao círculo de mesmo centro e raio. Considere duas secantes \overline{PA} e \overline{PC} intersectando a circunferência, respectivamente, nos pontos $A, B \in \overline{PA}$ e $C, D \in \overline{PC}$. Mostre que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- 6) Sejam uma circunferência de centro O e raio r e duas cordas \overline{AB} e \overline{CD} se intersectando no ponto P. Mostre que $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

7.4 Semelhanças e Áreas

O conceito de semelhança é extremamente útil para o cálculo de áreas. Da formula da área de um retângulo podemos concluir que se dois retângulos são semelhantes com razão de semelhança r, então a razão entre suas áreas será igual a r^2 . De fato, sejam os lados do primeiro retângulo iguais a a e b. O segundo retângulo terá, portanto, lados $r \cdot a$ e $r \cdot b$ (veja o exercício proposto (2) no final desta seção para mostrar que uma figura semelhante a um retângulo é, de fato, um retângulo). A área do segundo retângulo será $(r \cdot a) \cdot (r \cdot b) = r^2 \cdot a \cdot b$, ou seja, igual a r^2 vezes a área do primeiro retângulo. De igual modo, podemos ver que se dois paralelogramos são semelhantes com razão r, então a razão entre suas áreas será igual a r^2 (ver os exercícios propostos (1) e (3) no final desta seção). Isto nos leva à questão se a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é sempre igual ao quadrado da razão de semelhança. Este é o grande resultado desta seção, que possui várias implicações geométricas profundas. Antes, porém, vejamos um pequeno resultado técnico.

Teorema 7.11. Sejam os triângulos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ tais que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = r$ então $A(\triangle A'B'C') = r^2 \cdot A(\triangle ABC)$.

Demonstração: Todo triângulo possui pelo menos um lado cuja altura relativa o intersecta, ou seja, existe pelo menos uma altura do triângulo que esteja contida inteiramente no interior do triângulo. Suponha que nos triângulos do enunciado, os lados homólogos \overline{BC} e $\overline{B'C'}$ sejam tais que existam pontos $M \in \overline{BC}$ e $M' \in \overline{B'C'}$ satisfazendo $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ e $\overline{A'M'} \perp \overline{B'C'}$. Pelo caso (AA) de semelhança, podemos ver que $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$, e como $\overline{A'B'} = r$, podemos concluir que $\overline{A'M'} = r$. A área do triângulo $\Delta A'B'C'$ é dada por

$$A(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2} \cdot (B'C' \cdot A'M') = \frac{1}{2} \cdot (r \cdot BC \cdot r \cdot MN) = r \cdot (BC \cdot MN)$$
$$= r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (BC \cdot MN), \quad (7.27)$$

o que equivale a dizer que

$$A(\Delta A'B'C') = r^2 \cdot A(\Delta ABC). \tag{7.28}$$

Teorema 7.12. Seja $\sigma: F \to F'$ uma semelhança de razão r entre duas figuras planas fechadas. Então a razão entre suas áreas é igual a r^2 .

Demonstração: Primeiramente, consideremos dois polígonos semelhantes P e P' de forma que a razão de semelhança seja r. Façamos uma triangulação em P e por P' consideremos a triangulação obtida através dos pontos homólogos da triangulação em P. Assim, pelo teorema 7.11, cada triângulo da triangulação em P' possui uma área cujo valor é r^2 vezes a área do triângulo correspondente em P. Como a área de P' é igual à soma das áreas dos triângulos de sua triangulação, então facilmente verificamos que $A(P') = r^2 \cdot A(P)$.

Suponhamos agora duas figuras semelhantes F e F', de forma que sua semelhança possua razão r. Sabemos que a área da fiqura F pode ser dada por uma aproximação por falta a partir da área de um polígono inscrito P e por excesso a partir da área de um polígono circunscrito Q. Sabemos também que, para qualquer polígono inscrito P e para qualquer polígono circunscrito Q temos que A(P) < A(F) < A(Q). Considere agora as imagens P', do polígono inscrito P, e Q', do polígono circunscrito Q, pela semelhança $\sigma: F \to F'$. Como uma semelhança associa pontos interiores a pontos interiores, pontos de fronteira a pontos de fronteira e vértices a vértices, então temos certeza de que o polígono P' é um polígono inscrito em F' e semelhante ao polígono P, de igual modo, Q' é um polígono circunscrito a F' e semelhante ao polígono Q. Também temos que A(P') < A(F') < A(Q'). A desigualdade anterior é estrita, pois um polígono inscrito que aproxima a figura por falta está inteiramente contido na figura e um polígono circunscrito que aproxima a figura por excesso contém inteiramente a figura. Mas, como visto anteriormente no caso de polígonos, tanto inscritos como circunscritos, teremos, $A(P') = r^2 \cdot A(P)$ e $A(Q') = r^2 \cdot A(Q)$. Então, podemos concluir que $A(F') = r^2 \cdot A(F)$. (Você está convidado a fornecer os últimos detalhes desta conclusão: o que ocorrerá se supusermos que $A(F') < r^2 \cdot A(F)$? E se supusermos que $A(F') > r^2 \cdot A(F)$?

Corolário. A área de um círculo é proporcional ao quadrado do seu raio e essa razão é a mesma para todos os círculos.

Demonstração: No exercício resolvido 7.3, mostramos que todas as circunferências e todos os círculos eram semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios. Em particular, todos os círculos são semelhantes a um círculo de raio unitário C. Assim, para qualquer círculo de centro O e raio r, que denotaremos por C', podemos definir a semelhança $\sigma: C \to C'$ de razão igual ao raio r. Pelo teorema 7.12, temos que

$$\frac{A(C')}{A(C)} = r^2. {(7.29)}$$

Denominando de π a área do círculo unitário C teremos que $A(C') = \pi \cdot r^2$. Como a escolha do círculo C' foi arbitrária e a comparação é sempre feita em relação ao círculo unitário, então esta fórmula é válida para todos os círculos.

O corolário acima nos mostra um importante fato sobre os círculos e suas áreas. Mas a semelhança entre circunferências nos garante também que o comprimento de qualquer circunferência é proporcional ao seu raio. Podemos ainda deduzir facilmente que esta constante de proporcionalidade é a mesma para todas as circunferências e que ela é igual ao comprimento de uma circunferência de raio unitário (ver o exercício proposto (4) no final desta seção). O fato não trivial é que a constante de proporcionalidade entre as áreas de círculos e a constante de proporcionalidade entre os comprimentos de circunferência estão relacionadas. A saber, o comprimento de uma circunferência de raio unitário é igual ao dobro da área de um círculo de raio unitário. Este resultado será melhor elucidado no Curso de Geometria 2.

Exercício resolvido

Lunas de Hipócrates: Na figura 7.14, abaixo, o triângulo ΔABC é retângulo com o ângulo reto no vértice A, os arcos AB, AC e BC são semicircunferências cujos diâmetros são os respectivos lados do triângulo. Mostre que a soma das áreas das regiões 1 e 5 é igual à área do triângulo ΔABC , denotado na figura como região 3.

O número π =3,141592... é a área de um círculo unitário e foi calculada aproximadamente pela primeira vez por Arquimedes. Embora possua uma origem geométrica, o número π , que é um número irracional, possui uma importância muito grande em diversas áreas da matemática, como o cálculo e a teoria de probabilidades.

Assim, o comprimento de uma circunferência de raio r se escreve como $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

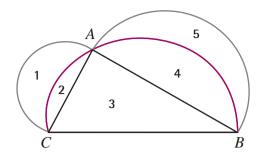


Figura 7.14 - Lunas de Hipócrates

Resolução: Os três semicírculos, AB, AC e BC, são também semelhantes entre si, e suas áreas são proporcionais aos quadrados dos lados do triângulo, que são seus diâmetros, assim

$$\frac{A(1) + A(2)}{(AC)^2} = \frac{A(4) + A(5)}{(AB)^2} = \frac{A(2) + A(3) + A(4)}{(BC)^2}.$$
 (7.30)

Por outro lado, o teorema de Pitágoras nos informa que $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$, o que nos leva a concluir que

$$\frac{A(1) + A(2 + A(4 + A(5)))}{(AC)^{2} + (AB)^{2}} = \frac{A(1) + A(2 + A(4 + A(5)))}{(BC)^{2}} = \frac{A(2) + A(3) + A(4)}{(BC)^{2}}.$$
 (7.31)

Da expressão (7.31), podemos concluir facilmente que A(1) + A(5) = A(3). Portanto, a soma das áreas das lunas (regiões 1 e 5) resulta igual à área do triângulo retângulo. Essa foi, na história, a primeira vez que a área de uma região curva foi avaliada. O processo de medição da área de uma figura era denominado quadratura pelos matemáticos gregos. Então este exercício resolvido também poderia ser denominado quadratura de lunas. A quadratura de Lunas foi feita pelo matemático grego do século V a.C. Hipócrates de Chios (não confundir com Hipócrates de Cós, o pai da medicina).

Exercícios Propostos

- 1) Mostre que uma figura semelhante a um paralelogramo é um paralelogramo.
- 2) Mostre que uma figura semelhante a um retângulo é um retângulo.

- 3) Mostre que a razão entre as áreas de dois paralelogramos semelhantes, com razão de semelhança r, é igual a r^2 .
- 4) Mostre que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual ao produto do raio pelo comprimento de uma circunferência de raio unitário.
- 5) Mostre que, se em um triângulo retângulo inscrevermos figuras semelhantes proporcionais aos lados do triângulo, a área da figura sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras sobre os catetos.

7.5 Aplicações de semelhanças

Nesta seção vamos mostrar o poder das técnicas de semelhanças para a resolução de problemas geométricos. Para tal propósito, escolhemos dois resultados clássicos pouco explorados no Ensino Básico, mas cuja beleza e profundidade os tornam irresistíveis: o Teorema de Ptolomeu sobre quadriláteros inscritos em uma circunferência e a fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo a partir da medida de seus lados.

Exercícios Resolvidos

1) **Teorema de Ptolomeu.** Seja um quadrilátero *ABCD* inscrito em uma circunferência. Mostre que o produto das medidas de suas diagonais é igual à soma dos produtos das medidas de seus lados opostos.

Resolução: Dado o quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência e cujas diagonais são os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} , temos que provar que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Considere o ponto $E \in \overline{BD}$, de forma que tenhamos a congruência de ângulos $\angle BAE \equiv \angle CAD$, conforme nos ilustra a figura 7.15.

Considerando os triângulos $\triangle BAE$ e $\triangle CAD$, temos que $\angle BAE \equiv \angle CAD$ e que $\angle ABE \equiv \angle ACD$. Estes últimos são congruentes, pois são ângulos inscritos na circunferência, relativos ao mesmo arco AD. Assim, pelo caso (AA) de semelhança de triângulos, temos que $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ e, portanto,

Em referência ao astrônomo grego Cláudio Ptolomeu, que viveu em Alexandria no século II da era cristã. Ptolomeu demonstrou esse teorema como um resultado auxiliar para calcular tábuas de senos e co-senos, mas ele é mais conhecido como o astrônomo que desenvolveu a formulação geocêntrica para o universo. Seu sistema geocêntrico foi adotado ainda por muitos séculos devido à grande precisão no cálculo das órbitas planetárias. Esta precisão se deveu principalmente ao sistema de epiciclos introduzido por ele.

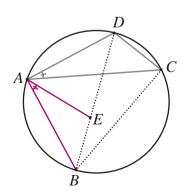


Figura 7.15 - Teorema de Ptolomeu

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}. ag{7.32}$$

Analisando agora os triângulos ΔDAE e ΔCAB , temos que $\angle DAE \equiv \angle CAB$, pois

$$D\widehat{A}E = B\widehat{A}E + E\widehat{A}C = C\widehat{A}D + E\widehat{A}C = C\widehat{A}B$$
.

Temos também que $\angle ADE \equiv \angle ACB$. Estes últimos são congruentes, pois são ângulos inscritos na circunferência relativos ao mesmo arco AB. Assim, pelo caso (AA) de semelhança de triângulos, temos que $\Delta DAE \sim \Delta CAB$ e, portanto,

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB}. ag{7.33}$$

Unindo as informações das expressões (7.32) e (7.33) e lembrando que BD = BE + DE , temos

$$AB \cdot CD + AD \cdot CB = AC \cdot BE + AC \cdot DE =$$

= $AC \cdot (BE + DE) = AC \cdot BD$. (7.34)

2) **Fórmula de Heron:** Seja um triângulo cujas medidas dos lados são *a* , *b* e *c* . Mostre que sua área pode ser escrita como

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Resolução: Seja o triângulo ΔABC . Considere a circunferência inscrita nesse triângulo, cujo centro, O, é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Sejam os pontos $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$ e $F \in \overline{AC}$ os pés das perpendiculares aos lados a partir do ponto O. Temos então que $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ e $\overline{OF} \perp \overline{AC}$. Além disso, como O é o incentro, temos que $\overline{OD} \equiv \overline{OE} \equiv \overline{OF}$. A figura 7.16, abaixo, nos ilustra o que foidito até o momento.

Como a área do triângulo ΔABC é igual à soma das áreas dos triângulos ΔAOB , ΔAOC e ΔBOC , temos que

$$A(\Delta ABC) = \frac{AB \cdot OD}{2} + \frac{BC \cdot OE}{2} + \frac{AC \cdot OF}{2} = AB + BC + AC$$
$$= OD \cdot \left(\frac{AB + BC + AC}{2}\right) = OD \cdot p. \qquad (7.35)$$

Em referência ao matemático grego Heron de Alexandria. Pouco se sabe sobre a vida de Heron. Os historiadores situam sua vida no século I da era cristã. É provável, no entanto, que as idéias ilustrando a demonstração desse teorema já fossem conhecidas por Arquimedes, quase três séculos antes.

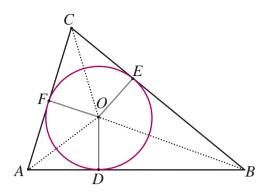


Figura 7.16 - O triângulo $\triangle ABC$ e seu incentro O

Por outro lado, como os lados do triângulo são tangentes àcircunferência (O,OD), temos que $\overline{AD} \equiv \overline{AF}$, $\overline{BD} \equiv \overline{BE}$ e $\overline{CE} \equiv \overline{CF}$. Assim, podemos escrever p = AD + BD + CF. Seja o ponto $G \in \overline{BA}$ tal que $\overline{AG} \equiv \overline{CF}$, conforme ilustrado na figura 7.17, então a área do triângulo ΔABC poderá ser escrita como o produto

$$A(\Delta ABC) = OD \cdot BG. \tag{7.36}$$

Considere ainda o segmento $\overline{OH} \perp \overline{BO}$ intersectando o lado \overline{AB} no ponto K, o segmento $\overline{AH} \perp \overline{AB}$ e o segmento \overline{BH} , conforme também indicado na figura 7.17.

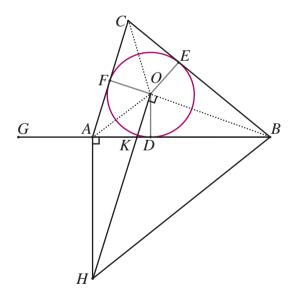


Figura 7.17 - Demonstração da fórmula de Heron

Como os ângulos $\angle BAH$ e $\angle BOH$ são ângulos retos, podemos concluir que ambos estão inscritos na mesma semicircunferência de diâmetro \overline{BH} , assim, o quadrilátero AOBH é um quadrilátero

inscrito em uma circunferência, o que implica que seus ângulos opostos sejam suplementares, ou seja,

$$\widehat{OAH} + \widehat{OBH} = 180^{\circ} \tag{7.37}$$

$$A\widehat{O}B + A\widehat{H}B = 180^{\circ} \tag{7.38}$$

Também sabemos que

$$\widehat{OAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + 90^{\circ} \tag{7.39}$$

$$O\widehat{B}H = \frac{A\widehat{B}C}{2} + A\widehat{B}H \tag{7.40}$$

e como $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 180^{\circ} - \widehat{ACB}$ temos que

$$180^{\circ} = O\widehat{A}H + O\widehat{B}H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (B\widehat{A}C + A\widehat{B}C) + 90^{\circ} + A\widehat{B}H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (180^{\circ} - A\widehat{C}B) + 90^{\circ} + A\widehat{B}H =$$

$$= 180^{\circ} - \frac{A\widehat{C}B}{2} + A\widehat{B}H \qquad (7.41)$$

Da expressão acima, concluímos que $A\widehat{B}H=\frac{A\widehat{C}B}{2}=O\widehat{C}F$. Do caso (AA) de semelhança de triângulos, podemos concluir que $\Delta OCF\sim \Delta HBA$, assim

$$\frac{AB}{FC} = \frac{AH}{FO} = \frac{AH}{OD}. ag{7.42}$$

O caso (AA) de semelhança de triângulos também nos garante que $\Delta AHK \sim \Delta DOK$ (ver o exercício proposto (1) no final desta seção). Assim, temos

$$\frac{AH}{DO} = \frac{AK}{DK}. ag{7.43}$$

Temos, das expressões (7.42) e (7.43), a seguinte igualdade:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AB}{FC} = \frac{AH}{DO} = \frac{AK}{DK},\tag{7.44}$$

o que nos conduz à expressão

$$\frac{BG}{AG} = \frac{AB + AG}{AG} = \frac{AB}{AG} + 1 = \frac{AK}{DK} + 1 = \frac{AK + DK}{DK} = \frac{AD}{DK}.$$
 (7.45)

De (7.45) temos que

$$BG \cdot DK = AD \cdot AG. \tag{7.46}$$

Note, finalmente, que o triângulo ΔKOB é retângulo com hipotenusa \overline{KB} e que o segmento \overline{OD} é a altura relativa à hipotenusa. Como foi visto no capítulo 5, temos que

$$(OD)^2 = KD \cdot DB. \tag{7.47}$$

Juntando todos os resultados obtidos até agora:

Da equação (7.36) temos que

$$(A(\Delta ABC))^{2} = (BG)^{2} \cdot (OD)^{2} = BG \cdot BG \cdot KD \cdot DB =$$

$$= BG \cdot AD \cdot AG \cdot DB, \qquad (7.48)$$

onde, na segunda igualdade, utilizamos a expressão (7.47) e, na terceira igualdade, utilizamos a expressão (7.46).

Note que BG = p e se chamarmos BC = a , AC = b e AB = c , teremos que AD = p - a , AG = CF = p - c e DB = BE = p - b (ver o exercício (2) desta seção), assim, teremos a expressão

$$A(\Delta ABC)^2 = p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \tag{7.49}$$

que equivale a

$$A(\Delta ABC) = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$
 (7.50)

Exercícios propostos

- 1) Mostre que, de fato, $\triangle AHK \sim \triangle DOK$ na demonstração da fórmula de Heron.
- 2) Verifique que, na demonstração da fórmula de Heron, realmente, temos AD = p a, AG = CF = p c e DB = BE = p b.
- 3) Seja um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa seja a e as medidas dos catetos sejam b e c. Mostre que a fórmula de Heron implica no teorema de Pitágoras.

Problemas

- 1) Uma figura convexa é uma figura F com a propriedade que o segmento unindo quaisquer dois pontos $A, B \in F$ está inteiramente contido em F. Mostre que se $\sigma: F \to F'$ é uma semelhança, então F' também é uma figura convexa.
- 2) No triângulo $\triangle ABC$ da figura abaixo, temos que $AK = \frac{AB}{3}$, $BL = \frac{BC}{3}$ e $CM = \frac{CA}{3}$, calcule a relação entre a área do triângulo $\triangle PQR$ e a área do triângulo $\triangle ABC$.

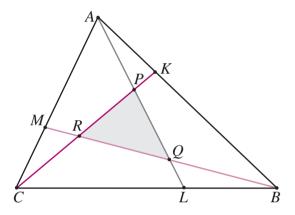


Figura 7.18 - Figura para o problema 2

3) Sabendo-se que o quadrado ABCD da figura abaixo é de lado unitário. Sendo \underline{M} o ponto médio do lado \overline{BC} e N o ponto médio do lado \overline{DC} , calcule a área do triângulo ΔPMB .

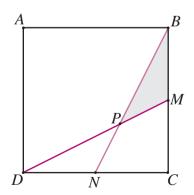


Figura 7.19 - Figura para o problema 3

4) Sabendo-se que o quadrado ABCD da figura abaixo é de lado unitário. Sendo \underline{M} o ponto médio do lado \overline{BC} e N o ponto médio do lado \overline{DC} , calcule a área do triângulo ΔPMB .

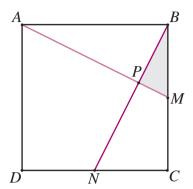


Figura 7.20 - Figura para o problema 4

5) Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero de lado igual a 20 cm. Sabendo-se que M é o ponto médio do lado \overline{AB} e que o segmento \overline{CS} na continuação do lado \overline{BC} mede 12 cm, calcule a área do quadrilátero BCNM

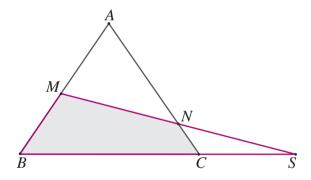


Figura 7.21 - Figura para o problema 5

Resumo

Neste capítulo, você aprendeu que:

- 1) Para se ter uma semelhança é necessário que se tenha uma correspondência 1 a 1 entre os pontos de duas figuras e um número real positivo que seja a razão entre as distâncias entre quaisquer pares de pontos homólogos nestas figuras.
- 2) As semelhanças são relações de equivalência.

- 3) As semelhanças associam pontos colineares a pontos colineares.
- 4) Uma semelhança associa segmento a segmento, círculo a círculo, ponto interior a ponto interior, contorno a contorno e vértice a vértice.
- 5) Uma homotetia é uma transformação geométrica que, a partir de um ponto fixo O, transforma todo ponto X no plano ou no espaço, segundo a semi-reta \overrightarrow{OX} e segundo um mesmo fator de escala.
- 6) Uma homotetia é uma semelhança que leva cada linha reta em si mesma ou em uma paralela.
- 7) Toda semelhança é a composição de uma homotetia e de uma isometria.
- 8) Dois triângulos são semelhantes se possuem todos os seus ângulos de vértices homólogos congruentes e se as medidas de todos os seus lados obedecem à mesma proporção.
- 9) Se em um triângulo tivermos um segmento entre dois dos seus lados paralelo ao terceiro lado, então esses triângulos são semelhantes.
- 10) Se, por outro lado, tivermos um segmento entre dois dos lados de um triângulo tal que o triângulo maior seja semelhante ao menor, então esse segmento é paralelo ao terceiro lado do triângulo dado.
- 11) As condições mínimas para se garantir a semelhança entre dois triângulos são que as medidas de seus lados sejam proporcionais ou que possuam dois de seus ângulos congruentes, ou ainda, que possuam um ângulo congruente entre dois lados proporcionais.
- 12) Se $\sigma: F \to F'$ é uma semelhança de razão r entre duas figuras planas fechadas, então a razão entre suas áreas é igual a r^2 .
- As semelhanças constituem uma poderosa ferramenta para se resolver problemas geométricos.

Bibliograf a comentada

1) LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática)

O capítulo de semelhanças e áreas desse livro é referência básica para o assunto e leitura obrigatória para todos que querem se aprofundar no tema. Nesse capítulo, o mestre Elon discute também a relação entre a área do círculo e o comprimento da circunferência.