

Momento Angular

Um Prelúdio à Teoria de Grupos em Física

Eliezer Batista

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina,
CEP:88 040-900, Florianópolis, SC.

Roda mundo, roda-gigante,
Roda moinho, roda pião.
O tempo rodou num instante
Nas voltas do meu coração.

(Roda Viva), Chico Buarque

Conteúdo

Introdução	2
1 Rotações em Três Dimensões	6
1.1 O Espaço Euclidiano em Três Dimensões	6
1.2 Delta e Epsilon	10
1.3 Transformações Ortogonais e Rotações	12
2 O M.A. na Mecânica Clássica	21
2.1 O Momento Angular	21
2.2 Simetria e Leis de Conservação	25
2.3 O Formalismo Hamiltoniano e Transformações Canônicas	31
3 O M.A. em Mecânica Quântica	40
3.1 Do Clássico ao Quântico	40
3.2 O Momento Angular Quântico	46
3.3 Harmônicos Esféricos	51
3.4 Teoria do Spin	57
4 Grupos e Álgebras de Lie	60
4.1 Grupos de Lie	60
4.2 Álgebras de Lie	70
Bibliografia	77

Introdução

Estas notas destinam-se ao acompanhamento do minicurso entitulado *Momento Angular, Um Prelúdio à Teoria de Grupos em Física*, ministrado durante a Primeira Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, realizada em Belo Horizonte de 14 a 18 de outubro de 2002. Este minicurso destina-se principalmente a alunos de graduação e pós-graduação em Física ou Matemática e a todos quantos se interessam em ver as interconexões entre estas duas ciências.

Existem duas motivações principais para a realização de um minicurso como este, uma negativa e outra positiva. Negativamente falando, este curso se faz necessário devido a uma deficiência existente na maioria dos cursos de graduação em física e em matemática. Se por um lado, nos cursos de física não se enfatiza o ensino de estruturas matemáticas e o rigor desta disciplina, por outro lado nos cursos de matemática não se apresenta a interação desta com outras ciências, em particular a física, tornando a matemática um assunto estanque, sem contato com o mundo real. Positivamente falando, um curso como este se faz necessário pois nas últimas décadas a física teórica se viu cada vez mais necessitada de ferramentas matemáticas muitíssimo mais sofisticadas e a própria pesquisa em matemática pura teve seus rumos delineados nos últimos anos por idéias e técnicas oriundas da física. Portanto esta interação não é apenas uma curiosidade acadêmica, mas uma necessidade real para o avanço das pesquisas nos próximos anos.

Como o tempo disponível é muito restrito e as conexões são numerosas, decidimos nos concentrar na teoria de grupos e sua utilização em física. A teoria de grupos sempre aparece em física quando tratamos de simetrias em sistemas físicos. Mesmo este tema de simetrias tem se mostrado vastíssimo, isto pode ser observado pela ubiqüidade da teoria de grupos em física teórica, da estrutura de cristais a teorias de calibre (gauge). Foram descobertas também uma série de conexões inusitadas entre áreas aparentemente diferen-

tes, formando uma imensa teia conceitual impossível de ser exaurida. Logo resolvemos nos concentrar em um tema clássico que possui um sem número de desenvolvimentos subseqüentes e cujas técnicas servem de padrão para a formulação de uma teoria geral: o momento angular em mecânica clássica e em mecânica quântica. O momento angular é uma quantidade simples de ser definida mas que possui implicações profundas como, por exemplo, este é uma quantidade conservada decorrente da isotropia espacial [5, 7], isto é sempre que não exista uma direção privilegiada no espaço, o momento angular é conservado. Os conceitos básicos subjacentes a toda esta discussão são os conceitos de Grupo de Lie e Álgebras de Lie [12]. A teoria abstrata teve início com o matemático alemão Sophus Lie, que explorava as simetrias de equações diferenciais como formas de encontrar soluções exatas, veja por exemplo na referência [12] sobre a idéia do trabalho original de Lie. Os campos vetoriais que geravam as transformações do grupo possuíam também propriedades algébricas interessantes. O espaço vetorial formado por estes geradores infinitesimais constitui o que é chamado uma álgebra de Lie [4, 10].

Já do ponto de vista físico, o grande impulso para a utilização da teoria de grupos em física foi o surgimento da mecânica quântica. Em seus primórdios, a mecânica quântica consistia de uma série de regras *ad-hoc* como uma tentativa de explicar efeitos físicos observados experimentalmente em medidas atômicas, veja, por exemplo o primeiro capítulo da referência [14] para um breve apanhado histórico das origens da mecânica quântica. Uma das regras mais importantes são as regras de quantização de Bohr-Sommerfeld, que diziam que o momento angular dos elétrons ao redor do núcleo somente poderiam assumir valores múltiplos inteiros de $\hbar \approx 10^{-34}$ unidades do S.I. Estas regras de quantização por exemplo explicavam por que um elétron não caia no núcleo atômico, pois segundo a física clássica um elétron em uma órbita circular ou elíptica ao redor do núcleo emitiria radiação, perdendo energia e portanto colapsando com o núcleo. A explicação para estas regras de quantização só viriam mais tarde com a resolução da equação de Schrödinger em três dimensões, onde o momento angular aparece explicitamente ao escrever-se o laplaciano em coordenadas esféricas [11, 14]. A separação de variáveis em uma parte radial e uma parte angular mostraram explicitamente que as soluções obedeciam às regras de quantização anteriormente propostas. Mas o papel da teoria de grupos na mecânica quântica foi delineado principalmente por Wolfgang Pauli, Hermann Weyl [13] e Paul A.M. Dirac [3]. Um pouco redescobrimos conceitos antigos, um pouco inventando idéias novas, os físicos foram construindo as bases para a moderna teoria de representações utilizan-

do como matéria prima as álgebras de Lie dos grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ (como álgebras elas são isomorfas, mas a teoria de representações possui sutilezas).

Este curso basicamente está dividido em 4 capítulos. Cada capítulo está planejado para ser exposto em uma aula de 1 hora, com exceção do terceiro capítulo que nos tomará duas aulas. Portanto, muitos detalhes de cálculos são deixados para os leitores através de exercícios, que servirão para complementar a teoria exposta nas aulas bem como para estimular o aprendizado. No primeiro capítulo, estabelecemos a linguagem mínima para tratarmos do momento angular. Isto compreende a geometria no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , o produto vetorial, rotações e transformações ortogonais. No segundo capítulo, expomos o momento angular nas diversas formulações da mecânica clássica: a mecânica Newtoniana, a Lagrangeana e a Hamiltoniana, em cada uma destas formulações as propriedades de simetria vão ficando mais explícitas bem como a relação entre os grupos de transformações e a álgebra de Lie de seus geradores infinitesimais. No terceiro capítulo, faremos a tradução da mecânica clássica para a mecânica quântica e veremos como os estados quânticos associados ao momento angular estão associados às representações da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e apresentaremos o spin no contexto de representações da álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Finalmente, no quarto capítulo, retomaremos os temas anteriores de um ponto de vista mais formal, definiremos a noção de grupo de Lie e álgebra de Lie em abstrato, mostraremos como estes dois objetos matemáticos estão relacionados. Mostraremos também qual a relação que existe entre os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$, já que suas álgebras possuem uma forma idêntica. Por último daremos alguns conceitos da teoria de representações.

Embora este seja um assunto padrão nos livros de mecânica quântica e basicamente a teoria de representações de $SO(3)$ e $SU(2)$ serem bem conhecidas, há desenvolvimentos modernos envolvendo idéias simples com estes grupos. Citamos como exemplo a teoria de redes de Spin de Roger Penrose [6, 9] e a esfera difusa de Madore [8]. Ao longo do curso, visamos oferecer uma perspectiva para os alunos em final de graduação e início de um programa de pós graduação de que existe ainda muita coisa a ser pesquisada mesmo com objetos razoavelmente simples como a álgebra $\mathfrak{su}(2)$.

Neste curso, pretendemos ser auto contidos no que diz respeito aos conceitos físicos, permitindo assim que alunos de matemática também possam participar sem se sentirem perdidos. O pré requisito mínimo para um bom acompanhamento deste curso é que o aluno já tenha tido contato com o cálculo básico em uma e várias variáveis e com a álgebra linear. Mas cer-

tamente obterão maior proveito deste curso alunos que já cursaram alguma disciplina de mecânica clássica e de mecânica quântica. Para estes, em termos de física não terá nada de novo, mas poderá se obter uma nova perspectiva destes mesmos assuntos sob um ponto de vista de teoria de grupos e álgebras de Lie.

Capítulo 1

Rotações em Três Dimensões

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos básicos e notações que nos serão importantes no decorrer do curso. O leitor que já estiver familiarizado com os sistemas de coordenadas no espaço, com produtos escalares e com matrizes ortogonais poderá ir direto para o capítulo 2, onde trataremos do momento angular em mecânica clássica.

1.1 O Espaço Euclidiano em Três Dimensões

O espaço que estamos considerando é o espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Como espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 \cong \text{Span} \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}.$$

Vamos denotar a base canônica de \mathbb{R}^3 por \hat{e}_i , para $i = 1, 2, 3$, onde

$$\hat{e}_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad \hat{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \hat{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Assim, um vetor em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como a soma

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i.$$

A vantagem de denotarmos desta maneira a base de \mathbb{R}^3 , ao invés dos usuais vetores i, j e k , é a possibilidade de escrevermos todas as fórmulas em notação abstrata, usando somatórios e índices. A utilidade disto ficará clara a medida que formos evoluindo no texto.

Dois sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^3 serão particularmente úteis no decorrer deste texto, o sistema de coordenadas retangulares, ou Cartesianas, e o sistema de coordenadas esféricas. Em coordenadas retangulares, um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é escrito como $\vec{v} = (x, y, z)$, conforme ilustrado na Figura 1.1.

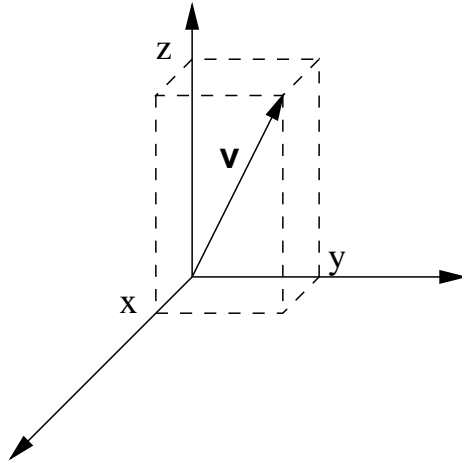


Figura 1.1: Representação de um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ em coordenadas retangulares.

Em coordenadas esféricas, um vetor é representado por três parâmetros r , θ e ϕ , e está relacionado com o sistema cartesiano pelas equações

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

conforme indicado pela Figura 1.2.

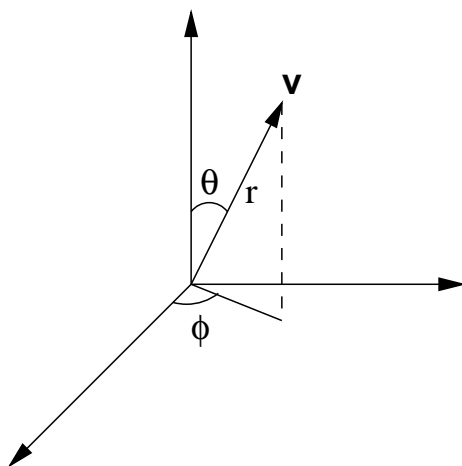


Figura 1.2: Representação de um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ em coordenadas esféricas.

Exercício 1 Encontre as relações inversas de (1.1), isto é, encontre as expressões de r , θ e ϕ em termos de x , y e z .

Além da estrutura vetorial, o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 também é munido de um produto escalar, o que lhe confere propriedades métricas. O produto escalar é uma aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Com as seguintes propriedades:

1. É bilinear

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

2. É simétrica

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

3. É positiva definida

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad ; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \mathbf{0}.$$

Uma última estrutura em \mathbb{R}^3 que nos será importante é o produto vetorial, que é uma operação

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} \times \vec{w}. \end{aligned}$$

onde o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal ao plano gerado por \vec{v} e \vec{w} , com módulo igual à área do paralelogramo gerado por \vec{v} e \vec{w} e com orientação compatível com a base canônica de \mathbb{R}^3 , conforme indicado na Figura 1.3:

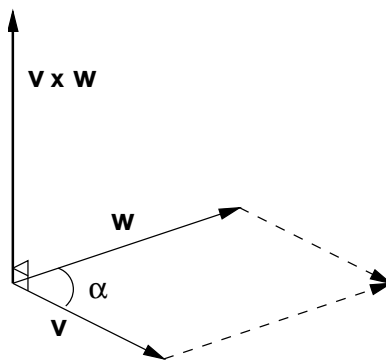


Figura 1.3: O produto vetorial de dois vetores \vec{v} e \vec{w} .

Se os dois vetores \vec{v} e \vec{w} estiverem separados por um ângulo α , conforme indicado na figura acima, então o módulo de $\vec{v} \times \vec{w}$ será

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \alpha.$$

Logo, podemos concluir que $\vec{v} \times \vec{v} = \mathbf{0}$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, pois neste caso a área determinada é igual a zero. Por orientação compatível com a base canônica, queremos dizer que se escolhermos qualquer permutação cíclica de \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , sempre o terceiro elemento será o produto vetorial dos dois primeiros nesta ordem, isto é

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.2)$$

O produto vetorial é anti-simétrico, isto é, $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Devido às relações (1.2) e à total anti-simetria do produto vetorial, podemos escrever o produto vetorial de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ como o determinante

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Exercício 2 a) *Mostre que o produto vetorial é bilinear, isto é*

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}, \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \\ (\lambda \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{v} \times (\lambda \vec{w}) = \lambda \vec{v} \times \vec{w}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) *Mostre que o produto vetorial satisfaz à identidade de Jacobi:*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \mathbf{0}.$$

c) *Mostre as seguintes propriedades do produto vetorial:*

$$\begin{aligned}\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}).\end{aligned}$$

1.2 Delta e Epsilon

Vamos aumentar um pouco mais o grau de abstração, tornando a notação mais simbólica, em termos de somas e de índices. Para isto, vamos definir dois objetos matemáticos que nos auxiliarão muito nos cálculos. O primeiro é o delta de Kronecker, para os índices i e j , variando de 1 até n , temos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j, \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

Visto como uma transformação linear em um espaço vetorial \mathbb{R}^n , o delta de Kronecker não passa da matriz identidade n por n . Em nosso caso, vamos na maior parte do tempo utilizar os índices variando de 1 a 3 .

Exercício 3 *Mostre que*

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i, \quad (\text{para } i \text{ fixo}). \\ \text{b)} \quad & \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \mathbf{a}_{jk} = \mathbf{a}_{ik}, \quad (\text{para } i \text{ e } k \text{ fixos}).\end{aligned}$$

O segundo objeto, é o tensor totalmente anti-simétrico, ou tensor de Levi-Civita. Dados os índices i_1, \dots, i_n , todos variando de 1 até n , definimos o tensor totalmente anti-simétrico por

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{Se existem } k \text{ e } l, \text{ tais que } i_k = i_l, \\ 1, & \text{Se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação par de } 1 \dots n, \\ -1 & \text{Se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação ímpar de } 1 \dots n. \end{cases}$$

No decorrer de todo este curso, utilizaremos apenas o tensor anti-simétrico para $n = 3$. Ao contrário do delta de Kröneckler, a não ser para $n = 2$, o tensor totalmente anti-simétrico (que denominaremos a partir de agora por tensor epsilon, ou simplesmente por epsilon) não pode ser visto facilmente como uma matriz, mais precisamente, este objeto pode ser visto como um elemento no n -ésimo produto tensorial do espaço \mathbb{R}^n .

Ao dizermos que uma permutação é par ou ímpar, estamos nos referindo ao seguinte fato: Toda permutação de n elementos pode ser escrita como uma composição de $(n - 1)$ permutações elementares s_i $i = 1, \dots, n - 1$ que troca os vizinhos nas posições i e $i + 1$. Assim uma permutação \mathcal{P} pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = s_{i_1} \dots s_{i_k}.$$

A permutação \mathcal{P} será par ou ímpar dependendo do número k de geradores necessários para se escrever a permutação.

Exercício 4 *Mostre que:*

- a) $s_i s_j = s_j s_i$, para $|i - j| \geq 2$,
- b) $s_i s_i = Id$, $\forall i = 1, \dots, n$,
- c) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $\forall i = 1 \dots n - 1$,

Uma regra prática para verificar se uma permutação é par ou ímpar é colocar a configuração inicial acima da configuração final e ligar os elementos correspondentes tomando o cuidado de evitar que se cruzem mais de duas linhas de cada vez. O número de cruzamentos definirá se a permutação é par ou ímpar. No caso de $n = 3$ temos que as permutações pares de **123** são: **123**, **231** e **312** e as permutações ímpares são: **213**, **132** e **321**.

Exercício 5 *Mostre que*

a) Os produtos vetoriais da base canônica dados em (1.2) podem ser resumidos na expressão

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (1.4)$$

b) Dados dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, a i -ésima componente de $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ na base canônica pode ser escrita como

$$(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} v_j w_k. \quad (1.5)$$

Exercício 6 Mostre que

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}, \\ \text{b)} \quad & \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{pj k} = 2\delta_{ip}. \end{aligned}$$

Exercício 7 Com as propriedades acima demonstradas do tensor ϵ_{ijk} e com a expressão (1.5) refaça as propriedades do produto vetorial do exercício (2).

1.3 Transformações Ortogonais e Rotações

Vimos que o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 está munido de um produto escalar, aliás, qualquer espaço \mathbb{R}^n possui a mesma estrutura, portanto podemos definir o que se segue para qualquer dimensão depois especificando para $n = 3$. Vamos agora considerar as transformações lineares que preservam o produto escalar euclidiano, ou seja, as transformações $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que dados quais quer dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ tenhamos

$$(A\vec{\mathbf{v}}) \cdot (A\vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}.$$

Exercício 8 Mostre que uma transformação ortogonal não altera o módulo de um vetor e nem o ângulo entre dois vetores.

Colocados em notação de índices, podemos escrever o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ como $\vec{\mathbf{v}} = (v_i)$, para $i = 1, \dots, n$ e a matriz \mathbf{A} como $\mathbf{A} = (a_{ij})$, para $i, j =$

$1, \dots, n$, assim, a i -ésima componente do vetor transformado $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v} = (v'_i)$, pode ser escrita como

$$v'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j.$$

O produto escalar entre os vetores transformados \vec{v}' e \vec{w}' então é

$$\begin{aligned} \vec{v}' \cdot \vec{w}' &= \sum_{i=1}^n v'_i w'_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} w_k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n v_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} \right) w_k = \sum_{j=1}^n v_j w_j. \end{aligned}$$

A última igualdade só pode ser satisfeita se

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}.$$

Exercício 9 *Mostre que esta última expressão equivale a dizer em termos de matrizes que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{A}^T é a transposta da matriz \mathbf{A} , e \mathbf{I} é a matriz identidade.*

Definição 1 *Uma matriz \mathbf{A} é dita ser ortogonal se sua inversa é igual à sua transposta, isto é $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$.*

Exercício 10 *Mostre que o conjunto das matrizes ortogonais em uma dada dimensão possui as seguintes propriedades:*

- a) *É fechado por multiplicação matricial, isto é, o produto de duas matrizes ortogonais também é uma matriz ortogonal.*
- b) *Este produto é associativo, isto é, $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$.*
- c) *A matriz identidade também é ortogonal.*
- d) *Se uma matriz é ortogonal, então sua inversa também é ortogonal.*

Exercício 11 *Mostre que o determinante de uma matriz ortogonal só pode ser 1 ou -1 . Mostre também que o sub-conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 satisfaz às propriedades a), b), c), d) do exercício anterior.*

Definição 2 Denominamos grupo a um conjunto G munido de uma operação que a cada dois elementos quaisquer $a, b \in G$ associa um outro elemento $ab \in G$ tal que esta operação seja

1. Associativa: $(ab)c = a(bc)$.
2. Possua elemento neutro $e \in G$, tal que $ea = ae = a, \forall a \in G$.
3. E qualquer elemento $a \in G$ possua um inverso $a^{-1} \in G$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Definição 3 O grupo das matrizes ortogonais em n dimensões é denotado por $O(n)$. O sub-grupo das matrizes ortogonais com determinante igual a um é denotado por $SO(n)$ e é denominado grupo ortogonal especial.

No decorrer deste minicurso, trataremos em detalhes as propriedades do grupo $SO(3)$ que, veremos, corresponde ao grupo das rotações no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 usual. O momento angular será uma grandeza física associada com rotações em três dimensões.

Bem, vamos agora estudar as rotações, veremos logo adiante que todas as transformações ortogonais especiais podem ser descritas como rotações. Para dar início, vejamos como se processam as rotações em duas dimensões, ou seja, no plano. Tome um vetor $\vec{v} = (x, y)$ no plano e efetuemos uma rotação de um ângulo s no sentido anti-horário (esta será a convenção para rotações positivas), resultando no vetor $\vec{v}' = (x', y')$, conforme indicado na Figura 1.4:

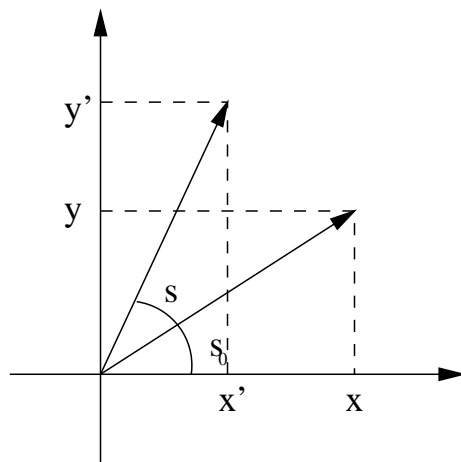


Figura 1.4: Uma rotação plana de um ângulo s no sentido anti-horário.

Vejamos como as componentes de \vec{v}' se relacionam com as componentes de \vec{v} . Podemos escrever as x e y em coordenadas polares

$$x = \|\vec{v}\| \cos s_0 \quad ; \quad y = \|\vec{v}\| \sin s_0,$$

conforme ilustrado na Figura 1.4. Vamos assumir a princípio que uma rotação não muda o comprimento de um vetor, o que é bem razoável intuitivamente, a seguir daremos uma prova mais concreta que uma rotação é de fato uma transformação ortogonal. As componentes de \vec{v}' podem ser escritas como (veja a Figura 1.4 novamente)

$$\begin{aligned} x' &= \|\vec{v}\| \cos(s + s_0) = \|\vec{v}\| \cos s_0 \cos s - \|\vec{v}\| \sin s_0 \sin s = \\ &= x \cos s - y \sin s, \\ y' &= \|\vec{v}\| \sin(s + s_0) = \|\vec{v}\| \cos s_0 \sin s + \|\vec{v}\| \sin s_0 \cos s = \\ &= x \sin s + y \cos s. \end{aligned}$$

Podemos resumir estas duas fórmulas na expressão matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Exercício 12 *Mostre que a matriz de rotação descrita em (1.6) é uma transformação ortogonal especial de $\mathbf{SO}(2)$.*

O exercício acima mostra que toda rotação em duas dimensões pertence a $\mathbf{SO}(2)$. Agora, podemos mostrar que toda transformação de $\mathbf{SO}(2)$ pode ser escrita como uma rotação. Basicamente, toda transformação de $\mathbf{SO}(2)$ é uma matriz 2 por 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de determinante igual a 1, cuja transposta é igual a sua inversa.

Exercício 13 *Mostre que a condição $A^T = A^{-1}$ implica em $a = d$ e $b = -c$.*

Assim, temos de fato a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

cujo determinante resulta em,

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Então, podemos encontrar um ângulo s de forma a escrevermos a matriz A na forma descrita em (1.6). Vamos denotar por $A = R(s)$.

Exercício 14 *Mostre que a composição de $R(s)$ e $R(t)$ é igual à rotação $R(s + t)$.*

Exercício 15 *Mostre que $SO(2)$ é um grupo Abelian, isto é, $AB = BA$ para quaisquer A e B em $SO(2)$.*

Vamos definir agora um novo objeto que será importante nas discussões posteriores, trata-se do gerador infinitesimal de rotações. No caso de $SO(2)$ temos somente um gerador infinitesimal, dado por

$$J = \lim_{s \rightarrow 0} R'(s) = \left. \frac{dR(s)}{ds} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Exercício 16 *Utilizando a expressão da exponencial de uma matriz como*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n,$$

mostre que toda rotação de $SO(2)$ pode ser escrita como $R(s) = e^{sJ}$.

Examinemos agora o que ocorre em dimensão três: Em primeiro lugar, uma rotação em dimensão três é sempre efetuada ao redor de um eixo, que é um vetor unitário que denominaremos \vec{n} . Relembremos que por convenção, as rotações são positivas quando tomadas no sentido anti-horário. Quando os eixos são os vetores da base canônica \hat{e}_i , para $i = 1, 2, 3$, temos as rotações ao redor dos eixos x , y e z , respectivamente.

Exercício 17 *Mostre que as matrizes de rotação ao redor dos eixos \mathbf{x} , \mathbf{y} , e \mathbf{z} no sentido anti-horário de um ângulo \mathbf{s} , são respectivamente*

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{s} & -\sin \mathbf{s} \\ 0 & \sin \mathbf{s} & \cos \mathbf{s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{s} & 0 & \sin \mathbf{s} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \mathbf{s} & 0 & \cos \mathbf{s} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_3(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{s} & -\sin \mathbf{s} & 0 \\ \sin \mathbf{s} & \cos \mathbf{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E mostre que elas são matrizes ortogonais.

Um fato menos trivial e que precisa ser provado é que as rotações em três dimensões também efetuam um grupo. Isto é se compusermos uma rotação ao redor de um eixo \mathbf{m} de um ângulo \mathbf{s} e após aplicarmos uma rotação ao redor de um eixo \mathbf{n} de um ângulo \mathbf{t} , existirá um eixo \mathbf{p} e um ângulo \mathbf{r} tal que a composição das duas rotações anteriores será uma rotação ao redor de \mathbf{p} por um ângulo \mathbf{r} . Por enquanto vamos assumir que podemos compor duas rotações, composição esta vista apenas como multiplicação de matrizes sem termos a certeza de que esta composição trata-se, de fato, de uma rotação.

É fácil ver que ao contrário das rotações em duas dimensões, as rotações em três dimensões não comutam entre si. Para você se convencer de que isto é verdade, basta tomar, por exemplo, $\mathbf{R}_1(\mathbf{s})\mathbf{R}_2(\mathbf{t})$ e você verá que o resultado é diferente de $\mathbf{R}_2(\mathbf{t})\mathbf{R}_1(\mathbf{s})$. ao fazer estas contas você também deve ter percebido que trabalhar diretamente com o grupo de rotações torna os cálculos muito mais complicados, por isto vamos entender ao longo deste curso como utilizarmos os geradores infinitesimais.

Exercício 18 *Mostre que os geradores infinitesimais associados às matrizes de rotação $\mathbf{R}_i(\mathbf{s})$, $i = 1, 2, 3$, são respectivamente*

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 19 Mostre que $\mathbf{R}_i(\mathbf{s}) = e^{sL_i}$, para $i = 1, 2, 3$.

Exercício 20 Definindo o comutador de duas matrizes por $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, mostre as seguintes relações de comutação:

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3.$$

Note a semelhança formal entre estas relações de comutação e as fórmulas do produto vetorial dos vetores da base canônica apresentados em (1.4).

Resta-nos agora descrevermos a matriz de rotação ao redor de um eixo arbitrário, que escrito em coordenadas esféricas fica

$$\vec{\mathbf{n}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Basicamente, a idéia é perceber que podemos obter o eixo $\vec{\mathbf{n}}$ a partir do vetor $\hat{\mathbf{e}}_3$ da base canônica, efetuando sobre este uma rotação de θ ao redor do eixo \mathbf{y} e depois uma rotação de ϕ ao redor do eixo \mathbf{z} :

$$\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_2(\theta) \hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{R}(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Exercício 21 Escreva a matriz $\mathbf{R}(\theta, \phi)$ e sua inversa $\mathbf{R}^{-1}(\theta, \phi)$, que corresponde à transformação que leva o vetor $\vec{\mathbf{n}}$ no vetor $\hat{\mathbf{e}}_3$.

Uma vez tendo estas matrizes de transformação, aplique $\mathbf{R}^{-1}(\theta, \phi)$ de forma que o eixo de rotação seja levado no vetor $\hat{\mathbf{e}}_3$, aplique a matriz $\mathbf{R}_3(\mathbf{s})$, onde \mathbf{s} é o ângulo de rotação desejado e aplique em seguida $\mathbf{R}(\theta, \phi)$, devolvendo tudo à configuração original, com uma única diferença: tudo estará rotacionado de um ângulo \mathbf{s} ao redor de $\vec{\mathbf{n}}$. Em resumo,

$$\mathbf{R}_{\vec{\mathbf{n}}}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}(\theta, \phi) \mathbf{R}_3(\mathbf{s}) \mathbf{R}^{-1}(\theta, \phi).$$

Note que escrevemos na ordem da direita para a esquerda, pois estas matrizes são aplicadas a vetores em \mathbb{R}^3 , então a matriz que estiver mais à direita será aplicada primeiro.

Exercício 22 Escreva explicitamente a matriz $\mathbf{R}_{\vec{\mathbf{n}}}(\mathbf{s})$, e mostre que ela é ortogonal.

Note que a matriz de rotação ao redor do eixo \vec{n} só depende das matrizes R_i , definidas anteriormente, portanto, elas são como um conjunto de geradores para todas as outras rotações em \mathbb{R}^3 . Você mais uma vez notou a dificuldade para se escrever uma rotação em geral. Então vejamos como se escreve o gerador infinitesimal para uma rotação ao redor de um eixo \vec{n} . Basicamente temos a fórmula

$$L_{\vec{n}} = \left. \frac{dR_{\vec{n}}(s)}{ds} \right|_{s=0} = R(\theta, \phi) L_3 R^{-1}(\theta, \phi).$$

Exercício 23 *Mostre que se aplicarmos o gerador infinitesimal $L_{\vec{n}}$ a um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, teremos*

$$L_{\vec{n}}\vec{v} = \vec{n} \times \vec{v}.$$

Na literatura física, você pode encontrar a seguinte afirmativa: uma rotação de um ângulo “infinitesimal”, ϵ ao redor de um eixo \vec{n} aplicada em um vetor \vec{v} é igual a $\epsilon\vec{n} \times \vec{v}$.

Como foi visto, as matrizes de rotação R_i , $i = 1, 2, 3$, são matrizes de $SO(3)$, logo toda rotação ao redor de um eixo também é uma matriz de $SO(3)$, e portanto toda composição de rotações. Falta-nos ver que toda matriz de $SO(3)$ pode ser escrita como uma rotação, o que vamos fazer nos parágrafos que se seguem.

Proposição 1 *Uma matriz $A \in SO(3)$ possui um auto valor real positivo:*

Demonstração: A matriz A possui um auto valor real devido ao fato da equação característica,

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0,$$

ser de grau três, logo possui uma raiz real. Este auto valor real é não nulo devido ao fato do determinante de A ser igual a 1. Logo, se λ_1 , λ_2 e λ_3 são os auto valores, o determinante pode ser escrito como

$$\text{Det}A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

Se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, e os outros dois auto valores são complexos, então $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, portanto $\lambda_1|\lambda_2|^2 = 1$, implicando que $\lambda_1 > 0$. Mesmo se todos os auto valores forem reais, não poderíamos ter todos negativos, caso contrário o

determinante seria negativo. Portanto, um dos auto valores de \mathbf{A} é real e positivo ■

Com este resultado, podemos reduzir a um problema bidimensional. Primeiramente, podemos fazer um reescalonamento no auto valores de forma que nosso auto valor real positivo seja igual a 1. Com esta escolha, podemos definir uma base $\hat{\mathbf{f}}_1$, $\hat{\mathbf{f}}_2$ e $\hat{\mathbf{n}}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o auto vetor unitário associado ao auto valor positivo de \mathbf{A} . Como o produto dos outros dois auto valores tem que ser igual a 1, temos que a transformação \mathbf{A} restrita ao plano $\hat{\mathbf{f}}_1$ e $\hat{\mathbf{f}}_2$ é uma transformação de $\mathbf{SO}(2)$. Assim, existe um ângulo s tal que a matriz \mathbf{A} pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O vetor $\hat{\mathbf{n}}$ então é o eixo desta rotação. Somente para amarrarmos uma ponta solta, observamos que toda transformação de $\mathbf{SO}(3)$ pode ser escrita como uma rotação, como $\mathbf{SO}(3)$ é um grupo, então podemos garantir que o conjunto das rotações em \mathbb{R}^3 também é um grupo, aliás isomorfo ao grupo $\mathbf{SO}(3)$. Por dois grupos isomorfos, entendemos que existe uma correspondência um a um entre eles e que as composições em um são mapeadas exatamente nas composições do outro. Maiores detalhes serão vistos no capítulo 4.

Capítulo 2

O Momento Angular na Mecânica Clássica

Neste capítulo, veremos a definição de momento angular que é uma quantidade conservada sempre onde há simetria de rotações. O momento angular também está diretamente relacionado, como veremos adiante, com os geradores infinitesimais de rotação.

2.1 O Momento Angular

O momento angular é uma grandeza que só está bem definida em \mathbb{R}^3 . A partir de agora, denotaremos a posição de uma partícula em \mathbb{R}^3 pelo seu raio vetor $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. De fato, ao descrevermos o movimento assumimos que este raio vetor é uma função do tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

O vetor velocidade da partícula será denotado por

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)).$$

Exercício 24 *Mostre que se os vetores \vec{v} e \vec{w} possuem dependência temporal então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \dot{\vec{v}} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{w}}, \\ \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{w}) &= \dot{\vec{v}} \times \vec{w} + \vec{v} \times \dot{\vec{w}}, \end{aligned}$$

Por questão de simplicidade na escrita, omitiremos a dependência temporal das grandezas, muito embora esta sempre esteja subentendida. Mais importante que simplesmente o vetor velocidade é o vetor momento

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

onde m é a massa da partícula em questão. Para um sistema de N partículas, indicaremos por um outro índice os vetores posição e momento de cada uma das partículas, \vec{r}_a e \vec{p}_a , onde a é um índice que varia de 1 a N . Todas as grandezas físicas descritas neste capítulo também podem ser definidas para um sistema de N partículas. Em virtude do caráter vetorial das grandezas, a quantidade total relativa ao sistema é sempre a soma das quantidades individuais de cada um dos componentes. Assim sendo, o momento total de um sistema de N partículas pode ser escrito como

$$\vec{p}_{\text{total}} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a = \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a.$$

Para um sistema de N partículas, é interessante trabalhar com as coordenadas do centro de massa:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}. \quad (2.1)$$

assim, as posições das partículas podem ser escritas como

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}'_a$$

da mesma forma, os vetores velocidade

$$\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{v}'_a,$$

onde \vec{V} é a velocidade do centro de massa relativa à origem do sistema de coordenadas. O momento total também pode ser decomposto

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{total}} &= \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{V} + \vec{v}'_a) = \\ &= \sum_{a=1}^N m_a \vec{V} + \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}'_a = \vec{P}_{\text{cm}} + \sum_{a=1}^N \vec{p}'_a, \end{aligned}$$

onde $\vec{\mathbf{P}}_{\text{cm}}$ é o momento do centro de massa e $\vec{\mathbf{p}}'_a$ é o momento de cada partícula relativo ao centro de massa.

A segunda lei de Newton consiste em afirmar que a variação do momento em relação ao tempo é igual à resultante de todas as forças agindo sobre o sistema:

$$\dot{\vec{\mathbf{p}}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}(t)}{dt} = m\dot{\vec{\mathbf{v}}} = \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Não havendo forças agindo sobre a partícula, seu momento permanece inalterado, ou seja a partícula continua ou em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (dependendo do referencial). Esta é uma formulação possível da lei da inércia.

Se as forças do sistema podem ser expressas como o gradiente de uma função escalar U (potencial) que só dependa das posições, isto é, que não possua dependência explícita em termos das velocidades ou do tempo (ou seja $U = U(\vec{\mathbf{r}})$) então o sistema é dito conservativo. A quantidade conservada é a energia total do sistema. A demonstração a seguir é para o caso de uma partícula, para um sistema de N partículas basta tomar-se o cuidado de se considerar as coordenadas de cada uma das partículas como variáveis independentes (é o mesmo que dizer que o espaço em consideração possui $3N$ dimensões).

Teorema 2 (Conservação da Energia) *Se a força resultante agindo sobre um sistema pode ser escrita como*

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

para $U = U(\vec{\mathbf{r}})$, então a energia total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

(onde $v^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$) é conservada, ou seja $\dot{E} = 0$.

Demonstração:

$$\dot{E} = m\dot{\vec{\mathbf{v}}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \nabla U \cdot \vec{\mathbf{v}} = (m\dot{\vec{\mathbf{v}}} + \nabla U) \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \quad \blacksquare$$

Definição 4 *O momento angular de uma partícula em \mathbb{R}^3 é definido como o vetor*

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}.$$

Devido ao caráter vetorial do momento angular, também o momento angular total de um sistema é igual à soma dos momentos angulares de seus componentes

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{total}} = \sum_{a=1}^N \vec{\mathbf{L}}_a = \sum_{a=1}^N \vec{\mathbf{r}}_a \times \vec{\mathbf{p}}_a.$$

O momento angular de cada partícula de um sistema também pode ser decomposto em um momento angular do centro de massa e no momento angular relativo ao centro de massa:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}_{\text{total}} &= \sum_{a=1}^N m_a (\vec{\mathbf{r}}_a \times \vec{\mathbf{v}}_a) = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{r}}'_a) \times (\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{v}}'_a) = \\ &= \vec{\mathbf{R}} \times \left(\sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{V}} \right) + \vec{\mathbf{R}} \times \left(\sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{v}}'_a \right) + \\ &+ \sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{r}}'_a \times \vec{\mathbf{V}} + \sum_{a=1}^N \vec{\mathbf{r}}'_a \times (m_a \vec{\mathbf{v}}'_a). \end{aligned}$$

O primeiro termo é o momento angular do centro de massa, o quarto termo é a soma dos momentos angulares relativos. O segundo e o terceiro termos são iguais a $\mathbf{0}$, pois

$$\sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{r}}'_a = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{\mathbf{r}}_a - \vec{\mathbf{R}}) = \sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{r}}_a - \sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{R}} = \mathbf{0},$$

pela definição de centro de massa em (2.1). Da mesma forma

$$\sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{v}}'_a = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m_a \vec{\mathbf{r}}'_a = \mathbf{0}.$$

Assim, temos

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{total}} = \vec{\mathbf{L}}_{\text{cm}} + \sum_{a=1}^N \vec{\mathbf{r}}'_a \times \vec{\mathbf{p}}'_a.$$

Com isto, discutiremos toda a física apenas em relação ao centro de massa sem perda de generalidade.

Um último aspecto do momento angular que é possível discutir somente no contexto da formulação Newtoniana da mecânica clássica é o fato que

se o potencial possui dependência funcional apenas do comprimento do raio (potencial central), então o momento angular é conservado. Isto é facilmente visto:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{L}}} &= \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \times m\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{r}} \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \\ &= m\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{r}} \times \frac{dU(r)}{dr}\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{0},\end{aligned}\quad (2.3)$$

onde $\mathbf{r} = \sqrt{\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}}$.

As propriedades do momento angular associadas com simetria podem ser vistas melhor nas formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da mecânica clássica.

2.2 Simetria e Leis de Conservação

A formulação Lagrangeana da mecânica clássica é muito mais apropriada para se explorar as propriedades geométricas de uma sistema mecânico. De início abandona-se o vínculo com as coordenadas cartesianas, possibilitando escrever as equações de movimento em qualquer sistema de coordenadas que se desejar. Em uma linguagem mais moderna, esta é uma formulação adequada para se trabalhar sobre variedades diferenciáveis, muito embora variedades estejam por trás de muitas construções que vamos fazer no decorrer deste minicurso, não vamos discutir variedades a fundo devido ao grande número de detalhes técnicos que fugiriam ao nosso escopo e nos tomariam um enorme tempo. Vamos denotar as coordenadas generalizadas por \mathbf{q}_i , note que até aqui não fizemos qualquer restrição quanto à dimensão do sistema, portanto o índice i pode variar de $\mathbf{1}$ até uma dimensão \mathbf{n} , esta dimensão depende do sistema tratado. O espaço onde são definidas nossas coordenadas generalizadas será denominado espaço de configurações do sistema \mathbf{M} . As velocidades associadas a estas coordenadas generalizadas serão escritas como $\dot{\mathbf{q}}_i$.

Em seguida, para caracterizarmos um sistema mecânico, definimos uma função escalar denominada Lagrangeana do sistema, que pode depender explicitamente das coordenadas, das velocidades e do tempo

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

onde entenda-se a dependência em todas as componentes \mathbf{q}_i e $\dot{\mathbf{q}}_i$. No caso da mecânica Newtoniana, a Lagrangeana do sistema pode ser escrita como a

diferença entre a energia cinética e a potencial

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U = T - U. \quad (2.4)$$

Por último, precisamos por as coisas para funcionar, para isto precisamos de equações de movimento. As equações de movimento são derivadas a partir de um princípio variacional, que passaremos a discutir agora.

Considere o espaço de todas as curvas definidas no espaço de configurações M

$$\mathcal{C}[M] = \text{Span} \{ \gamma : [a, b] \rightarrow M \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Defina a ação como um funcional linear que a cada curva $\gamma \in \mathcal{C}[M]$ associa o número

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} L,$$

entenda-se esta integral como

$$S[\gamma] = \int_a^b L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt,$$

onde t é o parâmetro da curva (que vamos confundir com o tempo), ou seja $\gamma = \gamma(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ são as coordenadas e velocidades medidos sobre a imagem da curva γ em M . Dados dois pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} em M , vamos considerar o sub-espaço das curvas cujas extremidades são \mathbf{A} e \mathbf{B} , ou seja

$$\mathcal{C}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{Span} \{ \gamma \in \mathcal{C}[M] \mid \gamma(a) = \mathbf{A}, \text{ e } \gamma(b) = \mathbf{B} \}$$

Podemos perguntar: De todas as curvas $\gamma \in \mathcal{C}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, qual a curva que minimiza o valor da ação S ? O princípio variacional diz que a curva que minimiza a ação é a trajetória real do sistema físico, o problema de encontrar esta curva minimizadora é equivalente ao de resolver as equações de movimento.

O cálculo variacional, que é a técnica matemática de resolver o problema da curva minimizadora, envolve o conceito de derivada funcional, que possui uma quantidade de sutilezas técnicas que nos tomariam um grande tempo e esforço e nos desviariam do objetivo deste curso. Por isto, vamos considerar uma formulação simplificada de apelo intuitivo e que evita discussões aprofundadas sobre o cálculo funcional. Enfim, se queremos encontrar um mínimo, devemos encontrar uma curva sobre a qual o valor da derivada de S

seja igual a zero. Derivada em relação a quê? A curvas obviamente. Suponha que a curva γ_0 seja sua solução. Então tome uma variação infinitesimal arbitrária $\delta\gamma$. Em cada instante $t \in [a, b]$, a curva $\gamma_0 + \delta\gamma$ possuirá coordenadas $\mathbf{q}_i(t) + \delta\mathbf{q}_i(t)$ e velocidades $\dot{\mathbf{q}}_i(t) + \delta\dot{\mathbf{q}}_i(t)$. Note que $\delta\mathbf{q}_i(a) = \delta\mathbf{q}_i(b) = \mathbf{0}$ pois todas as curvas possuem as mesmas extremidades. Portanto, queremos que

$$\delta S[\gamma_0] = S[\gamma_0 + \delta\gamma] - S[\gamma_0] = 0.$$

Basicamente, podemos tratar tudo dentro da integral

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma_0] &= \int_a^b \{L(\mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \delta\dot{\mathbf{q}}(t), t) - L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\} dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \delta\mathbf{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \delta\dot{\mathbf{q}}_i \right\} dt, \end{aligned}$$

efetuando uma integração por partes no último termo na integral, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma_0] &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \right\} \delta\mathbf{q}_i dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \delta\mathbf{q}_i \right) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

O último termo é igual a zero pois $\delta\mathbf{q}_i(a) = \delta\mathbf{q}_i(b) = \mathbf{0}$. Portanto temos que

$$\delta S[\gamma_0] = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \right\} \delta\mathbf{q}_i dt = 0$$

para uma variação arbitrária $\delta\gamma$, assim a única solução possível para o problema é a solução da equação diferencial

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Esta é a equação de Euler Lagrange.

Exercício 25 *Mostre que para um sistema conservativo com a lagrangeana (2.4) e com a dependência de \mathbf{U} apenas nas coordenadas e sendo as coordenadas $\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i$ e as velocidades $\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v}_i$ temos que a equação de Euler-Lagrange (2.5) é igual à segunda lei de Newton (2.2).*

Definição 5 Dado um sistema mecânico lagrangeano com coordenadas \mathbf{q}_i e lagrangeana L , definimos os momentos canonicamente conjugados às coordenadas \mathbf{q}_i como sendo

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}. \quad (2.6)$$

Na mecânica lagrangeana podemos mais facilmente identificar as simetrias do sistema e construir quantidades conservadas a partir das simetrias. Um primeiro exemplo de simetria é a homogeneidade temporal. Suponha que a Lagrangeana do sistema não possua dependência explícita no tempo, isto é

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Então podemos associar uma quantidade conservada. Primeiro note que

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \ddot{\mathbf{q}}_i \right\} + \frac{\partial L}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \ddot{\mathbf{q}}_i \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \right\}. \end{aligned}$$

Onde utilizamos a equação (2.5) na segunda igualdade. Logo, temos que

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L \right\} = 0,$$

portanto uma quantidade conservada. Esta quantidade conservada é denominada Hamiltoniana do sistema, ou energia total.

Exercício 26 Mostre que para a lagrangeana (2.4) a Hamiltoniana do sistema nada mais é que a energia

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2m} p^2 + U$$

Definição 6 Definimos por simetria de um sistema Lagrangeano toda aplicação diferenciável e com inversa diferenciável (difeomorfismo) $f : M \rightarrow M$, que preserva a Lagrangeana, isto é

$$L(f(q), \dot{f}(q), t) = L(q, \dot{q}, t).$$

Não é difícil verificar que o conjunto das simetrias de um sistema lagrangeano forma um grupo, pois a composição de duas simetrias continua sendo uma simetria, a composição é associativa, a transformação identidade também é uma simetria e como simetrias são difeomorfismos, então possuem inversa, que também são simetrias.

Definição 7 Um subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos é uma família de difeomorfismos em M

$$G_{\mathbb{R}} = \{\phi(s), s \in \mathbb{R} \mid \phi(0) = Id, \quad \phi(s)\phi(t) = \phi(s+t)\}.$$

Todo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos possui seu gerador infinitesimal

$$\xi = \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

E todo elemento do subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos pode ser escrito como a exponencial

$$\phi(s) = e^{s\xi}.$$

Agora, temos o elemento necessários para enunciarmos um dos resultados mais importantes da Mecânica Lagrangeana, o Teorema de Noether.

Teorema 3 (Noether) A todo subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos que são simetrias da Lagrangeana está associado uma quantidade conservada.

Demonstração: Seja um número $\epsilon > 0$ tal que ϵ^2 é desprezível. Considere o subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos tal que $\phi_i(0) = q_i$ e $\dot{\phi}_i(0) = \dot{q}_i$. A variação da lagrangeana ao longo do subgrupo $G_{\mathbb{R}}$ é nula, pois os difeomorfismos são simetrias. Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta L = L(\phi(\epsilon), \dot{\phi}(\epsilon)) - L(\phi(0), \dot{\phi}(0)) = \epsilon \left. \frac{dL}{ds} \right|_{s=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^n \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial \phi_i(s)} \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i(s)} \frac{d\dot{\phi}_i(s)}{ds} \right|_{s=0} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon \sum_{i=1}^n \left\{ \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{\phi}_i(s)}{ds} \right|_{s=0} \right\} = \\
&= \epsilon \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right\}, \tag{2.7}
\end{aligned}$$

onde novamente utilizamos a equação de movimento (2.5) na última igualdade. Portanto, como ϵ é arbitrário, temos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right\} = 0,$$

que é a nossa lei de conservação ■

Vamos analisar agora dois exemplos importantes. Em primeiro lugar, considere o grupo a um parâmetro de difeomorfismos que gera translações na i -ésima coordenada,

$$\phi_j(s) = q_j + \delta_{ij}s.$$

Assim

$$\left. \frac{d\phi_j(s)}{ds} \right|_{s=0} = \delta_{ij}.$$

E nossa quantidade conservada é igual a

$$\sum_{j=1}^n p_j \frac{d\phi_j(s)}{ds} = \sum_{j=1}^n p_j \delta_{ij} = p_i.$$

Isto significa que se as translações em uma dada direção são uma simetria da Lagrangeana, então o momento naquela direção é conservado.

Como um segundo exemplo, considere o subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos constituído de rotações ao redor de um eixo $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$.

$$\phi(s) = R_{\vec{n}}(s)\vec{r}.$$

Como vimos no primeiro capítulo, temos que

$$\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \vec{n} \times \vec{r}.$$

E portanto nossa quantidade conservada é

$$\vec{p} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}),$$

que é a componente do momento angular na direção \vec{n} .

Como você pode ver nesta seção, o momento angular é uma quantidade conservada associada à simetria de rotação segundo o teorema de Noether. Veremos agora uma outra perspectiva onde o momento angular aparece também como um gerador infinitesimal de simetrias.

2.3 O Formalismo Hamiltoniano e Transformações Canônicas

Enquanto a mecânica Lagrangeana está definida em um espaço n dimensional, o espaço de configurações, a mecânica Hamiltoniana está definida em um espaço $2n$ dimensional compreendendo as n variáveis de posição \mathbf{q}_i e as n variáveis de momento \mathbf{p}_i . Este espaço é denominado espaço de fase e será denotado por Γ . Também temos uma função escalar que descreverá o sistema mecânico e que definirá as equações de movimento para as variáveis \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i . Esta função escalar é denominada Hamiltoniana, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. O ponto de contato com o formalismo anterior é dado pela definição de momento (2.6) e pela expressão

$$H = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{q}}_i - L. \quad (2.8)$$

Em uma linguagem matematicamente mais precisa, dizemos que a Hamiltoniana é a transformada de Legendre da Lagrangeana.

As equações de movimento para \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i podem ser obtidas considerando-se a derivada

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Por outro lado, da relação (2.8), temos

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{p}_i d\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{q}}_i d\mathbf{p}_i - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} d\dot{\mathbf{q}}_i \right) - \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Comparando-se as duas expressões para dH , temos a relação do momento (2.6) e as equações

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

A segunda equação foi obtida considerando-se a relação (2.6) e a equação de movimento (2.5):

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

As equações (2.9) são conhecidas como equações de Hamilton e determinam completamente a dinâmica do sistema. Podemos analisar a evolução temporal de qualquer função real f definida no espaço de fase. Basicamente, temos

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde os parênteses são os assim denominados parênteses de Poisson que para duas funções f e g se escreve

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).\tag{2.11}$$

Exercício 27 *Mostre as seguintes propriedades dos parênteses de Poisson:*

a) *Bilinearidade:*

$$\begin{aligned}\{f, g + h\} &= \{f, g\} + \{f, h\}, \\ \{f + g, h\} &= \{f, h\} + \{g, h\}, \\ \{\lambda f, g\} &= \{f, \lambda g\} = \lambda \{f, g\}.\end{aligned}$$

b) *Anti-Simetria:*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

c) *Identidade de Jacobi:*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

d) *Derivação:*

$$\begin{aligned}\{f, gh\} &= g\{f, h\} + \{f, g\}h, \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g.\end{aligned}$$

Exercício 28 *Mostre a relação fundamental dos parênteses de Poisson;*

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0, \\ \{p_i, p_j\} &= 0, \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Devido à anti-simetria dos parênteses de Poisson, podemos ver que se a Hamiltoniana não possui dependência explícita no tempo então ela é conservada, ou seja

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Também podemos escrever as equações de Hamilton (2.9) como

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

O problema das simetrias em um sistema mecânico também pode ser traduzido para o formalismo Hamiltoniano. Primeiramente devemos considerar os difeomorfismos em Γ que transformem as coordenadas \mathbf{q} e \mathbf{p} em novas coordenadas \mathbf{Q} e \mathbf{P} tais que exista uma nova função Hamiltoniana \mathbf{K} de forma a obedecerem às equações de Hamilton

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Uma transformação deste tipo é denominada transformação canônica. Dizer que as duas Hamiltonianas geram a mesma dinâmica é equivalente a dizer que as ações

$$S = \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H$$

e

$$S' = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K$$

diferem por um termo de fronteira ou por uma derivada total, isto é

$$S - S' = \int_a^b \frac{dF}{dt} dt = F(b) - F(a).$$

A função F , é denominada função geratriz da transformação canônica. A priori, a função F deveria depender explicitamente de todas as coordenadas, ou seja $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$, mas devido à relação

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \quad (2.14)$$

podemos concluir que F pode ser de um dos seguintes tipos:

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t).$$

Por exemplo, se utilizarmos uma função geratriz do tipo F_1 e substituirmos em (2.14), teremos

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \left(P_i \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

De onde podemos deduzir as expressões

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \\ p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \end{aligned}$$

A função F_2 pode ser obtida como uma transformada de Legendre de F_1 : Assumindo-se que

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i},$$

Temos então

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{i=1}^n P_i Q_i + F_1.$$

Substituindo em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H &= \sum_{i=1}^n \left(P_i \dot{Q}_i + P_i \dot{Q}_i + \dot{P}_i Q_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

de onde temos as expressões

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \\ p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

As Funções \mathbf{F}_3 e \mathbf{F}_4 também podem ser obtidas como transformadas de Legendre da mesma forma.

Vamos considerar alguns exemplos de transformações canônicas. Primeiramente o exemplo mais simples, a transformação canônica gerada por

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i.$$

Então, podemos escrever as relações

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \\ K &= H. \end{aligned}$$

Esta é a transformação identidade.

Um exemplo um pouco mais elaborado são as transformações de coordenadas, $Q = f(q, t)$. Podemos escrever a função geratriz

$$F_2 = \sum_{i=1}^n f_i(q, t) P_i,$$

cujas relações resultam em

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} P_i, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t), \\ K &= H + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Exercício 29 *Mostre que se f é uma transformação ortogonal, isto é,*

$$Q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j,$$

onde a matriz $A = (a_{ij})$ é ortogonal, então os momentos também se transformam segundo a mesma transformação ortogonal, isto é

$$P_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j.$$

Por último, uma transformação que troca os papéis das coordenadas e momentos, gerada pela função

$$F_1 = \sum_{i=1}^n q_i Q_i.$$

As relações se escrevem

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = q_i, \\ K &= H. \end{aligned}$$

Para finalizarmos, vamos considerar agora as transformações canônicas infinitesimais

$$Q_i = q_i + \delta q_i \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i.$$

Seja um número $\epsilon > 0$ de quadrado desprezível, e considere a função geratriz

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, P).$$

Note que se $\epsilon = 0$, a função geratriz F_2 gera a transformação identidade. novamente, podemos escrever as relações

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} = \\ &= q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

a segunda igualdade foi considerada porque o próximo termo na derivada em relação a P_i seria da ordem ϵ^2 , que estamos considerando desprezível. Em resumo, temos a transformação

$$\begin{aligned} P_i &= p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \\ Q_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Consideremos um exemplo importante, a transformação infinitesimal gerada pela Hamiltoniana $G = H(q, p)$ por um intervalo de tempo $\epsilon = dt$, então

$$\begin{aligned} \Delta p_i &= P_i - p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt, \\ \Delta q_i &= Q_i - q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt. \end{aligned}$$

Assim, a Hamiltoniana realmente gera a evolução temporal, esta, por contrapartida, é uma transformação canônica.

Vejamos o que ocorre com uma função arbitrária $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ quando submetida a uma transformação canônica infinitesimal;

$$\begin{aligned}\Delta f &= f\left(\mathbf{q}_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_i}, \mathbf{p}_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}_i}\right) - f(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}_i} \right) = \\ &= \epsilon \{f, G\}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Agora podemos voltar à questão de simetrias na mecânica Hamiltoniana. As simetrias são as transformações canônicas que preservam a Hamiltoniana. Pela expressão (2.16), as simetrias são geradas por funções cujos parênteses de Poisson com a Hamiltoniana se anulam. Por outro lado, a expressão (2.10) nos mostra que as funções que possuem os parênteses de Poisson nulos com a Hamiltoniana são quantidades conservadas. Logo, aqui está uma formulação um pouco modificada do teorema de Noether para a mecânica Hamiltoniana:

Teorema 4 *As funções geratrizes de transformações canônicas de simetria são quantidades conservadas* \square

Consideremos mais dois exemplos de transformações canônicas infinitesimais. O primeiro exemplo é dado pela translação na i -ésima coordenada

$$Q_j = q_j + \epsilon \delta_{ij} \quad , \quad P_j = p_j.$$

É fácil ver que a função geratriz desta transformação é dada por

$$G = p_i,$$

ou seja, a i -ésima componente do momento é o gerador infinitesimal das translações na i -ésima coordenada.

Considere agora uma rotação no eixo z de um ângulo ϵ , então

$$\begin{aligned}X_1 &= x_1 - \epsilon x_2, \\ X_2 &= x_2 + \epsilon x_1, \\ X_3 &= x_3.\end{aligned}$$

Também sem muita dificuldade, podemos ver que a função geratriz desta transformação é

$$G = x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_3.$$

Exercício 30 *Mostre que para uma transformação canônica correspondendo a uma rotação infinitesimal ao redor do eixo \vec{n} , a função geratriz será*

$$G = \vec{L} \cdot \vec{n}.$$

Logo, o momento angular é o gerador infinitesimal das rotações, consideradas como transformações canônicas.

Exercício 31 *Mostre que os parênteses de Poisson entre as componentes do momento angular se escrevem*

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.17)$$

Note a semelhança existente entre esta álgebra e a álgebra gerada pelos vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 pelo produto vetorial.

Capítulo 3

O Momento Angular em Mecânica Quântica

Como vimos no capítulo anterior, o momento angular pode ser visto como uma quantidade conservada decorrente da isotropia espacial bem como pode ser visto como um gerador infinitesimal de rotações vistas como transformações canônicas no espaço de fase. Neste capítulo veremos a teoria do momento angular em mecânica quântica e a teoria do spin, que pode ser entendido fisicamente como um momento angular intrínseco das partículas. Ambas as teorias estão relacionadas com representações de álgebras de Lie.

3.1 Do Clássico ao Quântico

Um sistema quântico é caracterizado por seu espaço de estados. Um estado é uma configuração física possível que o sistema pode assumir e basicamente é descrito como um vetor em um espaço de Hilbert.

Definição 8 *Um espaço vetorial \mathcal{H} sobre \mathbb{C} é um espaço de Hilbert se está munido de uma forma sesquilinear*

$$\begin{aligned} \langle | \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, w) &\mapsto \langle v | w \rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

obedecendo

$$a) \quad \langle u + v | w \rangle = \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle,$$

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle, \\
& \langle \mathbf{u} | \lambda \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
b) & \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}. \\
c) & \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \geq 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \\
& \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Com a condição adicional que \mathcal{H} seja um espaço completo pela norma definida por $\langle | \rangle$.

Exercício 32 Mostre que

$$\langle \lambda \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos os estados físicos por $|\psi\rangle$. Esta é a notação padrão encontrada nos livros de mecânica quântica e é denominada notação de “bras” e “kets”. Um “bra” é na verdade um vetor do espaço vetorial dual a \mathcal{H} , que devido à forma sesquilinear pode ser identificado com \mathcal{H} . Os “bras” são denotados como $\langle \psi |$ que quando aplicados a um “ket” formam um “bracket” (parênteses), que é dado pela forma sesquilinear

$$\langle \phi | \psi \rangle.$$

Falando mais rigorosamente, um estado é um raio no espaço de Hilbert pois os vetores $|\psi\rangle$ e $\lambda|\psi\rangle$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ constituem o mesmo estado. Assim, o espaço de estados é um espaço projetivo, mas não vamos entrar em detalhes quanto a isto.

Durante todo este capítulo, consideraremos nosso espaço de Hilbert como o espaço das funções a valores complexos e de quadrado integrável em \mathbb{R}^3 , denotado por $L^2(\mathbb{R}^3)$, ou algum sub-espaço de dimensão finita do mesmo. Por quadrado integrável queremos dizer que a função $\psi = \psi(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ possui a integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 |\psi(x_1, x_2, x_3)|^2 < \infty.$$

O produto escalar entre dois estados $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ é dado por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Mais adiante esclareceremos um pouco mais o que pareceu uma confusão de notação entre estados e funções.

Em segundo lugar, os observáveis em mecânica quântica serão operadores auto-adjuntos, ou Hermitianos, sobre o espaço \mathcal{H} .

Definição 9 *Seja \mathcal{H} , um espaço de Hilbert. Seja também um operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. O hermitiano conjugado de \mathbf{A} é o operador \mathbf{A}^\dagger definido pela relação*

$$\langle \mathbf{A}^\dagger v | w \rangle = \langle v | \mathbf{A} w \rangle.$$

Dizemos que \mathbf{A} é hermitiano se $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$, anti-hermitiano se $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$ e unitário se $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$.

Exercício 33 *Mostre que se um operador é hermitiano então seus auto-valores são números reais.*

Exercício 34 *Mostre que dois auto-vetores de um operador hermitiano com auto valores distintos são ortogonais.*

Os operadores hermitianos são importantes devido à sua propriedade de possuírem auto-valores reais. Os auto valores são os possíveis valores que podem ser obtidos de uma medida física do observável em questão. Também temos este resultado importante da teoria de operadores, que utilizaremos sem prova, conhecido como “teorema espectral”.

Teorema 5 *Todo operador hermitiano em um espaço de Hilbert define uma base ortonormal de auto-vetores neste espaço \square*

Assim, um estado normalizado $|\psi\rangle$ pode ser expandido em uma base de auto estados $|\psi_n\rangle$ de um certo operador \mathbf{A} ,

$$|\psi\rangle = \sum_n \mathbf{a}_n |\psi_n\rangle.$$

As quantidades $0 \leq |\mathbf{a}_n|^2 \leq 1$ são interpretadas como probabilidades do estado $|\psi\rangle$, estar no estado $|\psi_n\rangle$. As interpretações probabilísticas das normas dos estados junto com a interpretação dos auto valores dos operadores hermitianos como as possíveis medidas físicas dão todo o conteúdo físico do sistema quântico.

A conexão com a mecânica clássica é feita associando-se a cada observável clássico $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ um operador auto adjunto \hat{f} de forma que o limite clássico do comutador entre dois operadores,

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f},$$

seja igual ao valor dos parênteses de Poisson dos observáveis clássicos associados. Em outras palavras, temos

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] = \{f, g\}. \quad (3.3)$$

Em particular, para os operadores associados à posição, Q_i , e momento, P_j teremos a seguinte relação de comutação, baseada na expressão (2.12)

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= 0, \\ [P_i, P_j] &= 0, \\ [Q_i, P_j] &= i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Exercício 35 *Mostre que o comutador entre dois operadores obedece às mesmas propriedades que os parênteses de Poisson apresentadas no capítulo anterior, a saber: bilinearidade, anti-simetria, identidade de Jacobi, e derivação.*

Até o momento, você viu vários exemplos do mesmo objeto matemático, vale a pena agora uma pausa para uma definição formal:

Definição 10 *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathcal{L} munido de uma operação bilinear e anti-simétrica*

$$\begin{aligned} [,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \end{aligned}$$

(denominada parênteses de Lie) satisfazendo à identidade de Jacobi.

Veja que na definição não exigimos que os parênteses de Lie também sejam uma derivação, o que ocorre em uma série de exemplos, mas não em outros. Como exemplos de álgebras de Lie podemos citar o espaço \mathbb{R}^3 com o produto vetorial \times , o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis definidas

no espaço de fase, denotado por $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, com os parênteses de Poisson e os operadores lineares sobre um espaço de Hilbert (se for em dimensão finita, podemos falar também em termos de matrizes $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$) com o comutador.

Voltando ao nosso exemplo principal no espaço $L^2(\mathbb{R}^3)$. Como os operadores posição comutam entre si pelas relações em (3.4), podemos escolher estados que sejam simultaneamente auto estados de \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 . Denominamos estes estados

$$|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle,$$

tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle &= \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle, \\ \mathbf{X}_2|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle &= \mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle, \\ \mathbf{X}_3|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle &= \mathbf{x}_3|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle.\end{aligned}$$

Estes estados são as “funções” localizadas no ponto $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ tais que a integral de seu módulo ao quadrado em todo espaço seja igual a 1. Outra forma de dizer o mesmo é que

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 | \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3 \rangle = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1)\delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2)\delta(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}'_3),$$

onde $\delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i)$ é a “função” Delta de Dirac. Assim, dado um estado normalizado $|\psi\rangle$, definimos a função de onda a ele associada por

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 | \psi \rangle,$$

e seu complexo conjugado por

$$\overline{\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} = \langle \psi | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle.$$

Assim, o estado $|\psi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \int \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle. \quad (3.5)$$

Exercício 36 *Mostre que o operador identidade pode ser expandido nos auto estados de posição $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle$ como*

$$Id = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}_3 |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3|.$$

Sugestão: *Opere em algum estado $|\psi\rangle$ e compare com a fórmula (3.5).*

Exercício 37 Com o auxílio do operador identidade, explique melhor a fórmula (3.2).

Nesta base de auto estados de posição, os operadores de momento \mathbf{P}_i se realizam como

$$\mathbf{P}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.6)$$

Exercício 38 Mostre que os operadores \mathbf{X}_i e \mathbf{P}_j , conforme definido em (3.6), obedecem às relações de comutação (3.4). Sugestão: Aplique em um estado expandido em termos das funções de onda como em (3.5).

Para encerrarmos esta seção. Precisamos de mais um ítem, as simetrias e a evolução temporal. Bem as simetrias de um sistema quântico são dadas pelos operadores unitários, pois eles preservam a forma sequilinear.

Exercício 39 Demonstre o fato que os operadores unitários preservam a forma sesquilinear:

$$\langle \mathbf{A}\phi | \mathbf{A}\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle.$$

A evolução temporal é baseada na mecânica clássica, onde a Hamiltoniana gera a evolução temporal do sistema. Basicamente traduz-se a Hamiltoniana clássica no operador quântico correspondente (nem sempre isto é trivial, pois há problemas com o ordenamento) e então postula-se que evolução temporal de um estado quântico seja dada por

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle. \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é conhecida como a equação de Schrödinger e é compatível com a equação de Heisenberg para a evolução temporal de operadores

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{A}, \hat{H}], \quad (3.8)$$

que nada mais é que a tradução da equação de evolução clássica (2.10) para o caso quântico. Estas são duas perspectivas diferentes para a evolução temporal na mecânica quântica conhecidas como picture de Schrödinger e picture de Heisenberg. Enquanto o primeiro estabelece a evolução dos estados e os operadores fixos, o segundo considera a evolução temporal dos operadores, atuando em um espaço fixo de estados. A conexão entre os dois pictures está no valor esperado de um operador \mathbf{A} no instante t , ou seja

$$\langle \psi(t) | \mathbf{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | \mathbf{A}(t) | \psi_0 \rangle.$$

Exercício 40 *Mostre que a Hamiltoniana clássica em três dimensões*

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p} \cdot \vec{p} + U(\vec{r}),$$

se traduz no operador quântico

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x_1, x_2, x_3),$$

onde ∇^2 é o laplaciano em três dimensões e U é apenas a multiplicação pela função U .

3.2 O Momento Angular Quântico

Vamos utilizar as regras de quantização apresentadas na seção anterior para descrevermos o momento angular quântico. Como as componentes do momento angular clássico podem ser escritas como

$$L_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j p_k,$$

então as componentes do momento angular quântico serão definidas como os operadores

$$L_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} X_j P_k.$$

Não utilizaremos $\hat{}$ no operador momento angular para não carregarmos a notação e a não ser que se diga o contrário, somente falaremos de operadores daqui para frente.

Exercício 41 *A partir das relações de comutação (3.4), mostre que o momento angular satisfaz às relações*

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (3.9)$$

Exercício 42 *Mostre que o operador de Casimir,*

$$\mathbf{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad (3.10)$$

que é o operador correspondente ao quadrado do momento angular total clássico, comuta com todas as componentes L_i , $i = 1, 2, 3$.

Ao longo desta seção, vamos trabalhar com operadores mais apropriados. Portanto, vamos definir os operadores

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2. \quad (3.11)$$

Da expressão acima é fácil ver que que L_{\pm} não são mais operadores hermitianos, mas que $L_- = (L_+)^{\dagger}$.

Exercício 43 *Mostre que as relações de comutação (3.9) se escrevem em termos de L_{\pm} e L_3 como*

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm} \quad , \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_3. \quad (3.12)$$

Exercício 44 *Mostre que o operador de Casimir (3.10) pode ser escrito também como*

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+) + L_3^2 = \\ &= L_+ L_- + L_3^2 - \hbar L_3 = \\ &= L_- L_+ + L_3^2 + \hbar L_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O objetivo desta seção é encontrar os possíveis sub-espacos de estados sobre os quais as componentes do momento angular ajam como operadores lineares. Em outras palavras, vamos encontrar representações da álgebra de Lie do momento angular. Apenas um comentário, formalmente esta álgebra de Lie é isomorfa a aquela dos geradores infinitesimais de rotações em \mathbb{R}^3 , logo denominaremos esta álgebra como a álgebra de Lie do grupo $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$, denotada por $\mathfrak{so}(\mathbf{3})$. Veremos no próximo capítulo que todo grupo de Lie está associado a uma álgebra de Lie, mas neste vamos explorar as propriedades desta álgebra de Lie em particular.

Como todo operador hermitiano determina uma base ortonormal de auto vetores e operadores que comutam entre si podem ser diagonalizados simultaneamente, então vamos escolher estados que sejam ao mesmo tempo

auto-vetores do operador de Casimir L^2 e da componente L_3 do momento angular. Ou seja escolhamos estados $|\lambda, m\rangle$, tais que

$$\langle \lambda, m | \lambda', m' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{mm'},$$

e que obedecem

$$L^2 |\lambda, m\rangle = \hbar^2 \lambda |\lambda, m\rangle \quad , \quad L_3 |\lambda, m\rangle = \hbar m |\lambda, m\rangle.$$

Antes de continuarmos, apenas um comentário a respeito de unidades. O momento angular possui a mesma dimensão que a ação ou seja ML^2T^{-1} (massa \times comprimento ao quadrado \times inverso do tempo). Então, para que as equações acima ficassem dimensionalmente corretas, o auto-valor referente a L_3 deve ser proporcional a \hbar (que possui dimensão de ação) enquanto o auto valor referente a L^2 deve ser proporcional a \hbar^2 .

Note que o auto valor λ tem que ser positivo pois

$$\begin{aligned} \hbar^2 \lambda &= \langle \lambda, m | L^2 | \lambda, m \rangle = \\ &= \langle \lambda, m | (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) | \lambda, m \rangle = \\ &= |L_1 |\lambda, m\rangle|^2 + |L_2 |\lambda, m\rangle|^2 + |L_3 |\lambda, m\rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Esta não negatividade do auto valor relativo ao Casimir será importante para determinarmos por exemplo as dimensões dos possíveis espaços que carregam as representações. Vejamos agora que o espaço gerado pelos auto vetores $|\lambda, m\rangle$ permanece invariante pela ação de qualquer elemento da álgebra $\mathfrak{so}(3)$, ou seja, ao aplicarmos os outros geradores da álgebra nos auto vetores, continuamos a ter auto vetores.

Proposição 6 *Os estados $L_{\pm} |\lambda, m\rangle$ também são auto vetores de L^2 e L_3 .*

Demonstração: com respeito a L^2 , sem problemas, pois

$$L^2 L_{\pm} |\lambda, m\rangle = L_{\pm} L^2 |\lambda, m\rangle = \hbar^2 \lambda L_{\pm} |\lambda, m\rangle.$$

Com respeito a L_3 , temos

$$\begin{aligned} L_3 L_{\pm} |\lambda, m\rangle &= L_{\pm} L_3 |\lambda, m\rangle + [L_3, L_{\pm}] |\lambda, m\rangle = \\ &= \hbar(m \pm 1) L_{\pm} |\lambda, m\rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos ver da demonstração acima que

$$\begin{aligned} L_+|\lambda, m\rangle &= c_{\lambda m}^+|\lambda, m+1\rangle, \\ L_-|\lambda, m\rangle &= c_{\lambda m}^-|\lambda, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lembrando-se que $L_- = (L_+)^\dagger$, temos que $L_-|\lambda, m\rangle = (\langle\lambda, m|L_+)^*$ e vice versa.

Por um lado, a partir das relações (3.14) temos que

$$\begin{aligned} \langle\lambda, m|L_-L_+|\lambda, m\rangle &= |L_+|\lambda, m\rangle|^2 = |c_{\lambda m}^+|^2, \\ \langle\lambda, m|L_+L_-|\lambda, m\rangle &= |L_-|\lambda, m\rangle|^2 = |c_{\lambda m}^-|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, a partir da definição do operador de Casimir em (3.13) temos que

$$\begin{aligned} \langle\lambda, m|L_-L_+|\lambda, m\rangle &= \langle\lambda, m|(L^2 - L_3^2 - \hbar L_3)|\lambda, m\rangle = \\ &= \hbar^2(\lambda - m(m+1)) = |c_{\lambda m}^+|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \langle\lambda, m|L_+L_-|\lambda, m\rangle &= \langle\lambda, m|(L^2 - L_3^2 + \hbar L_3)|\lambda, m\rangle = \\ &= \hbar^2(\lambda - m(m-1)) = |c_{\lambda m}^-|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Destas equações acima obtemos duas condições

$$\begin{aligned} \lambda - m(m+1) &\geq 0, \\ \lambda - m(m-1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Da primeira, concluímos que deve haver um número $l = m_{\text{máx}}$ tal que $\lambda - l(l+1) = 0$, ou seja $\lambda = l(l+1)$. A partir de agora, passaremos a denominar os estados $|\lambda, m\rangle$ por $|l, m\rangle$. É fácil ver que $L_+|l, l\rangle = 0$. Substituindo o valor de λ na segunda desigualdade, concluímos que

$$m(m-1) - l(l+1) = (m+l)(m-(l+1)) \leq 0,$$

Assim $m = -l$ é o valor mínimo do autor valor m , quando temos a igualdade. Neste caso, $L_-|l, -l\rangle = 0$. Assim temos que os auto valores de L_3 devem estar no intervalo $-l \leq m \leq l$. Veja agora que a cada vez que aplicarmos L_- ao estado $|l, l\rangle$, teremos um auto estado de L_3 cujo auto valor será decrescido de uma unidade. Assim deve haver um número inteiro

n tal que $l - n = -l$. Disto concluímos que o número l deve ser um inteiro ou semi-inteiro positivo e que os possíveis auto valores de \mathbf{L}_3 são os $2l + 1$ valores $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$.

Agora, devemos calcular os coeficientes c_{lm}^\pm conforme definidos em (3.14). De (3.15) temos que

$$|c_{lm}^+|^2 = \hbar^2 (l(l+1) - m(m+1)) = \hbar^2 (l-m)(l+m+1).$$

Já da expressão (3.16) podemos concluir que

$$|c_{lm}^-|^2 = \hbar^2 (l(l+1) - m(m-1)) = \hbar^2 (l+m)(l-m+1).$$

Concluindo: para cada valor de $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, podemos determinar um sub-espaço de dimensão $2l + 1$ gerado pelos vetores $|l, m\rangle$, com $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$, tal que

$$\begin{aligned} L^2|l, m\rangle &= \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle, \\ L_3|l, m\rangle &= \hbar m|l, m\rangle, \\ L_\pm|l, m\rangle &= \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l, m \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Note que cada sub espaço rotulado por l (vamos denominar esta quantidade de spin da representação), não possui algum sub-espaço invariante pela ação dos elementos da álgebra. Ou seja, não podemos subdividir uma representação de spin l em representações menores. A estas representações que possuem esta propriedade damos o nome de representações irredutíveis.

Podemos também representar os operadores como matrizes atuando nestes sub espaços, por exemplo, para a representação de spin $l = \frac{1}{2}$, temos um espaço de dimensão 2 e as matrizes 2×2 representando \mathbf{L}_\pm e \mathbf{L}_3 são

$$\mathbf{L}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Já em spin $l = 1$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_+ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{L}_- &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_3 &= \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que não nos preocupamos com a forma de \mathbf{L}^2 pois sempre será para qualquer spin l da forma

$$\mathbf{L}^2 = \hbar^2 l(l+1) \text{Id}_{2l+1}.$$

Exercício 45 *Escreva as matrizes correspondentes aos operadores \mathbf{L}_\pm e \mathbf{L}_3 nas representações de spin $l = \frac{3}{2}$ e $l = 2$.*

Na próxima seção trataremos das representações com spin inteiro. Neste caso, os estados podem ser escritos como funções de onda no espaço tridimensional. Somente após trataremos o caso de representações com spin semi-inteiro, que não possuem realização direta como funções mas que revelam propriedades importantes e são fundamentais na física para a descrição do spin. Na verdade as representações de spin semi inteiro somente são possíveis como representações da álgebra de Lie do grupo $\mathbf{SU}(2)$, cujas relações são idênticas, mas que geram grupos diferentes que possuem propriedades topológicas distintas.

3.3 Harmônicos Esféricos

Conforme vimos na fórmula (3.6), o momento pode ser visto como um operador derivação no espaço de funções. Assim as componentes do momento angular podem ser escritas como os operadores

$$\begin{aligned} L_1 &= -i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ L_2 &= -i\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ L_3 &= -i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Podemos descrever estes operadores de uma forma mais conveniente utilizando coordenadas esféricas (1.1)

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi, \\ x_3 &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana da transformação é descrita como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

cujas inversas são

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi & \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando estas jacobianas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial r}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \phi} = \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

e assim, após alguns cálculos fáceis, porém tediosos, encontramos as componentes do momento angular e o operador de Casimir escritos como operadores diferenciais

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ L^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Exercício 46 *Mostre que a hamiltoniana de uma partícula livre em coordenadas esféricas se escreve como um termo dependendo de derivadas radiais e termos dependendo de derivadas angulares, sendo que estes são proporcionais ao momento angular quântico, ou seja*

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2mr^2}L^2.$$

Note que não há derivadas com relação a \mathbf{r} nos operadores de momento angular, logo as representações irredutíveis da álgebra $\mathfrak{so}(3)$ são sub-espacos de dimensão finita do espaço de funções integráveis na esfera $L^2(\mathbb{S}^2)$. Denotaremos estas funções por

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle = \Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\phi),$$

tais que

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}, \quad L_3 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi),$$

e que sejam ortonormais, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle l', m' | l, m \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \Phi_{m'}^*(\phi) \Phi_m(\phi) \int_0^\pi d\theta \sin\theta \Theta_{l'm'}^*(\theta, \phi) \Theta_{lm}(\theta, \phi) = \\ &= \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \end{aligned}$$

A dependência na variável ϕ é facilmente encontrada utilizando-se a condição do auto-valor do operador L_3 ,

$$\begin{aligned} L_3 Y_{lm}(\theta, \phi) &= -i\hbar \Theta_{lm}(\theta) \frac{\partial \Phi_m(\phi)}{\partial \phi} = \\ &= \hbar m \Theta_{lm}(\theta, \phi) \Phi_m(\phi). \end{aligned}$$

O que resulta, após a normalização em

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}.$$

Há duas maneiras de se obter a dependência em θ na função de onda. a primeira é analisando a atuação do operador de Casimir como operador diferencial

$$\begin{aligned}
L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= -\frac{\hbar^2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta'_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi)) - \frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m'' = \\
&= -\frac{\hbar^2 \cos \theta}{\sqrt{2\pi} \sin \theta} \Theta'_{lm}(\theta) e^{im\phi} - \frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}} \Theta''_{lm} e^{im\phi} + \\
&+ \frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi} \sin^2 \theta} m^2 \Theta_{lm}(\theta) e^{im\phi} = \\
&= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}} l(l+1) \Theta_{lm}(\theta) e^{im\phi}.
\end{aligned}$$

Após eliminarmos a dependência em ϕ na equação acima, obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$\Theta''_{lm} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta'_{lm} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta_{lm} = 0,$$

cuja solução é [14]

$$\Theta_{lm}(\theta) = C_{lm} P_l^m(\cos \theta),$$

onde P_l^m são os polinômios de Legendre associados, que podem ser escritos na forma

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x),$$

e P_l , são os polinômios de Legendre, dados na fórmula de Rodriguez como [1]

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Como um exemplo, podemos escrever os primeiros polinômios de Legendre,

$$\begin{aligned}
P_0(\cos \theta) &= 1, \\
P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\
P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \\
P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta),
\end{aligned}$$

e os primeiros polinômios de Legendre associados

$$\begin{aligned}
 P_1^1(\cos \theta) &= \sin \theta, \\
 P_2^1(\cos \theta) &= 3 \cos \theta \sin \theta, \\
 P_2^2(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta, \\
 P_3^1(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^3 \theta - 1), \\
 P_3^2(\cos \theta) &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 P_3^3(\cos \theta) &= 15 \sin^3 \theta.
 \end{aligned}$$

Os coeficientes C_{lm} são determinados a partir da normalização dos polinômios de Legendre associados. Podemos encontrar na literatura [1, 14]

$$C_{lm} = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{(2l+1)}{2}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Colocando todas as coisas juntamente, obtemos as funções de onda

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{(2l+1)}{4\pi}\right) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m \geq 0,$$

que são denominados harmônicos esféricos. Podemos observar pela forma das soluções que estas somente estão bem definidas para l e m inteiros. Logo somente as representações de spin inteiro podem ser escritas como funções de onda espaciais.

Um segundo método para se determinar os harmônicos esféricos é utilizando os operadores L_{\pm} . Sabemos que

$$L_+ Y_{lm}(\theta, \phi) = 0,$$

logo, utilizando a forma do operador L_+ em (3.18), temos

$$\begin{aligned}
 L_+ Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_+ \Theta_{lm}(\theta) e^{im\phi} = \\
 &= \frac{\hbar e^{i(1+l)\phi}}{\sqrt{2\pi}} \Theta'_{lm} + i \frac{\hbar e^{i(1+l)\phi}}{\sqrt{2\pi}} (l) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta_{lm} = 0,
 \end{aligned}$$

de onde obtemos a equação

$$\Theta'_{lm} - l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta_{lm} = 0$$

cuja solução é

$$\Theta_u(\theta) = C_l \sin^l \theta.$$

Os coeficientes C_l podem ser obtidos ao impor-se a normalização da função de onda, após algumas integrações podemos obter [1, 14]

$$C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}.$$

Colocando todas as coisas juntamente, obtemos

$$Y_u(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{i\phi} \sin^l \theta.$$

As outras funções Y_{lm} podem ser obtidas aplicando-se sucessivamente o operador L_- na representação de spin l e acertando-se os coeficientes, resultando na seguinte forma equivalente para os harmônicos esféricos:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\left(\frac{(2l+1)}{4\pi}\right) \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{e^{im\phi} d^{l-m} \sin^{2l} \theta}{\sin^m \theta d(\cos \theta)^{l-m}}}, \quad m \geq 0.$$

Embora este processo seja muito mais direto, no sentido que só é necessário resolver uma equação diferencial de primeira ordem, pode-se notar que é muito mais trabalhoso.

Exercício 47 *Encontre os primeiros harmônicos esféricos para $l = 0, 1, 2$ conforme estão escritos explicitamente abaixo:*

$$\begin{aligned} Y_{00}(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{10}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta, \\ Y_{20}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta \cos \theta, \\ Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{\pm 2i\phi} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

3.4 Teoria do Spin

A primeira evidência experimental que os elétrons possuíam uma outra quantidade física intrínseca além da energia e do momento angular foi através da experiência de Stern-Gerlach (1922). O experimento basicamente consistia em fazer passar um fluxo de átomos de prata por um campo magnético não uniforme e então medir a distribuição dos mesmos em um anteparo. Devido à configuração eletrônica da prata a expectativa era obter uma distribuição espacialmente simétrica. Mas, pelo contrário, foi observado que o feixe se dividia em duas componentes distintas. Da teoria clássica do eletromagnetismo pode-se concluir que a magnetização do elétron deve ser proporcional ao seu momento angular. Logo, o elétron deveria possuir um momento angular intrínseco que desse conta desses momentos magnéticos discretos observados (a imagem pictórica que se tinha era que o elétron além de realizar seu movimento orbital no átomo, também possuía um movimento de rotação).

A primeira formulação matemática para o spin físico dos elétrons é devida a W. Pauli. Ele postulou que um elétron podia ser modelado por um vetor bidimensional complexo (sistema de dois níveis) e então criou uma teoria de momento angular que atuasse neste espaço. Em uma linguagem moderna, ele construiu uma representação bidimensional da álgebra do momento angular (que era de fato $\mathfrak{su}(2)$). Pauli descobriu que as matrizes 2×2 complexas que realizavam as componentes do spin eram

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde as matrizes σ_i são hoje conhecidas como as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Exercício 48 *Mostre as seguintes propriedades elementares das matrizes de Pauli:*

- a) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} Id_2.$
- b) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k,$
- c) $\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad Tr(\sigma_i) = 0, \quad Det(\sigma_i) = -1,$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \imath Id_2, \\ \text{e)} \quad & \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \imath \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k. \end{aligned}$$

Portanto, pela propriedade **b)** do exercício anterior, podemos ver que

$$[S_i, S_j] = \imath \hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} S_k,$$

como a álgebra do momento angular. Mas note que esta álgebra de Lie, apesar de possuir a mesma relação de comutação, trata de objetos diferentes. Veja que pela propriedade **c)** as matrizes de Pauli são matrizes hermitianas 2×2 com traço nulo, que correspondem aos geradores infinitesimais do grupo das matrizes unitárias 2×2 com determinante igual a 1, o grupo $SU(2)$.

Exercício 49 *Mostre que se \mathbf{A} é uma matriz hermitiana (ou operador hermitiano em geral). Então $e^{\imath \mathbf{A}}$ é uma matriz unitária (ou operador unitário, no caso geral). Mostre também que de $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0$, então $\text{Det}(e^{\imath \mathbf{A}}) = 1$.*

Como o aspecto formal das álgebras $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ é o mesmo, o processo de encontrar representações é análogo ao apresentado na seção 2 deste capítulo. Mas agora percebemos que $\mathfrak{su}(2)$ admite representações de spin semi inteiro. As próprias matrizes de Pauli são a realização explícita dos operadores na representação de spin $\frac{1}{2}$. Denotemos a base do espaço por

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, as possíveis configurações de spin serão $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

Exercício 50 *Mostre que neste espaço as componentes do spin podem ser escritas como*

$$\begin{aligned} S_+ = S_1 + \imath S_2 &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_- = S_1 - \imath S_2 &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_3 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & S^2 &= \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como o spin não depende dos graus de liberdade espaciais, os geradores \mathbf{S}_i comutam com os operadores de posição \mathbf{X}_i , momento \mathbf{P}_i , e momento angular \mathbf{L}_i , assim a função de onda total do elétron está no produto de dois espaços de representação, um com spin \mathbf{l} , referente ao momento angular orbital e outro com spin $\frac{1}{2}$ referente ao spin. Assim, a função de onda total poderia ser escrita como

$$\Psi_{n,l,m,\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, \theta, \phi) = \Psi_n(\mathbf{r})Y_{lm}(\theta, \phi) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_n(\mathbf{r})Y_{lm}(\theta, \phi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

para um elétron de spin $\frac{1}{2}$ e

$$\Psi_{n,l,m,-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}, \theta, \phi) = \Psi_n(\mathbf{r})Y_{lm}(\theta, \phi) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n(\mathbf{r})Y_{lm}(\theta, \phi) \end{pmatrix},$$

para um elétron de spin $-\frac{1}{2}$. Muito embora os operadores referentes ao momento angular e ao spin comutem, pode haver uma interação entre estas duas grandezas no que se refere às representações. Basicamente, os espaços das representações do momento angular e do spin se misturam e este espaço produto pode ser escrito como a soma direta de outras representações irredutíveis. Esta é a chamada decomposição de Clebsch Gordan do produto de representações e está por tras, entre outras coisas, da assim chamada interação spin-órbita.

Por último, devemos salientar que as matrizes de Pauli são importantes para descrever rotações no espaço tridimensional devido a suas propriedades. Esta inter-relação será melhor explorada no capítulo seguinte.

Exercício 51 *Sejam \vec{v} e \vec{w} dois vetores em \mathbb{R}^3 . Defina*

$$\sigma \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \sigma_i.$$

Mostre que

$$(\sigma \cdot \vec{v})(\sigma \cdot \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) Id_2 + i\sigma \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Capítulo 4

Grupos e Álgebras de Lie: Aspectos Teóricos

Neste capítulo, vamos revisitar alguns conceitos apresentados ao longo deste minicurso sob um ponto de vista um pouco mais formal. Nossa discussão se concentrou basicamente sobre grupos de Lie e álgebras de Lie, portanto daremos maior atenção às propriedades destes objetos matemáticos.

4.1 Grupos de Lie

No primeiro capítulo demos a definição de grupo. Vamos retomar esta definição para explorá-la melhor:

Definição 11 *Um grupo é um conjunto G munido de uma operação*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

tal que esta operacao seja

1. *Associativa: $(ab)c = a(bc)$.*
2. *Possua elemento neutro $e \in G$, tal que $ea = ae = a, \forall a \in G$.*
3. *E qualquer elemento $a \in G$ possua um inverso $a^{-1} \in G$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.*

Se a operação for comutativa (o que não é necessário para a definição de grupo), isto é $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ para todos os elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{G}$, então o grupo é chamado comutativo, ou Abeliano.

Exercício 52 Mostre que em um grupo \mathbf{G} somente pode existir um único elemento neutro. Mostre também que todo elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ somente possui um elemento inverso.

Definição 12 Dado um grupo \mathbf{G} , um sub-grupo de \mathbf{G} , é um sub-conjunto não vazio $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ tal que

1. O elemento neutro pertence a \mathbf{H} : $\mathbf{e} \in \mathbf{H}$.
2. Dado qualquer elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$, temos que $\mathbf{a}^{-1} \in \mathbf{H}$.
3. Dados dois elementos quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{H}$, temos que, $\mathbf{ab} \in \mathbf{H}$.

Exercício 53 Mostre que provar que um sub-conjunto não vazio $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ é subgrupo é equivalente a provar que se \mathbf{a} e \mathbf{b} são elementos de \mathbf{H} , então $\mathbf{ab}^{-1} \in \mathbf{H}$.

Aqui estão alguns exemplos de diferentes tipos de grupos. Em cada um destes exemplos, um bom exercício para o leitor é verificar explicitamente os axiomas de grupo.

1. O grupo contendo somente o elemento identidade $\mathbf{G} = \{\mathbf{e}\}$. Este é o grupo mais trivial que existe.
2. O grupo aditivo \mathbb{Z}_2 , gerado pelos elementos $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ e cuja operação $+$ é definida pela tabela

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

3. O grupo das simetrias de um polígono regular de \mathbf{n} lados, isto é, movimentos de rotação ou reflexões em torno de alguns eixos que deixam a figura de um polígono inalterada.

Exercício 54 *Determine o grupo de simetrias do triângulo equilátero e do quadrado. Sugestão: Enumere os vértices do polígono e observe como estes índices se alteram ao aplicar-se as operações do grupo, então construa a tabela de composição no estilo mostrado no exemplo anterior.*

4. O grupo de permutações de um conjunto de n elementos, S_n .
5. O grupo aditivo dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +)$.
6. O grupo multiplicativo dos números reais não nulos, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
7. O grupo das transformações lineares inversíveis em um espaço vetorial real (complexo) de n dimensões, $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$). A operação neste caso é a de composição de duas transformações.
8. O subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$), das transformações lineares cuja matriz de transformação possui determinante igual a 1, $SL(n, \mathbb{R})$ ($SL(n, \mathbb{C})$).
9. Como já visto no capítulo 1, o grupo das transformações ortogonais em n dimensões $O(n)$ e seu subgrupo de determinante igual a 1, $SO(n)$.
10. O grupo das transformações unitárias em um espaço vetorial complexo de n dimensões, $U(n)$. Isto é, dada a forma sesquilinear em \mathbb{C}^n

$$\langle v|w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i,$$

o grupo $U(n)$ é formado por transformações lineares invertíveis A , tais que

$$\langle Av|Aw \rangle = \langle v|w \rangle.$$

O subgrupo das transformações unitárias com determinante igual a 1, $SU(n)$, também é um exemplo de grupo.

Exercício 55 *Mostre que realmente $U(n)$ e $SU(n)$ são grupos.*

Exercício 56 *Quais dos grupos acima são abelianos (inclusive para que valores de n temos S_n , $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ e $SU(n)$ abelianos)?*

Você deve ter notado que há grupos com um número finito de elementos, grupos com um número infinito de elementos porém que são discretos (como é o caso do grupo aditivo \mathbb{Z}), e grupos que são contínuos (como por exemplo \mathbb{R} , $GL(\mathbf{n}, \mathbb{R})$, $SU(\mathbf{n})$, etc). Portanto, há outras propriedades matemáticas dos grupos, e não somente sua estrutura algébrica que devem desempenhar um papel importante na análise dos mesmos. É dentro desta perspectiva que vamos definir o que vem a ser um grupo de Lie

Definição 13 *Um grupo de Lie \mathbf{G} é um grupo com as seguintes propriedades:*

1. *O grupo \mathbf{G} é uma variedade analítica. Isto é, uma variedade diferenciável cujas mudanças de cartas são aplicações infinitamente diferenciáveis e que podem ser expandidas em séries de potências.*
2. *A operação de grupo e a inversão são aplicações analíticas em \mathbf{G} .*

Se o leitor não está habituado com o conceito de variedade diferenciável, não se assuste. Ao dizermos que \mathbf{G} é uma variedade diferenciável, apenas queremos dizer que na vizinhança de qualquer elemento $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ existe um sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de forma que qualquer elemento de grupo naquela vizinhança pode ser escrito em função destas coordenadas $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Não queremos dizer que exista um único sistema de coordenadas que sirva para todos os elementos do grupo. Mas quando um elemento pode ser escrito em dois sistemas de coordenadas diferentes, digamos $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ e $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$, então a mudança de coordenadas é uma aplicação infinitamente diferenciável e que pode ser expressa como uma série de potências (ou seja, é uma aplicação analítica). No decorrer deste capítulo, daremos exemplos concretos de coordenadas para descrevermos os elementos de certos grupos. Desejamos apenas que o leitor mantenha a imagem pictórica de uma variedade como um sub-conjunto aberto de \mathbb{R}^n ou como uma superfície (hipersuperfície) imersa em um espaço de dimensão maior (existe um teorema devido a Whitney afirmando que sempre é este o caso).

Vamos analisar a estrutura de variedade de alguns grupos conhecidos. Para dar início, considere o grupo das transformações lineares inversíveis em um espaço vetorial real de \mathbf{n} dimensões, o grupo $GL(\mathbf{n}, \mathbb{R})$. Cada elemento do grupo pode ser escrito como uma matriz $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ real, logo, precisamos de \mathbf{n}^2 coordenadas para determinarmos um elemento do grupo. Assim,

$$GL(\mathbf{n}, \mathbb{R}) \subset M_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\mathbf{n}^2}.$$

Além do mais, a função determinante

$$\begin{aligned} \text{Det} : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{A} &\mapsto \text{Det}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

que para a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ pode ser escrita como

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

é contínua. Como para matrizes de $GL(n, \mathbb{R})$ o valor do determinante é diferente de zero temos que

$$GL(n, \mathbb{R}) = \text{Det}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

que é um sub-conjunto aberto de \mathbb{R}^{n^2} , logo uma variedade.

Podemos ir um pouco mais longe: definindo as funções coordenadas t_{ij} tais que $t_{ij}(\mathbf{A}) = a_{ij}$ a função determinante pode ser escrita como

$$\text{Det} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} t_{1i_1} t_{2i_2} \dots t_{ni_n}.$$

Esta função é infinitamente diferenciável em termos das coordenadas t_{ij} . Definimos um ponto regular da função determinante como um elemento $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que as derivadas parciais

$$\frac{\partial \text{Det}}{\partial t_{ij}}(\mathbf{A})$$

não sejam todas nulas. E dizemos que \mathbf{p} é um valor regular se todos os pontos \mathbf{A} tais que $\text{Det}(\mathbf{A}) = \mathbf{p}$ são regulares. Agora considere o grupo

$$SL(n, \mathbb{R}) = \text{Det}^{-1}(1),$$

o número 1 é um valor regular da função determinante, logo, pelo teorema global da função implícita, temos que $SL(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade, pois é a imagem inversa de um valor regular.

Estes dois exemplos anteriores, mesmo sendo teoricamente corretos, são difíceis de visualizar, a não ser no caso trivial $n = 1$, onde o determinante é a função identidade, resultando em $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $SL(1, \mathbb{R}) = \{1\}$.

Analisemos agora o grupo $\mathbf{SO}(2)$. Como visto anteriormente, este grupo é formado pelas matrizes 2×2 reais da forma

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, temos $\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta + 2\pi)$, portanto podemos efetuar uma bijeção continuamente diferenciável entre os pontos da circunferência unitária

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

e o grupo $\mathbf{SO}(2)$ associando a cada ângulo $\theta \in \mathbb{S}^1$ o único elemento $\mathbf{R}(\theta) \in \mathbf{SO}(2)$. Isto equivale a dizer que os dois conjuntos são iguais como variedades diferenciáveis.

Antes de prosseguirmos nossa análise, façamos uma pequena definição.

Definição 14 *Dados dois grupos G e H , dizemos que a aplicação*

$$\phi : G \rightarrow H$$

é um homomorfismo de grupo se

1. *Leva a identidade na identidade: $\phi(e_G) = e_H$.*
2. *Preserva a operação de grupo: $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$.*

Se um homomorfismo é bijetor, então ele é dito ser um isomorfismo e os grupos são isomorfos.

Exercício 57 *Mostre que um homomorfismo de grupo obedece à propriedade*

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}.$$

Exercício 58 *Mostre que em um isomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$. O Kernel do homomorfismo*

$$\text{Ker}(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e\}$$

somente possui o elemento identidade, e a imagem do homomorfismo

$$\text{Im}(\phi) = \{h \in H \mid \exists g \in G, \phi(g) = h\}$$

é igual a todo o grupo H .

Vamos estabelecer agora um isomorfismo de grupos: considere o grupo unitário unidimensional $U(1)$. Ou seja as transformações lineares em \mathbb{C} que preservam o módulo do número complexo. Ou seja

$$|az|^2 = |a|^2|z|^2 = |z|^2,$$

o que implica que $|a|^2 = 1$. Assim sendo, o grupo $U(1)$ é identificado com o subconjunto dos números complexos de módulo 1, em outras palavras, a circunferência unitária \mathbb{S}^1 . Assim, como conjunto de pontos (variedades) os três conjuntos são iguais:

$$SO(2) = U(1) = \mathbb{S}^1.$$

Agora, vamos ver que de fato os grupos $SO(2)$ e $U(1)$ são homomorfos (e portanto isomorfos). Os elementos em $U(1)$ possuem como operação de grupo o produto usual entre dois números complexos

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Exercício 59 *Mostre que o produto de dois números complexos de módulo 1 possui módulo igual a 1.*

Exercício 60 *Qual é o inverso do elemento de grupo $a \in U(1)$?*

Podemos agora definir a aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ como

$$\phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Exercício 61 *Mostre que a aplicação ϕ acima trata-se mesmo de um homomorfismo de grupos, mesmo quando restrito ao caso dos números complexos de módulo 1 (que quantidade representa o módulo do número complexo quando este é visto no espaço de matrizes?).*

Em particular, os números complexos de módulo 1 podem ser escritos na forma trigonométrica

$$a = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Assim, sua imagem pela aplicação ϕ será, para nossa surpresa

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Exatamente um elemento genérico de $\mathbf{SO}(2)$. Temos então o isomorfismo desejado.

Próximo vamos analisar dois grupos velhos conhecidos nossos. O grupo $\mathbf{SO}(3)$ e o grupo $\mathbf{SU}(2)$. O grupo $\mathbf{SU}(2)$ é o grupo das matrizes complexas 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tais que $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T)^* = \mathbf{A}^{-1}$ e com determinante igual a 1, isto é

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = ad - bc = 1.$$

Pela condição de unitariedade, podemos concluir que $d = \bar{a}$ e $c = -\bar{b}$. Assim, as matrizes de $\mathbf{SU}(2)$ podem ser escritas como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & v + iw \\ -v + iw & x - iy \end{pmatrix},$$

onde $x, y, v, w \in \mathbb{R}$. A condição do determinante nos dá

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = ad - bc = x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Ou seja, o grupo $\mathbf{SU}(2)$ é equivalente como variedade (pois todas as aplicações são continuamente diferenciáveis) ao conjunto de vetores em \mathbb{R}^4 com módulo igual a 1, em outras palavras, a esfera tridimensional \mathbb{S}^3 .

O grupo $\mathbf{SO}(3)$, por sua vez, é o grupo das rotações em \mathbb{R}^3 . Uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser descrita por um vetor unitário \vec{n} e por um ângulo de rotação s . Para definirmos um eixo de rotação precisamos de dois ângulos (θ, ϕ) , com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Portanto, o eixo de rotação \vec{n} pode ser visto também como um ponto da esfera unitária \mathbb{S}^2 . Note porém que temos a mesma rotação tomados um eixo \vec{n} e um ângulo s ou um eixo $-\vec{n}$ e um ângulo $-s$, portanto há uma identificação de pontos antípodas nesta variedade. De fato, a variedade que equivale ao grupo $\mathbf{SO}(3)$ é o espaço projetivo real tridimensional \mathbb{RP}^3 , que pode ser pensado também como a esfera \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados. Não vamos entrar em detalhe sobre os métodos topológicos para identificar esta estrutura de variedade, antes, vamos buscar um homomorfismo entre os grupos $\mathbf{SU}(2)$ e $\mathbf{SO}(3)$ e então a partir das propriedades desta aplicação entendermos mais claramente a topologia de $\mathbf{SO}(3)$.

Retomando algumas propriedades das matrizes de Pauli vistas no capítulo anterior temos que

$$(\vec{v} \cdot \vec{\sigma})(\vec{w} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \text{Id}_2 + \imath(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Considere então as matrizes unitárias

$$U_{\vec{n}}(s) = e^{-\frac{\imath s}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}.$$

Exercício 62 *Mostre que para um vetor unitário \vec{n} , temos*

$$U_{\vec{n}}(s) = \cos\left(\frac{s}{2}\right) \text{Id}_2 - \imath(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{s}{2}\right).$$

E escreva em forma matricial.

Está claro que estas matrizes são unitárias. Que todo elemento de $SU(2)$ pode ser escrito desta forma ficará claro na próxima seção.

Exercício 63 *Mostre as seguintes relações de conjugação;*

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\imath s}{2} \sigma_3} \sigma_1 e^{\frac{\imath s}{2} \sigma_3} &= \sigma_1 \cos s + \sigma_2 \sin s, \\ e^{-\frac{\imath s}{2} \sigma_3} \sigma_2 e^{\frac{\imath s}{2} \sigma_3} &= -\sigma_1 \sin s + \sigma_2 \cos s, \\ e^{-\frac{\imath s}{2} \sigma_3} \sigma_3 e^{\frac{\imath s}{2} \sigma_3} &= \sigma_3. \end{aligned}$$

Faça o mesmo para $e^{-\frac{\imath s}{2} \sigma_1}$ e $e^{-\frac{\imath s}{2} \sigma_2}$.

A partir do exercício acima, podemos estabelecer um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$ associando

$$U_{\vec{n}}(s) \mapsto R_{\vec{n}}(s).$$

Geometricamente, a idéia é tomar um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ escrito como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i = \vec{X} \cdot \vec{\sigma}.$$

Uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser implementada pela conjugação

$$R_{\vec{n}}(s)(\vec{v}) = R_{\vec{n}}(s)(\vec{X}) \cdot \vec{\sigma} = e^{-\frac{\imath s}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \vec{v} e^{\frac{\imath s}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}.$$

Exercício 64 *Mostre pelo menos no caso dos geradores $R_i(\mathbf{s})$ que realmente temos a matriz de rotação.*

Exercício 65 *Mostre que esta aplicação associa a unidade em $SU(2)$ à unidade em $SO(3)$. Mostre também (pelo menos para os geradores, já que todos os outros elementos de $SO(3)$ podem ser escritos como produtos dos geradores) que a composição de dois elementos em $SU(2)$ é associada à composição das rotações na imagem.*

Temos então um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$. Este não é um isomorfismo pois $U_{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$ e $U_{-\mathbf{n}}(-\mathbf{s})$ são associados ao mesmo elemento de $SO(3)$. Há muito a se explorar na relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$, este foi apenas um primeiro ponto de vista. O leitor poderá encontrar exposições mais detalhadas e outras análises, envolvendo grupos de homotopia, geometria complexa, álgebras de Clifford e muito mais na bibliografia apresentada no final.

Para finalizarmos nossa breve exposição sobre grupos, daremos uma rápida introdução ao conceito de representação de grupos.

Definição 15 *Dado um grupo G , definimos uma representação real (complexa) de dimensão n de G como um homomorfismo $\Gamma : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ($\Gamma : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$). Diz-se que o espaço vetorial de dimensão n onde as matrizes de $GL(n)$ agem carrega a representação Γ . Uma representação é dita ser irredutível quando o espaço que carrega a representação não possui sub-espacos invariantes pela ação da representação do grupo. Diz-se ainda que uma representação é completamente redutível quando o espaço que carrega a representação pode ser decomposto em uma soma direta de representações irredutíveis.*

O exemplo mais simples é o da representação fundamental. Muitos grupos são naturalmente definidos como grupos de matrizes, logo são subgrupos de $GL(n)$ para algum n . Por exemplo, $SU(2)$ é um subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$, assim a representação fundamental de $SU(2)$ é dada por matrizes 2×2 complexas que obedecem à propriedade de unitariedade e determinante igual a 1 . A representação fundamental do grupo $SO(3)$, por sua vez, é dada em termos de matrizes 3×3 reais.

As representações mais interessantes do ponto de vista matemático são as representações irredutíveis. A teoria de classificação de representações

irredutíveis de grupos é bastante complexa, mesmo quando se trata de grupos finitos. No caso dos grupos clássicos de matrizes, dentre os quais se incluem os grupos unitários e ortogonais, as representações de dimensão finita são completamente redutíveis, assim sendo, as representações irredutíveis são os blocos de construção de qualquer representação destes grupos.

4.2 Álgebras de Lie

No capítulo anterior também definimos o conceito de álgebra de Lie como um espaço vetorial L munido de uma operação bilinear, anti-simétrica e que obedeça à identidade de Jacobi. A definição de álgebra de Lie não faz menção à noção de grupo. Os dois conceitos estão interligados pelo fato que a todo grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie dos seus geradores infinitesimais. A partir de agora, somente consideraremos grupos de Lie que sejam variedades de dimensão finita, ou seja que os seus elementos dependam apenas de uma quantidade finita de coordenadas (existe também a teoria de grupos de Lie de dimensão infinita, mas envolve complicações técnicas que fogem ao escopo deste minicurso).

Para encontrarmos os geradores infinitesimais de um grupo de Lie G , tome um subgrupo a um parâmetro $G_{\mathbb{R}}$ de G , definido como

$$G_{\mathbb{R}} = \{g(t) \in G, t \in \mathbb{R} | g(0) = e, g(t)g(s) = g(t+s)\}.$$

Basicamente, um subgrupo a um parâmetro é uma curva em G passando pelo elemento identidade. Vamos avaliar agora o vetor velocidade desta curva no elemento identidade

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{g}(t) = \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0}.$$

Este vetor é tangente à variedade do grupo no ponto correspondente ao elemento identidade. Por outro lado, todo elemento de $G_{\mathbb{R}}$ pode ser escrito como a série formal de potências

$$g(t) = e^{tA},$$

por isto dizemos que A é o gerador infinitesimal de $G_{\mathbb{R}}$.

Podemos prosseguir com esta operação e encontrar outros subgrupos a um parâmetro tais que os seus geradores infinitesimais sejam linearmente independentes. como estamos tratando apenas de variedades de dimensão

finita, os seus espaços tangentes também são de dimensão finita [4, 10]. Logo, haverá um conjunto linearmente independente de geradores infinitesimais $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\}$ que gerarão o espaço tangente a \mathbf{G} no ponto \mathbf{e} , este espaço, que vamos denotar por \mathbf{L} , será a álgebra de Lie do grupo \mathbf{G} . Qualquer outro elemento do grupo \mathbf{G} pode ser expresso como exponencial de uma combinação linear de vetores de \mathbf{L}

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, \dots, x_n) = e^{x_1 \mathbf{A}_1 + \dots + x_n \mathbf{A}_n}.$$

Uma explicação deve ser feita neste ponto: até o momento, tínhamos utilizado os elementos do grupo da forma

$$\mathbf{g} = e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}}.$$

Isto é apenas por ser conveniente à mecânica quântica. Pois naquele contexto as simetrias são operadores unitários enquanto os geradores infinitesimais são observáveis quânticos, logo são operadores hermitianos. A única possibilidade de uma exponencial de um operador hermitiano ser unitário é através da introdução do fator imaginário na exponencial. Em nossa análise geral sobre a estrutura de grupos e álgebras de Lie este cuidado torna-se desnecessário, de qualquer forma, podemos facilmente passar da convenção

$$\mathbf{g} = e^{x \cdot \mathbf{A}}$$

para a outra apenas dizendo que o operador \mathbf{A} é igual a um outro operador $i\mathbf{B}$.

Para vermos que o espaço tangente ao grupo \mathbf{G} no elemento identidade é de fato uma álgebra de Lie, temos que mostrar que tal espaço é fechado em relação ao comutador. Para isto, sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} dois elementos do espaço tangente e sejam

$$\mathbf{g}(t) = e^{t\mathbf{A}} \quad ; \quad \mathbf{h}(t) = e^{t\mathbf{B}}.$$

Considere agora o elemento de grupo

$$\mathbf{k}(\tau) = \mathbf{g}(t)\mathbf{h}(t)\mathbf{g}^{-1}(t)\mathbf{h}^{-1}(t),$$

onde $\tau = t^2$. Então, se expandirmos $\mathbf{K}(\tau)$ em série de potências teremos

$$\mathbf{k}(\tau) = \text{Id} + \tau [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \mathcal{O}(t^3).$$

Assim, o comutador também aparece como um gerador infinitesimal:

$$[A, B] = \left. \frac{dk(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0},$$

lembrando-se que quando $\tau = \mathbf{0}$ temos também $t = \mathbf{0}$.

Portanto, temos dois tipos de objetos relacionados entre si. De um lado, temos o grupo de Lie, que é uma variedade e pode possuir uma estrutura topológica complicada. De outro lado, temos a álgebra de Lie, que possui a vantagem de ser um espaço vetorial e é de certa forma mais simples operacionalmente. No entanto, esta simplicidade possui um preço, informações globais a respeito da estrutura topológica do grupo associado à álgebra são perdidas. A relação entre os elementos do grupo e elementos da álgebra está no fato que estes são geradores infinitesimais daqueles. Por outro lado, a partir dos elementos da álgebra podemos recobrar os elementos do grupo através da exponenciação.

Definição 16 *Dados os vetores A_1, \dots, A_n da base de uma álgebra de Lie L podemos escrever o comutador genericamente como*

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k A_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k da expansão do comutador na base são denominados constantes de estrutura da álgebra L .

Vejamos alguns exemplos de álgebras de Lie: O primeiro exemplo é o da álgebra de Lie do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$), denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$), que consiste da álgebra de todas as matrizes $n \times n$ reais (complexas). Uma base para este espaço são as matrizes

$$e_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{Na linha } i \text{ e coluna } j. \\ \mathbf{0}, & \text{em todas outras entradas.} \end{cases}$$

Exercício 66 *Mostre que o comutador entre os elementos da base de $\mathfrak{gl}(n)$, se escreve como*

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}.$$

O segundo exemplo é a álgebra de Lie do Grupo $SL(n, \mathbb{R})$ ($SL(n, \mathbb{C})$) denotada por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$). Como o determinante de uma exponencial pode ser escrito como

$$\text{Det}(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{Tr}(\mathbf{A})},$$

concluimos que a condição $\text{Det}(\mathbf{g}) = 1$ implica em $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0$, onde \mathbf{A} é o gerador infinitesimal de \mathbf{g} . Assim, a álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) é a álgebra das matrizes $n \times n$ reais (complexas) com traço nulo.

Consideremos agora a álgebra de Lie do grupo $SO(n)$, denotada por $\mathfrak{so}(n)$. A condição sobre os elementos do grupo é que a transposta de uma matriz seja sua inversa. Assim, temos

$$\mathbf{g}\mathbf{g}^T = \text{Id}_n.$$

Considere $\mathbf{g} = e^{t\mathbf{A}}$ e tome os geradores infinitesimais desta relação, ou seja

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t)\mathbf{g}^T(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t) \right|_{t=0} \mathbf{g}^T(0) + \mathbf{g}(0) \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}^T(t) \right|_{t=0} = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra $\mathfrak{so}(n)$ é a álgebra das matrizes reais ou complexas $n \times n$ anti-simétricas, ou seja, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Vimos no primeiro capítulo quais são os geradores infinitesimais do grupo $SO(2)$, que é a matriz $-\epsilon_{ij}$, e os geradores do grupo $SO(3)$, que são as matrizes L_i , $i = 1, 2, 3$.

Finalmente, analisemos a álgebra de Lie do grupo $SU(n)$, denotada por $\mathfrak{su}(n)$. A condição sobre os elementos do grupo é que a matriz hermitiana conjugada seja a inversa. Assim, temos

$$\mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger = \text{Id}_n.$$

Considere $\mathbf{g} = e^{t\mathbf{A}}$ e tome os geradores infinitesimais desta relação, ou seja

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t)\mathbf{g}^\dagger(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t) \right|_{t=0} \mathbf{g}^\dagger(0) + \mathbf{g}(0) \left. \frac{d}{dt} \mathbf{g}^\dagger(t) \right|_{t=0} = \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra $\mathfrak{su}(n)$ é a álgebra das matrizes complexas $n \times n$ anti-hermitianas, ou seja, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\dagger$. Se quisermos seguir uma notação compatível com a mecânica quântica, basta dizermos que o gerador infinitesimal

\mathbf{A} (que é anti-hermitiano) é igual a $\imath\mathbf{B}$, onde \mathbf{B} é uma matriz hermitiana. No capítulo 3, vimos que os geradores infinitesimais do grupo $SU(2)$ podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli, assim, temos os geradores infinitesimais

$$\mathbf{J}_i = -\frac{\imath}{2}\boldsymbol{\sigma}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Assim como para grupos, também temos a noção de homomorfismo e isomorfismos para álgebras de Lie.

Definição 17 Dadas duas álgebras de Lie \mathbf{L} e \mathbf{M} , dizemos que a aplicação

$$\phi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$$

é um homomorfismo de álgebra de Lie se

1. É linear.
2. Preserva a relação de comutação: $\phi([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = [\phi(\mathbf{A}), \phi(\mathbf{B})]$.

Se um homomorfismo é bijetor, então ele é dito ser um isomorfismo e as álgebras de Lie são isomorfas.

Exercício 67 Mostre que a afirmação que duas álgebras de Lie são isomorfas é equivalente a dizer que elas possuem a mesma dimensão e as mesmas constantes de estrutura.

Vimos no decorrer deste minicurso três álgebras de Lie que embora tenham naturezas diferentes, elas são isomorfas:

1. Primeiramente, vimos que os vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 com o produto vetorial formam uma álgebra de Lie de dimensão $\mathbf{3}$ satisfazendo

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k.$$

2. Em segundo lugar, vimos que a álgebra de Lie dos geradores infinitesimais de rotações em \mathbb{R}^3 ($\mathfrak{so}(\mathbf{3})$) com a operação dada pelo comutador pode ser escrita também como

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k,$$

3. Por último, podemos ver que a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ escrita em termos dos geradores $J_i - \frac{i}{2}\sigma_i$, possui a seguinte regra de comutação

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k,$$

Assim, temos três álgebra de Lie tridimensionais com as mesmas constantes de estruturas, o tensor ϵ_{ijk} , portanto isomorfas. Veja que ao nível de álgebras de Lie, $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ são isomorfos, mesmo que os grupos não o sejam.

Para finalizarmos, uma breve explanação sobre representações de álgebras de Lie.

Definição 18 *Dada uma álgebra de Lie L , definimos uma representação real (complexa) de dimensão n de L como um homomorfismo $\Gamma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ($\Gamma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$). Diz-se que o espaço vetorial de dimensão n onde as matrizes de $\mathfrak{gl}(n)$ agem carrega a representação Γ . Uma representação é dita ser irredutível quando o espaço que carrega a representação não possui sub-espacos invariantes pela ação da representação da álgebra de Lie. Diz-se ainda que uma representação é completamente redutível quando o espaço que carrega a representação pode ser decomposto em uma soma direta de representações irredutíveis.*

Da mesma forma, a representação fundamental da álgebra é dada na dimensão onde elas são definidas. Assim, a representação fundamental de $\mathfrak{so}(n)$ é de dimensão n , idem para $\mathfrak{su}(n)$. Um outro tipo de representações importante para álgebras de Lie são as representações adjuntas. Basicamente é um homomorfismo

$$\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

e a ação dos elementos é dada por

$$\text{ad}(A)(B) = [A, B].$$

Podemos calcular os elementos de matriz na representação adjunta explicitamente: Tome um vetor $v = \sum_j v_j A_j \in L$. A ação de A_i pela representação adjunta sobre v pode ser escrita como

$$\text{ad}(A_i)(v) = \sum_{k=1}^n v_k \text{ad}(A_i)(A_k) = \sum_{j,k=1}^n c_{ik}^j v_k A_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n (\text{ad}(\mathbf{A}_i)(\mathbf{v}))_j \mathbf{A}_j = \sum_{j,k=1}^n \text{ad}(\mathbf{A}_i)_{jk} v_k \mathbf{A}_j.$$

Assim, $\text{ad}(\mathbf{A}_i)_{jk} = c_{ik}^j$, ou seja, as entradas de matriz na representação adjunta são dadas em termos das constantes de estrutura.

Da mesma forma que em grupos, as representações mais interessantes são as representações irredutíveis. No caso de $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ obtivemos todas as representações de dimensão finita, que são denominadas representações de peso máximo. A mesma idéia pode ser aplicada para todas as álgebras de Lie dos grupos de Lie Clássicos, guardadas as devidas diferenças advindas da complexidade da álgebra. Existe um teorema que afirma que todas as representações de dimensão finita das álgebras de Lie clássicas são completamente redutíveis. Este fato está por trás da decomposição de Clebsch Gordan, por exemplo.

Este foi um breve apanhado de algumas propriedades de álgebras e grupos de Lie. Enfatizamos principalmente os grupos e suas respectivas álgebras para os casos $SO(3)$ e $SU(2)$. Este minicurso foi apenas um primeiro passo para que o leitor tome a iniciativa de estudar por conta própria este assunto tão vasto e fascinante que são os grupos e álgebras de Lie. Esperamos que o conteúdo deste minicurso tenha sido útil para o leitor e tenha ampliado um pouco seus horizontes. Para os matemáticos, esperamos que estes tenham visto a importância deste assunto nos domínios da física. Para os físicos, esperamos ter mostrado a necessidade de se compreender melhor as estruturas matemáticas subjacentes ao tratamento de certos fenômenos físicos. De qualquer forma, esperamos ampliar os contatos entre estas duas áreas do conhecimento. Contato este sem o qual não será possível o desenvolvimento da ciência neste século que se inicia.

Bibliografia

- [1] G.B. Arfken e H.J. Weber: “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press (2001).
Texto padrão de física matemática utilizada em cursos de graduação. Nele voce pode encontrar todo o material necessário de equações diferenciais e funções especiais para o entendimento de mecânica quântica.
- [2] V.I. Arnol’d: “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, Springer-Verlag (1978).
Apresenta a mecânica clássica de um ponto de vista matemático, conseguindo ao mesmo tempo ser rigoroso e acessível. Seu autor é um dos maiores matemáticos vivos na atualidade e que possui contribuições teóricas fundamentais para a mecânica clássica no século XX. Um clássico!
- [3] P.A.M. Dirac; “The Principles of Quantum Mechanics”, 4th Edition, Clarendon Press (1981).
Texto clássico de mecânica quântica escrito por um dos grandes responsáveis por seu desenvolvimento. Embora muito de sua linguagem esteja fora de uso na literatura científica hoje em dia, este livro tem a virtude de ser um dos primeiros a colocar a mecânica quântica no formalismo de operadores atuando em espaços de Hilbert (embora ele não diga este nome). Ele usa o que é comumente apelidado de bras e kets.
- [4] T. Frankel: “The Geometry of Physics, An Introduction”, Cambridge (1997).
Um compêndio de geometria diferencial e topologia para físicos, incluindo uma boa discussão sobre grupos e álgebras de Lie. Sua principal virtude é ser destinado a principiantes, apresentando uma linguagem simples e riqueza de detalhes em alguns cálculos. Adequado para alunos de final de graduação ou de pós graduação em física que desejam obter um

conhecimento essencial de métodos matemáticos para desenvolver um trabalho em física teórica.

- [5] H. Goldstein: “Classical Mechanics”, 2nd Edition, Addison-Wesley (1980).
Livro texto padrão de mecânica clássica. A principal virtude da segunda edição é uma tentativa de modernizar a linguagem da mecânica clássica utilizando um pouco mais de estruturas matemáticas.
- [6] L. Kauffman: “Knots and Physics”, World Scientific (1991).
Um livro sobre os desenvolvimentos da teoria de nós na física. A razão de ser citado nesta bibliografia é porque este livro trás uma introdução às redes de spin precedida de um brilhante e muito bem escrito resumo da teoria do spin. Também apresenta uma abordagem interessante para a relatividade restrita utilizando a teoria de grupos.
- [7] L.D. Landau e E.M. Lifshitz: “Course in Theoretical Physics Vol 1: Mechanics”, Butterworth-Heinemann (1982).
Escrito por um dos maiores físicos do século XX, este livro, tornou-se um clássico por seu estilo incisivo e por sua escrita original. Este livro é destinado a leitores com formação em física e contém muito do modo de pensar de um físico teórico. Imperdível!
- [8] J. Madore: “The Fuzzy Sphere”, Journal of Classical and Quantum Gravity 9 (1) (1992) 69-87.
Artigo pioneiro que lança o conceito de esfera difusa. Estes são exemplos de espaços não comutativos que basicamente consistem na álgebra de matrizes que formam as representações irredutíveis de $\mathfrak{su}(2)$.
- [9] S.A. Major: “A Spin Network Primer”, preprint gr-qc/9905020.
Como o próprio título sugere, trata-se de uma introdução às redes de spin destinada a alunos de graduação com conhecimento básico de mecânica quântica. O autor é pesquisador na área extremamente efervescente de loop quantum gravity e no artigo ele mostra a utilidade das redes de spin para o cálculo de observáveis em gravitação quântica.
- [10] M. Nakahara: “Geometry, Topology and Physics”, The Institute of Physics (1990).
Em minha opinião, este é o mais completo compêndio de matemática para físicos. O autor consegue expor uma quantidade grande de tópicos

matemáticos (inclusive grupos e álgebras de Lie) sem se limitar a pontos triviais e permitindo ainda ao leitor um bom acompanhamento através de um razoável detalhe nos cálculos.

- [11] J.J. Sakurai: “Modern Quantum Mechanics”, Benjamin/Cummings (1994).

Livro texto padrão em mecânica quântica que, por sua abrangência e originalidade está se tornando um clássico na área. Sua maior vantagem é enfatizar a mecânica quântica como uma teoria de operadores hermitianos em espaços vetoriais. Embora o autor não faça questão de utilizar uma linguagem matemática rigorosa, este texto é o ideal para que matemáticos tomem contato com a mecânica quântica bem como para físicos que queiram se aventurar por domínios mais matemáticos.

- [12] D.H. Sattinger e O.L. Weaver: “Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics”, Springer-Verlag (1993).

O título do livro é auto explicativo. Um texto acessível para alunos de graduação, que contém inúmeras aplicações e que não se deixa perder em detalhes técnicos, antes procura dar um panorama geral do assunto sem ficar na superficialidade.

- [13] H. Weyl: “The Theory of Groups and Quantum Mechanics”, Dover (1950).

Texto clássico que foi um dos primeiros a ressaltar a importância da teoria de grupos e representações para o entendimento da mecânica quântica.

- [14] N. Zettili: “Quantum Mechanics, Concepts and Applications”, John Willey & Sons (2001).

Livro texto de mecânica quântica, na mesma linha do Sakurai. A sua principal virtude é o detalhamento dos cálculos e uma quantidade de exercícios factíveis, o que estimula o aprendizado pois o aluno vê seu desenvolvimento real no assunto.