UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Extensões de Hopf-Galois

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Deividi Ricardo Pansera

Florianópolis, 11 de fevereiro de 2011

Sumário

Introdução

Uma álgebra de Hopf, assim chamada em referência a Heinz Hopf, é uma estrutura que é simultaneamente uma álgebra e uma coálgebra em que estas estruturas satisfazem certa relação de compatibilidade, e tem um anti-homomorfismo satisfazendo algumas condições que podem ser expressas a partir das estruturas de álgebra e coálgebra. O primeiro exemplo de tal estrutura foi observado na topologia algébrica por Heinz Hopf em 1941, sendo que no final de 1960, álgebras de Hopf teornaram-se objetos de estudo em um ponto de vista estritamente algébrico e por volta de 1980 pesquisas nesta área encontraram uma forte conexão com a mecânica quântica (os tão chamados Grupos Quânticos são exemplos de álgebras de Hopf não comutativas e não cocomutativas).

A definição de extensões de Hopf-Galois tem suas raízes com S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg que queriam generalizar a teoria clássica de Galois do grupo dos automorfismos de corpos para grupos agindo em anéis comutativos. Em 1969 S. U. Chase e M. E. Sweedler estenderam estas ideias para coações de Álgebras de Hopf agindo em uma k-álgebra comutativa, para k um anel comutativo. A definição geral é devido à H. F. Kreimer e M. Takeuchi dada em 1980. Nosso objetivo principal neste trabalho é estudar algumas propriedades algébricas e caracterizações equivalentes de extensões de Hopf-Galois para álgebras de Hopf de dimensão finita.

Desenvolvemos neste trabalho alguns aspectos básicos da teoria de álgebras de Hopf e extensões de Hopf-Galois. O contexto de nosso trabalho é mais restrito do que o necessário, aqui todas as álgebras, coálgebras e álgebras de Hopf são tomadas sobre um corpo k, embora possam ser tomadas sobre um anel comutativo com unidade.

No primeiro capítulo veremos que, no sentido categórico, coálgebra é uma noção dual do conceito de álgebra. Na realidade, álgebras e coálgebras podem ser enxergados como objetos duais, no sentido de que o dual algébrico C^* de uma coálgebra C, tem uma estrutura natural de álgebra. No entanto, nem sempre o dual algébrico A^* de uma álgebra A tem uma estrutura de coálgebra, a menos que A tenha dimensão finita. Se não nos importarmos com a dimensão de A, veremos que podemos atribuir uma estrutura de coálgebra a um certo subespaço de $A*$, a saber, o dual finito $A^\circ \subset A^*$. Em seguida, veremos que existem certos espaços onde as estruturas de álgebra e coálgebra aparecem simultaneamente e satisfazem uma relação de compatibilidade, e tais espaços chamaremos de biálgebras. Finalizamos o capítulo apresentando a noção de álgebra de Hopf, que a grosso modo, é uma biálgebra com um endomorfismo satisfazendo condições que podem ser expressas em função das estruturas de álgebra e de coálgebra.

No segundo capítulo, veremos que assim como a noção de álgebra pôde ser dualizada, a noção de módulo sobre uma álgebra será dualizada e teremos o conceito de comódulo sobre uma coálgebra. Como em álgebras de Hopf temos as estruturas de álgebra e coálgebra simultaneamente, em módulos de Hopf teremos as estruturas de módulos e comódulos simultaneamente atuando e satisfazendo algumas relações de compatibilidade. Em seguida, motivados pelas propriedades de um determinado elemento na álgebra de grupo kG definimos o que seria um elemento integral em uma biálgebra e uma álgebra de Hopf, bem como apresentamos algumas propriedades e um Teorema de Maschke no contexto de álgebras de Hopf.

No terceiro e último capítulo, baseados nas ideias de ações de grupos por automorfismos generalizamos tais ações para ações de álgebras de Hopf H em uma álgebra A, e quando houver tal ação chamaremos A de um H-módulo álgebra. Com esta estrutura, existe uma subálgebra de A chamada de álgebra dos invariantes de H em A, denotada por A^H. Dualizando este conceito, obtemos o conceito de coação de uma álgebra de Hopf H em uma álgebra A, e quando houver tal coação chamaremos A de um H-comódulo álgebra. Em seguida apresentamos uma nova álgebra denotada por $A\#H$ e chamada de álgebra Produto Smash entre A e H, que de certa forma contém H e A como subálgebras. Apresentaremos também um contexto de Morita entre $A\#H$ e A^H. Finalmente, apresentamos a definição de Extensões de Hopf-Galois, que tem seus fundamentos baseados na coação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra, em seguida nos restringimos ao caso da álgebra de Hopf ter dimensão finita e obtemos um resultado que de certa forma caracteriza tais extensões.

Neste trabalho, como já foi mencionado, a teoria é toda desenvolvida tomando álgebras, coálgebras e álgebras de Hopf sobre um corpo k. Assumimos conhecidos a teoria básica de grupos, anéis, álgebra linear e produto tensoriais sobre k.

1 *Preliminares*

Neste capítulo, investigamos algumas das propriedades elementares de álgebras, coálgebras e álgebras de Hopf. Construímos a teoria sempre considerando álgebras, coálgebras e álgebras de Hopf sobre um corpo k, embora esta teoria já foi generalizada e desenvolvida sobre um anel comutativo R.

1.1 Álgebras e Coálgebras

1.1.1 Álgebras

Seja k um corpo. Ao decorrer do trabalho, a menos que se diga o contrário, todos os produto tensoriais serão considerados sobre k. Iniciamos este capítulo lembrando a definição clássica de álgebra e dando uma definição equivalente.

Definição 1. *Uma k-álgebra unital A é um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e $\forall \alpha \in k$, $\forall a, b \in A$ temos:*

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b)$$

em que ab representa a multiplicação no anel A dos elementos a e b.

Observação 1. $\phi : k \to A$ definida por $\phi(\alpha) = \alpha \cdot 1_A$ é um monomorfismo de anéis e é k-linear

Nosso objetivo é construir uma nova definição para álgebra, equivalente à clássica, a fim de dualizarmos este conceito e obtermos a estrutura de coálgebra.

Definição 2. *Uma k-álgebra é uma tripla (A, μ, η), em que A é um k-espaço vetorial, $\mu : A \otimes A \to A$ e $\eta : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes I_A"] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes \eta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
$$

em que I_A é a identidade em A e os isomorfismos do segundo diagrama são os isomorfismos canônicos dados por:

$$
\begin{aligned}
\psi : A &\longrightarrow A \otimes k \\
a &\longmapsto a \otimes 1_k
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\varphi : A &\longrightarrow k \otimes A \\
a &\longmapsto 1_k \otimes a
\end{aligned}
$$

Chamamos μ de multiplicação e η de unidade. O primeiro diagrama representa a associatividade da álgebra e é a mesma coisa que:

$$\mu \circ (I_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes I_A) \tag{1.1}$$

Já o segundo diagrama nos fornece

$$\mu \circ (\eta \otimes I_A) \circ \psi = I_A \quad \text{e} \quad \mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \varphi = I_A. \tag{1.2}$$

Afirmação 1. *As duas definições de k-álgebras dadas acima são equivalentes, ou seja, Definição 1 $\Leftrightarrow$ Definição 2.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja A uma álgebra como na Definição 1. É fácil ver que $M : A \times A \to A$ dada por $M(a,b) = ab$ é uma aplicação bilinear. Portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única $\mu : A \otimes A \to A$ k-linear tal que $\mu(a \otimes b) = M(a,b) = ab$. Defina $\eta = \phi$, em que ϕ é aplicação k-linear dada na observação 1. Resta verificarmos que os diagramas da definição 2 comutam, mas isto ocorre, pois para todos $a,b,c \in A$ temos:

$$(\mu \circ (I_A \otimes \mu))(a \otimes b \otimes c) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c)) = \mu(a \otimes bc) = a(bc)$$

$$(\mu \circ (\mu \otimes I_A))(a \otimes b \otimes c) = \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu(ab \otimes c) = (ab)c$$

Como a multiplicação no anel é associativa, segue que $\mu \circ (\mu \otimes I_A) = \mu \circ (I_A \otimes \mu)$, além disso,

$$(\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \psi)(a) = \mu(a \otimes \eta(1_k)) = a\phi(1_k) = a1_A = a,$$

analagomente mostra-se que $(\mu \circ (\eta \otimes I_A) \circ \varphi) = I_A$. Logo, os diagramas comutam, donde segue que (A, μ, η) é uma álgebra segundo a definição 2.

($\Leftarrow$) Agora, seja (A,μ,η) uma álgebra segundo a definição 2. Temos que A é um k-espaço vetorial. Precisamos definir uma estrutura de anel em A, para tanto, sendo $a,b \in A$ defina a multiplicação $ab = \mu(a \otimes b)$. Como o primeiro diagrama da definição 2 comuta, temos a associatividade do produto, e, sendo μ linear, para todo $a,b,c \in A$ temos:

$$(a+b)c = \mu((a+b)\otimes c) = \mu(a\otimes c + b\otimes c) = \mu(a\otimes c)+\mu(b\otimes c) = ab+bc$$

Analogamente mostra-se que $a(b+c) = ab+ac$. Como μ é k-linear e o produto tensorial é sobre k, podemos verificar facilmente que para todo $\alpha \in k$,

$$\alpha\cdot(ab) = (\alpha\cdot a)b = a(\alpha\cdot b)$$

agora, como o segundo diagrama da definição 2 comuta, pelas fórmulas em 1.2 segue que $\eta(1_k) = 1_A$ e portanto A é uma álgebra segundo a definição 1.

■

Esta afirmação nos permite observar que é indiferente tratarmos uma álgebra como na definição 1 ou na definição 2.

A partir daqui omitiremos o corpo k e as aplicações estruturais μ e η de uma k-álgebra (A,μ,η). Simplesmente diremos a álgebra A. Observamos que μ é sobrejetora, pois para todo $a \in A$, $a = a1_A = \mu(a\otimes 1_A)$.

Exemplo 1. *Todo corpo k é uma álgebra sobre si mesmo.*

Exemplo 2 (Álgebra de Funções)**.** *Sejam k um corpo e $X \neq \emptyset$ um conjunto. Defina $\mathscr{F}(X) = \{f : X \to k : f \text{ é função}\}$. Então, é imediato verificar que $\mathscr{F}(X)$ é uma álgebra com o produto, multiplicação por escalar e soma, todas dadas ponto a ponto.*

Exemplo 3 (Álgebra Produto Tensorial)**.** *Sejam A e B k-álgebras e $\tau : A\otimes B \to B\otimes A$ o isomorfismo denominado flip, definido por $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$. Quando τ possuir subíndices, estes denotam quais parcelas estão sendo trocadas no produto tensorial, por exemplo,*

$$\begin{array}{rcl}\tau_{24} : A_1\otimes A_2\otimes A_3\otimes A_4 & \longrightarrow & A_1\otimes A_4\otimes A_3\otimes A_2\\ a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4 & \longmapsto & a_1\otimes a_4\otimes a_3\otimes a_2\end{array}$$

em que A_1, A_2, A_3 e A_4 são espaços vetorias sobre k. Voltando para a nosso caso, sabemos que $A\otimes B$ tem uma estrutura de k - espaço vetorial, sendo assim, defina $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A\otimes\mu_B)\circ\tau_{23}$ e unidade $\eta_A(1)\otimes\eta_B(1) = 1_A\otimes 1_B$. As verificações são imediatas e esta álgebra é chamada álgebra produto tensorial.

Exemplo 4 (Álgebra de grupo)**.** *Seja G um grupo com operação $*$. A álgebra de grupo kG é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de G com coeficientes em k, ou seja, seus elementos são da forma*

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n,$$

em que $a_i \in k$ e $g_i \in G$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Em geral denotamos este elemento como

$$\sum_{g \in G} a_g g,$$

onde assumímos que $a_g = 0$ a menos de um número finito de $g \in G$. Então é fácil ver que kG é uma álgebra sobre k com respeito a operação $+$ dada por

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

produto por escalar dado por

$$a \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} (a a_g) g,$$

e multiplicação dada por

$$(a_g g)(b_g h) = (a_g b_h) g * h.$$

Segue desta definição que a unidade da álgebra kG é o elemento neutro do grupo.

Exemplo 5 (Álgebra oposta A^{op})**.** *Seja A uma álgebra. Defina a função $\mu^{op} = \mu \circ \tau$, em que $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. É fácil ver que (A, μ^{op}, η) é uma álgebra.*

Definição 3. *Uma álgebra (A, M, u) é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ é função flip definida no exemplo 3.

Definição 4. *Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial $B \subseteq A$ é dito uma subálgebra se $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.*

Definição 5. *Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial $I \subseteq A$ é chamado:*

i) Um ideal à esquerda (à direita) se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ (respectivamente $\mu(I \otimes A) \subseteq I$).

ii) Um ideal se $\mu(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I$.

Observação 2. *É interessante notar que todo ideal à esquerda ou à direita é uma subálgebra.*

Definição 6. *Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) álgebras.Dizemos que $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se f é um morfismo de anéis com unidade e um morfismo de espaços vetoriais. Ou equivalentemente, em vista da afirmação 1, uma função k-linear $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Antes de proseguirmos, será enunciado um lema a respeito de produto tensorial de espaços vetoriais cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Lema 1. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma função linear. Então $ker(T \otimes T) = ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$.*

□

Observação 3. Seja $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então $Im(f)$ é uma subálgebra de B e $ker(f)$ é um ideal de A. De fato, temos que $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu_B(Im(f) \otimes Im(f)) &= \mu_B(f(A) \otimes f(A)) = (\mu_B \circ (f \otimes f))(A \otimes A) = \\ &= (f \circ \mu_A)(A \otimes A) = f(\mu_A(A \otimes A)) \subseteq f(A) = Im(f). \end{aligned}$$

Isto mostra que $Im(f)$ é uma subálgebra de B. Para mostrarmos que $ker(f)$ é um ideal de A, note que $(\mu_B \circ (f \otimes f))(ker(f \otimes f)) = \{0\}$, mas sendo f um morfismo de álgebras, isto implica que $(f \circ \mu_A)(ker(f \otimes f)) = \{0\}$. Logo, $\mu_A(ker(f \otimes f)) \subseteq ker(f)$ e portanto pelo lema 1 segue que $\mu_A(ker(f) \otimes A + A \otimes ker(f)) \subseteq ker(f)$. Donde conluímos que $ker(f)$ é um ideal de A.

Proposição 1. *Sejam A uma álgebra, I um ideal de A e $\pi : A \to A/I$ a aplicação canônica de espaços vetoriais. Então:*

(i) Existe uma única estrutura de álgebra em A/I tal que π é um morfismo de álgebras.

(ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras tal que $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras $\bar{f} : A/I \to B$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

Demonstração: (i) Basta notar que pelo lema 1 e pelo fato de I ser um ideal de A, temos que $\mu(ker(\pi\otimes\pi)) = \mu(I\otimes A + A\otimes I) \subseteq I$. Logo, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais (vide [2]), existe uma única aplicação linear $\overline{\mu} : A/I\otimes A/I \to A/I$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\pi\circ\mu"] & A/I\otimes A/I \arrow[d, "\overline{\mu}"] \\ A \arrow[r, "\pi"'] & A/I \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Dessa forma, $\overline{\mu}$ é tal que $\overline{\mu}(\overline{a}\otimes\overline{b}) = \pi(\mu(a\otimes b)) = \overline{ab}$, $\forall \overline{a},\overline{b} \in A/I\otimes A/I$, em que $\overline{a} = a+I = \pi(a)$, $\forall a\in A$. Logo,

$$\begin{aligned} (\overline{\mu}\circ(id\otimes\overline{\mu}))(\overline{a}\otimes\overline{b}\otimes\overline{c}) &= \overline{\mu}(\overline{a}\otimes\overline{(bc)}) = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{\mu}(\overline{(ab)}\otimes\overline{c}) \\ &= (\overline{\mu}\circ(\overline{\mu}\otimes id))(\overline{a}\otimes\overline{b}\otimes\overline{c}), \quad \forall \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in A/I. \end{aligned}$$

De maneira análoga, existe uma única função linear $\overline{\eta} : k \to A/I$ tal que $\pi\circ\eta = \overline{\eta}$. Então, para qualquer $\overline{a}\in A/I$ temos que

$$\begin{aligned} (\overline{\mu}\circ(id\otimes\overline{\eta})\circ\psi)(\overline{a}) &= \overline{\mu}(\overline{a}\otimes\overline{\eta}(1_k)) = \overline{\mu}(\overline{a}\otimes\overline{\eta(1_k)}) \\ &= \pi(\mu(a\otimes\eta(1_k))) = \pi(a) = \overline{a}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $(\overline{\mu}\circ(\overline{\eta}\otimes id)\circ\varphi)(\overline{a}) = \overline{a}$. Logo, $(A/I,\overline{\mu},\overline{\eta})$ satisfaz a Definição 2 e portanto é uma álgebra. Que π é um morfismo de álgebras segue direto do diagrama 1.3.

(ii) Como $I\subseteq ker(f)$, novamente pelo teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais (vide [2]), existe uma única aplicação linear $\overline{f} : A/I \to B$ tal que $\overline{f}\circ\pi = f$. Como f é morfismo de álgebras, para quaisquer $\overline{a},\overline{b}\in A/I$, temos

$$\begin{aligned} (\overline{f}\circ\overline{\mu})(\overline{a}\otimes\overline{b}) &= \overline{f}(\pi(\mu(a\otimes b)) = f(ab) = f(\mu_A(a\otimes b)) \\ &= (f\circ\mu_A)(a\otimes b) = (\mu_B\circ(f\otimes f)) = (a\otimes b) \\ &= \mu_B(f(a)\otimes f(b)) = \mu_B(\overline{f}(\overline{a})\otimes\overline{f}(\overline{b})) = (\mu_B\circ(\overline{f}\otimes\overline{f})(\overline{a}\otimes\overline{b}) \end{aligned}$$

e, para todo $\alpha\in k$ temos

$$(\overline{f}\circ\overline{\eta})(\alpha) = \overline{f}(\pi(\eta_A(\alpha))) = f(\eta_A(\alpha)) = \eta_B(\alpha).$$

Portanto, $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras.

■

Corolário 1. *Sejam A e B álgebras e $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então $\overline{f} : A/ker(f) \to Im(f)$ é um isomorfismo.*

$\square$

Definição 7. *Seja X um conjunto. Uma álgebra livre é um par $(\mathfrak{L}, \kappa)$ em que $\mathfrak{L}$ é uma álgebra e $\kappa : X \to \mathfrak{L}$ uma função tal que para qualquer álgebra A e $f : X \to A$ função, existe uma único morfismo de álgebras $\bar{f} : \mathfrak{L} \to A$ tal que $\bar{f} \circ \kappa = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{L} \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ X \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Teorema 4. *Para todo conjunto X, existe uma álgebra livre como na Definição 7 e ela é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Seja X um conjunto qualquer. Definimos uma palavra de tamanho n em X como sendo uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$. A fim de facilitar nossa escrita simplesmente denotamos uma palavra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $x_1x_2x_3\ldots x_n$. Definimos agora o que chamamos de concatenação (denotada por $\cdot$) de duas palavras $x_1x_2\ldots x_n$ e $y_1y_2\ldots y_m$ como sendo a nova palavra $x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m$ de tamanho $n+m$, ou seja,

$$(x_1x_2\ldots x_n) \cdot (y_1y_2\ldots y_m) = x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m.$$

Também levamos em consideração $n = 0$ e neste caso a palavra será a palavra vazia e a denotamos por $\bar{\emptyset}$, onde na concatenação por uma palavra qualquer temos

$$(x_1x_2\ldots x_n) \cdot \bar{\emptyset} = \bar{\emptyset} \cdot (x_1x_2\ldots x_n) = x_1x_2\ldots x_n.$$

Denotemos por $k\{X\}$ o espaço vetorial gerado por todas as palavras. Para cada palavra $x_1\ldots x_n$ podemos definir uma transformação linear $\mu_{x_1\ldots x_n} : k\{X\} \to k\{X\}$ que nos elementos da base é dada exatamente pela concatenação, ou seja,

$$\mu_{x_1\ldots x_n}(y_1\ldots y_m) = (x_1\ldots x_n) \cdot (y_1\ldots y_m) = x_1x_2\ldots x_ny_1y_2\ldots y_m.$$

Seja $\bar{\mu} : k\{X\} \to \mathscr{L}(k\{X\}, k\{X\})$ dada por $\bar{\mu}(x_1\ldots x_n) = \mu_{x_1\ldots x_n}$, em que $\mathscr{L}(k\{X\}, k\{X\}) = \{T : k\{X\} \to k\{X\} : T \text{ é transformação linear}\}$.

Definimos a multiplicação em $k\{X\}$ como sendo $\mu : k\{X\} \times k\{X\} \to k\{X\}$ dada por $\mu(x,y) =$

$\bar{\mu}(x)(y)$ para cada $x, y \in k\{X\}$. Notemos que a multiplicação é bilinear e associativa por construção, uma vez que a concatenação é associativa, e além disso temos que a palavra vazia representa a unidade relativa a esta multiplicação. Portanto, fica claro que temos $i : X \to k\{X\}$ inclusão canônica.

$\vdash$ $(k\{X\}, i)$ satisfaz a definição 7 e é única a menos de isomorfismo.

De fato, sejam A uma álgebra e $f : X \to A$ uma função. Definimos $\bar{f} : k\{X\} \to A$ sobre as palavras por $\bar{f}(x_1 \ldots x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n)$, onde no lado direito da igualdade estamos considerando o produto na álgebra A e definimos ainda $\bar{f}(\bar{\emptyset}) = 1_A$. Para finalizarmos, estendemos linearmente $\bar{f}$ à $k\{X\}$ e fica claro que $\bar{f} \circ i = f$. Logo $(k\{X\}, i)$ é uma álgebra livre. Vamos mostrar que $\bar{f}$ é única. Suponhamos que exista $g : k\{X\} \to A$ morfismo de álgebras tal que $g \circ i = f$, então

$$g(x_1 \ldots x_n) = g(x_1) \ldots g(x_n) = (g \circ i)(x_1) \ldots (g \circ i)(x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n) = \bar{f}(x_1 \ldots x_n).$$

Logo, $\bar{f} = g$.

Para mostrarmos a unicidade da álgebra livre, seja $(\mathscr{M}, h)$ como na definição 7. Então por um lado temos $\bar{i} \circ h = i$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{M} \arrow[d, dashed, "\bar{i}"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "i"'] & k\{X\}. \end{tikzcd}$$

Por outro lado temos $\bar{h} \circ i = h$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & k\{X\} \arrow[d, dashed, "\bar{h}"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "h"'] & \mathscr{M}. \end{tikzcd}$$

Notemos que $\bar{h} \circ i = h$ e $\bar{i} \circ h = i$ implicam em $(\bar{h} \circ \bar{i}) \circ h = h$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutando

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{M} \arrow[d, dashed, "\bar{h}\circ\bar{i}"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "h"'] & \mathscr{M}. \end{tikzcd}$$

Mas este diagrama também comuta com a função identidade $I_{\mathscr{M}}$. Logo pela unicidade das funções, $\bar{h}\, circ\bar{i} = I_{\mathscr{M}}$. Analogamente mostra-se que $\bar{i} \circ \bar{h} = I_{k\{X\}}$. $\dashv$

■

Teorema 5. *Seja A uma álgebra. Então A é o quociente de uma álgebra livre.*

Demonstração:

Consideramos a álgebra livre $k\{A\}$ e a função identidade $id : A \to A$. Usando a propriedade universal da álgebra livre, obtemos um morfismo de álgebras $\bar{id} : k\{A\} \to A$. De modo que $I = Ker(\bar{id})$ é um ideal de $k\{A\}$. Pelo Corolário 1 obtemos que $A \cong k\{A\}/I$.

■

Exemplo 6 (Álgebra Tensorial)**.** *Seja V um espaço vetorial, definimos a álgebra tensorial* $T(V) = \oplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$*, em que* $V^{\otimes 0} = k$*,* $\quad V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n\ vezes}$*,* $\forall n \geq 1$*, e se* $x = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ *e* $y = v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r \in V^{\otimes r}$ *então definimos o produto xy por:*

$$xy = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r \in V^{\otimes n+r}$$

sendo $1_k \in k$ *a unidade da álgebra* $T(V)$*.*

Observe que pela maneira como definimos $T(V)$, não é difícil ver que $T(V)$ é a álgebra livre gerada por todas as palavras construídas com os elementos da base de V. Com isso, notemos que a álgebra tensorial $T(V)$ possui caráter universal, isto é, para toda $f : V \to A$, em que A é uma álgebra, existe um único morfismo de álgebras $\bar{f} : T(V) \to A$ tal que $f = \bar{f} \circ i$, sendo $i : V \to T(V)$ a inclusão canônica.

Exemplo 7 (Álgebra Simétrica)**.** *Seja V um espaço vetorial e defina* $S(V) = T(V)/I$*, em que* $I = < x \otimes y - y \otimes x >$*.*

$S(V)$ *é uma álgebra comutativa. De fato, o quociente indica que* $x \otimes y = y \otimes x$*, segue disto que*

$$x_1 \otimes \ldots x_n \otimes x_{n+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+m} = x_{n+m} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \otimes x_n \otimes \ldots \otimes x_1,$$

em que as trocas são feitas entre vizinhanças sucessivas vezes.

Definição 8. *Um par* $(\mathfrak{g}, [,])$*, em que* $\mathfrak{g}$ *é um espaço vetorial e* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *é uma aplicação bilinear chamada comutador ou colchete de Lie, é dito uma álgebra de Lie se* $[,]$ *satisfaz:*

(i) $[x,x] = 0$*,* $\forall x \in \mathfrak{g}$ *(anti-simetria);*

(ii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$**,** $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}$ *(identidade de Jacobi).*

Além do mais, se $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *são álgebras de Lie, então uma aplicação linear* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é dita ser um homomorfismo de álgebras de Lie se* $[f(x), f(y)] = f([x,y])$ $\forall x,y \in \mathfrak{g}$*.*

Exemplo 8. *Se A é uma álgebra então é fácil ver que o comutador dado por $[x,y] = xy - yx$ dá uma estrutura de álgebra de Lie para A.*

Exemplo 9 (Álgebra envolvente universal)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, iremos construir uma álgebra na qual $\mathfrak{g}$ está imersa e cujo comutador de $\mathfrak{g}$ é dado pelo comutador da álgebra. Seja $T(\mathfrak{g})$ a álgebra tensorial relativa ao espaço vetorial $\mathfrak{g}$ e considere o ideal $I(\mathfrak{g}) \subseteq T(\mathfrak{g})$ gerado por expressões do tipo $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$. A álgebra quociente $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ (vide Proposição 3), denominada álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$, é a nossa álgebra procurada.*

Para ver que existe uma injeção de $\mathfrak{g}$ em $U(\mathfrak{g})$ basta notar que a intersecção do núcleo da projeção de $T(\mathfrak{g})$ em $U(\mathfrak{g})$, que coincide com $I(\mathfrak{g})$, com a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes 1}$ é apenas o zero. De fato, seja $\{e_i\}_{i\in\Omega}$ uma base de $\mathfrak{g}$ em que Ω é um conjunto de índices totalmente ordenados. Note que um elemento $c \in I(\mathfrak{g})$ pode ser escrito como uma soma finita da forma $c = \sum_{i<j\in\Omega} a_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j - [e_j, e_i]) \otimes b_{ij}$, em que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathfrak{g}$. Como $\{e_i\}_{i\in\Omega}$ é uma base para $\mathfrak{g}$, temos que $c = \sum_{i<j\in\Omega} a_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j) \otimes b_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ij} = 0$ ou $b_{ij} = 0$ para todo par (i, j), mas neste caso temos que $c = 0$. Portanto, supondo $c \neq 0$, temos que c sempre possui um somando da forma $x_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j)$ ou da forma $(e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j) \otimes y_{ij}$, portanto $c \notin \mathfrak{g}$.

Além do mais, é conhecido que a álgebra envolvente universal tem a propriedade universal de que se $\kappa : \mathfrak{g} \to A$ é uma aplicação linear numa álgebra A tal que $\kappa([x,y]) = \kappa(x)\kappa(y) - \kappa(y)\kappa(x) =$ então existe um único morfismo de álgebras $\bar{\kappa} : U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\bar{\kappa}|_{\mathfrak{g}} = \kappa$. Isto é verificado utilizando-se a propriedade universal da álgebra livre.

1.1.2 Coálgebras

Uma das importâncias da Definição 2 é que em sua natureza categórica, esta definição pode ser dualizada, que será o nosso próximo campo de estudos, as Coálgebras.

Definição 9. *Uma k-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε), em que C é um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C \arrow[ur, "\varphi^{-1}"] & & C \otimes k \arrow[ul, "\psi^{-1}"'] \\
 & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

As aplicações Δ e ε são chamadas comultiplicação e counidade da coálgebra C, respectivamente. Os isomorfismos canônicos φ^{-1} e ψ^{-1} são dados por $\varphi^{-1}(\alpha \otimes c) = \alpha c$ e $\psi^{-1}(c \otimes \alpha) = c\alpha$. A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada coassociatividade e nos fornece

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{1.4}$$

Já a comutatividade do segundo diagrama é chamada axioma da counidade e nos fornece

$$\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = \psi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta \tag{1.5}$$

A partir deste ponto, sempre que nos referirmos a uma k-coálgebra (C, Δ, ε) omitiremos o corpo k e as aplicações estruturais Δ e ε. Simplesmente diremos a coálgebra C.

Vale observar que Δ é injetora, pois se $c \in Ker(\Delta)$, temos que $\Delta(c) = 0$. Mas $a = \Psi^{-1}((I \otimes \varepsilon)(\Delta(a))) = 0$.

Exemplo 10. *Sejam X um conjunto não-vazio e kX o k-espaço vetorial com base X. Então kX é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por $\Delta(x) = x \otimes x$ e $\varepsilon(x) = 1$, para qualquer $x \in X$ e estendidas por linearidade.*

Exemplo 11 (Coálgebra da potência dividida)**.** *Seja C um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então C é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}$ e $\varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$, em que $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker. Vamos mostrar que C é uma coálgebra.*

Notemos que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

ou ainda que $\Delta(c_m) = \displaystyle\sum_{i+j=m} c_i \otimes c_j$.

Vamos verificar a coassociatividade

$$\begin{aligned}
(\Delta\otimes I)\Delta(c_m) &= (\Delta\otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i\otimes c_{m-i})\\
&= \sum_{i=0}^{m}\Delta(c_i)\otimes c_{m-i}\\
&= \sum_{i+j=m}(\sum_{k+l=i} c_k\otimes c_l)\otimes c_j\\
&= \sum_{k+l+j=m} c_k\otimes c_l\otimes c_j\\
&= \sum_{k+i=m} c_k\otimes(\sum_{l+j=i} c_l\otimes c_j)\\
&= \sum_{k+i=m} c_k\otimes\Delta(c_i)\\
&= (I\otimes\Delta)(\sum_{k+i=m} c_k\otimes c_i)\\
&= (I\otimes\Delta)(\Delta(c_m)).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Delta\otimes I)\circ\Delta = (I\otimes\Delta)\circ\Delta$*. Mostremos a comutatividade do segundo diagrama. Para* $m\in\mathbb{N}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)\Delta(c_m) &= \varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i\otimes c_{m-i}) = \varphi^{-1}(\sum_{i=0}^{m}\varepsilon(c_i)\otimes c_{m-i})\\
&= \sum_{i=0}^{m}\varepsilon(c_i)c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m}\delta_{0,i}c_{m-i} = c_m.
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se a outra igualdade. Logo, C é uma coálgebra. Esta coálgebra é chamada coálgebra da potência dividida.

Exemplo 12. *No exemplo 4 vimos que kG é uma álgebra, daremos agora uma estrutura de coálgebra em kG. É fácil ver que* $\{g\}_{g\in G}\subset kG$ *é uma base para kG. Definimos então*

$$\begin{aligned}
\Delta : kG &\longrightarrow kG\otimes kG\\
g &\longmapsto g\otimes g
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon : kG &\longrightarrow k\\
g &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

É fácil ver que (kG,Δ,ε) *é uma coálgebra.*

Exemplo 13. *Sejam* $n\geq 1$ *inteiro e* $M^c(n,k)$ *um k-espaço vetorial de dimensão* n^2*. Denotamos* *por $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$ e definimos em $M^c(n,k)$ uma comultiplicação $\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}$ e uma counidade $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$. Desta maneira, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra, chamada coálgebra de matrizes. De fato, temos que*

$$\begin{aligned}((I\otimes\Delta)\circ\Delta)(e_{ij}) &= (I\otimes\Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\Delta(e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\sum_{q=1}^{n} e_{pq}\otimes e_{qj} = \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes I)\Delta(e_{ij}) &= (\Delta\otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}) = \sum_{p=1}^{n} \Delta(e_{ip})\otimes e_{pj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{iq}\otimes e_{qp}\otimes e_{pj} = \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Mostremos que $\varphi^{-1}\circ(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta = I_{M^c(n,k)}$. De fato,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)\Delta(e_{ij}) &= \varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}) = \varphi^{-1}(\sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip})\otimes e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip})e_{pj} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{i,p}e_{pj}\\ &= e_{ij}.\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se a outra igualdade e portanto $M^c(n,k)$ é uma coálgebra.

Seja (C,Δ,ε) uma coálgebra. Definimos a sequência de transformações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$, da seguinte maneira

$$\Delta_1 = \Delta, \quad \Delta_n : C \to \underbrace{C\otimes\ldots\otimes C}_{n+1\text{vezes}}$$

onde

$$\Delta_n = (\Delta\otimes I^{n-1})\circ\Delta_{n-1} \text{ , para qualquer } n\geq 2.$$

Aqui, I^n denota a função identidade em $\underbrace{C\otimes\ldots\otimes C}_{n\text{vezes}}$.

Definição 10. *Seja C uma coálgebra. A coálgebra co-oposta é definida por $C^{cop} = C$ a mesma counidade de C e a comultiplicação dada por $\Delta' = \tau\circ\Delta$.*

Observação 6 (Notação de Sweedler)**.** Sejam C uma coálgebra e $c\in C$. Na *notação de Sweedler* para Δ denotamos o elemento $\Delta(c)$ por $\sum_c c_1\otimes c_2$, evitando assim a notação usual, onde deveríamos ter escrito $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i\otimes d_i$. A notação de Sweedler omite o índice i, facilitando assim muitas manipulações algébricas envolvendo a expansão no Δ.

Notemos que na notação de Sweedler temos

$$((\Delta\otimes I)\circ\Delta)(c) = (\Delta\otimes I)\left(\sum_c c_1\otimes c_2\right) = \sum_c\sum_{c_1} c_{1_1}\otimes c_{1_2}\otimes c_2$$

$$((I\otimes\Delta)\circ\Delta)(c) = (I\otimes\Delta)\left(\sum_c c_1\otimes c_2\right) = \sum_c\sum_{c_2} c_1\otimes c_{2_1}\otimes c_{2_2}$$

Usando 1.4 temos

$$\sum_c\sum_{c_1} c_{1_1}\otimes c_{1_2}\otimes c_2 = \sum_c\sum_{c_2} c_1\otimes c_{2_1}\otimes c_{2_2} \tag{1.6}$$

Este elemento é denotado por

$$\Delta_2(c) = \sum_c c_1\otimes c_2\otimes c_3. \tag{1.7}$$

E, usando 1.5, obtemos

$$\sum_c \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum_c c_1\varepsilon(c_2) \tag{1.8}$$

Em um caminho similar, para qualquer $n\geq 1$, escrevemos $\Delta_n(c) = \sum_c c_1\otimes\ldots\otimes c_{n+1}$.

Para maiores detalhes sobre a notação de sweedler ver [1].

Exemplo 14. *Seja G um grupo. Considere $\mathscr{F}(G)$ a álgebra das funções como no Exemplo 2. Vamos mostrar que existe uma aplicação injetiva de $\mathscr{F}(G)\otimes\mathscr{F}(G)$ em $\mathscr{F}(G\times G)$ (como espaços vetoriais). Para isso, defina $\bar{\phi}:\mathscr{F}(G)\times\mathscr{F}(G)\to\mathscr{F}(G\times G)$ dada por $\bar{\phi}(f,g)(x,y) = f(x)f(y)$ para todos $x,y\in G$. É fácil ver que $\bar{\phi}$ é bilinear e portanto pela propriedade universal do produto tensorial existe uma única função linear*

$$\phi:\mathscr{F}(G)\otimes\mathscr{F}(G)\to\mathscr{F}(G\times G)$$

tal que $\phi(f\otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$. Agora, para cada $x\in G$ construímos a função

$$Ev_x:\mathscr{F}(G\times G)\to\mathscr{F}(G)$$

dada por $Ev_x(F)(y) = F(x,y)$ para todo $y\in G$ e para toda $F\in\mathscr{F}(G\times G)$. Logo, para $\sum_i f_i\otimes g_i\in Ker(\phi)$, com $\{g_i\}$ L.I., temos que

$$0 = Ev_x(\phi(\sum_i f_i\otimes g_i)) = \sum_i f_i(x)g_i.$$

Como $\{g_i\}$ é L.I., segue que $f_i(x) = 0$, $\forall i$ e para todo $x \in G$. Assim, $\sum_i f_i \otimes g_i = 0$, e portanto ϕ é injetora.

Observe que no caso de G ser finito, então é facilmente verificado que $\{P_x\}_{x \in G}$ dada por $P_x(y) = \delta_{x,y}$ é uma base de $\mathscr{F}(G)$ e portanto $dim(\mathscr{F}(G)) = |G|$. Consequentemente $dim(\mathscr{F}(G) \otimes \mathscr{F}(G)) = |G|^2$. Uma vez que $\{P_{x,y}\}_{x,y \in G}$ dados por $P_{x,y}(v,w) = \delta_{x,v}\delta_{y,w}$, é uma base para $\mathscr{F}(G \times G)$, segue que $dim(\mathscr{F}(G \times G)) = |G|^2$. Portanto $dim(\mathscr{F}(G \times G)) = dim(\mathscr{F}(G) \otimes \mathscr{F}(G))$, e como ϕ é linear e injetiva segue que $\mathscr{F}(G) \otimes \mathscr{F}(G) \cong \mathscr{F}(G \times G)$.

Com isso, podemos dar uma estrutura de coálgebra para $\mathscr{F}(G)$ identificando o coproduto $\Delta(f) \in \mathscr{F}(G) \otimes \mathscr{F}(G)$ como sendo um elemento de $\mathscr{F}(G \times G)$. Ou seja, definimos

$$\Delta : \mathscr{F}(G) \to \mathscr{F}(G) \otimes \mathscr{F}(G) \quad \textit{dada por} \quad \Delta(f)(x,y) = f(xy)$$

e

$$\varepsilon : \mathscr{F}(G) \to k \quad \textit{dada por} \quad \varepsilon(f) = f(e),$$

em que e é a unidade do grupo G. Então, facilmente verifica-se que $(\mathscr{F}(G), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Exemplo 15. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, construímos no Exemplo 9 uma álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$. Defina*

$$\widehat{\Delta} : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \quad \textit{dada por} \quad \widehat{\Delta}(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

que, por propriedades do produto tensorial é claramente linear. Agora, para $x, y \in \mathfrak{g}$ temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}([x,y]) &= \widehat{\Delta}(xy - yx) \\
&= \widehat{\Delta}(xy) - \widehat{\Delta}(yx) \\
&= xy \otimes 1 + 1 \otimes xy - yx \otimes 1 - 1 \otimes yx \\
&= (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx) \\
&= xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy + \\
&\quad -yx \otimes 1 - y \otimes x - x \otimes y - 1 \otimes yx \\
&= \widehat{\Delta}(x)\widehat{\Delta}(y) - \widehat{\Delta}(y)\widehat{\Delta}(x) \\
&= [\widehat{\Delta}(x), \widehat{\Delta}(y)].
\end{aligned}$$

Dessa forma, pela universalidade de $U(\mathfrak{g})$, existe um único homomorfismo de álgebras $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ tal que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Definimos $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ dado por $\varepsilon(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $\varepsilon(1) = 1_k$. É fácil verificar que $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Exemplo 16. *Dadas duas coálgebras C e D, a coálgebra produto tensorial $C \otimes D$ tem como comultiplicação $\Delta_{C\otimes D} = (I \otimes \tau \otimes I) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e counidade $\varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$. As verificações são pura manipulção algébricas e são desenvolvidas facilmente.(vide [1])*

Proposição 2. *Seja C uma coálgebra, suponha que $\varepsilon_1 : C \to k$ é uma counidade para C e que $\varepsilon_2 : C \to k$ também é uma counidade para C. Então $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.*

Demonstração: Seja $c \in C$. Como ε_1 e ε_2 são counidades para a coágebra C, usando a equação 1.8 temos que $c = \sum_c c_1 \varepsilon_1(c_2)$ e também $c = \sum_c \varepsilon_2(c_1)c_2$. Aplicando ε_1 em c, sendo ε_1 e ε_2 lineares, obtemos

$$\varepsilon_1(c) = \varepsilon_1\left(\sum_c \varepsilon_2(c_1)c_2\right) = \sum_c \varepsilon_2(c_1)\varepsilon_1(c_2) = \varepsilon_2\left(\sum_c c_1\varepsilon_1(c_2)\right) = \varepsilon_2(c) \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

■

Definição 11. *Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que, para todo $c \in C$, $\Delta(c) = \sum_c c_1 \otimes c_2 = (\tau \circ \Delta)(c) = \sum_c c_2 \otimes c_1$.

Definição 12. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Uma função k-linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser reescrita como

$$\Delta_D(f(c)) = \sum_{f(c)} f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum_c f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)(\Delta(c)), \forall c \in C. \qquad (1.9)$$

Já a comutatividade do segundo diagrama pode ser reescrita como

$$(\varepsilon_D \circ f)(c) = \varepsilon_C(c). \qquad (1.10)$$

Definição 13. *Seja C uma coálgebra. Um k-subespaço $D \subseteq C$ é dito uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

É claro que se D é uma subcoálgebra, então $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ é uma coálgebra.

Exemplo 17. *Seja $\{C_i\}_{i\in I}$ uma família de subcoálgebras de uma coálgebra C, então $\sum_{i\in I} C_i$ é uma subcoálgebra de C.*
De fato, pois

$$\Delta\left(\sum_{i\in I} C_i\right) = \sum_{i\in I} \Delta(C_i) \subseteq \sum_{i\in I} (C_i \otimes C_i) = \sum_{i\in I} C_i \otimes \sum_{i\in I} C_i.$$

Definição 14. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra e I um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de C. Dizemos I*

i) é um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (respectivamente $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$);

ii) é um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$.

Diferentemente do que ocorre com ideais em uma álgebra, se I for um coideal de uma coálgebra C, então não necessariamente I será um coideal à esquerda e à direita. O próximo exemplo ilustra esta situação.

Exemplo 18. *Considerando o anel de polinômios $k[X]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por*

$$\Delta(X^n) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n, \quad \varepsilon(X^n) = 0 \textit{ para } n \geq 1$$
$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad \textit{e} \quad \varepsilon(1) = 1.$$

Seja $I = kX$ o k-subespaço de $k[X]$ gerado por X. Temos que $\Delta(I) = I \otimes 1 + 1 \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$ e isto nos diz que I é um coideal, mas I não é coideal à direita e nem à esquerda.

Sendo V e W dois k-espaços vetoriais, e $X \subseteq V$, $Y \subseteq W$ subespaços vetoriais. Então $(V \otimes Y) \cap (X \otimes W) = X \otimes Y$.(vide [1] pg. 24).

Observação 7. *Seja C uma coálgebra. Então todo coideal à esquerda e à direita é uma subcoálgebra. De fato, seja I um coideal à esquerda e à direita de C. Então $\Delta(I) \subseteq (C \otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I$.*

Proposição 3. *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então:*

i) $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D;

ii) $Ker(f)$ é um coideal de C.

Demonstração:

i) Como f é morfismo de coálgebras, então $(f\otimes f)\circ\Delta_C=\Delta_D\circ f$, ou seja, temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D\otimes D. \end{tikzcd}$$

Logo, $\Delta_D(Imf)=\Delta_D(f(C))=(\Delta_D\circ f)(C)=((f\otimes f)\circ\Delta_C)(C)\subseteq(f\otimes f)(C\otimes C)=f(C)\otimes f(C)=Imf\otimes Imf$, ou seja, $\Delta_D(Imf)\subseteq Imf\otimes Imf$. Assim, Imf é uma subcoálgebra de D.

ii) Mostremos agora que $Kerf$ é um coideal de C. É claro que $(\Delta_D\circ f)(Kerf)=0$. Como f é morfismo de coálgebras, $((f\otimes f)\circ\Delta_C)(Kerf)=0$. Logo,

$$\Delta_C(Kerf)\subseteq Ker(f\otimes f)=Kerf\otimes C+C\otimes Kerf.$$

A última igualdade segue do Lema 1. Como $\varepsilon_C=\varepsilon_D\circ f$, pois f é morfismo de coálgebras, segue que $\varepsilon_C(Kerf)=(\varepsilon_D\circ f)(Kerf)=0$. Portanto, $Kerf$ é um coideal de C.

■

Teorema 8. *Sejam C uma coálgebra, I um coideal e $\pi:C\to C/I$ a aplicação canônica de espaços vetoriais. Então*

i) Existe uma única estrutura de coálgebra em C/I tal que π é um morfismo de coálgebras;

ii) Se $f:C\to D$ é um morfismo de coálgebras com $I\subseteq Ker(f)$ então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f}:C/I\to D$ tal que $f=\bar{f}\circ\pi$.

Demonstração:

i) Como I é um coideal, $((\pi\otimes\pi)\circ\Delta)(I)\subseteq(\pi\otimes\pi)(I\otimes C+C\otimes I)=0$. Logo, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetorias, existe uma única função k-linear $\bar{\Delta}:C/I\to C/I\otimes C/I$ tal que $\bar{\Delta}\circ\pi=(\pi\otimes\pi)\circ\Delta$, ou seja,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, dashed, "\bar{\Delta}"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\pi\otimes\pi"'] & C/I\otimes C/I \end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo. Temos que $\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum_c \bar{c_1} \otimes \bar{c_2}$, em que $\bar{c} = \pi(c)$. É fácil ver que

$$((\bar{\Delta} \otimes I) \circ \bar{\Delta})(\bar{c}) = ((I \otimes \bar{\Delta}) \circ \bar{\Delta})(\bar{c}) = \sum_c \bar{c_1} \otimes \bar{c_2} \otimes \bar{c_3}.$$

Portanto, $\bar{\Delta}$ é coassociativa. Além disso, como $\varepsilon(I) = 0$, pelo teorema do homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{\varepsilon} : C/I \to k$ tal que $\bar{\varepsilon} \circ \pi = \varepsilon$, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C/I \arrow[dl, dashed, "\bar{\varepsilon}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comuta. Temos que $\bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$, para qualquer $c \in C$. Logo,

$$\sum_c \bar{\varepsilon}(\bar{c_1})\bar{c_2} = \sum_c \varepsilon(c_1)\bar{c_2} = \sum_c \varepsilon(c_1)\pi(c_2) = \pi\left(\sum_c \varepsilon(c_1)c_2\right) = \pi(c) = \bar{c}.$$

Analogamente, $\sum \bar{c_1}\bar{\varepsilon}(\bar{c_2}) = \bar{c}$. Portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra. A comutatividade dos diagramas acima mostram também que $\pi : C \to C/I$ é um morfismo de coálgebras.

ii) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras tal que $I \subseteq Kerf$, pelo teorema do homorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$, ou seja, $\bar{f}(\bar{c}) = f(c)$, para qualquer $c \in C$. Assim,

$$\begin{aligned} (\Delta_D \circ \bar{f})(\bar{c}) &= \Delta_D(\bar{f}(\bar{c})) = \Delta_D(f(c)) = (\Delta_D \circ f)(c) \overset{(*)}{=} ((f \otimes f) \circ \Delta_C)(c) \\ &= (f \otimes f)\left(\sum_c c_1 \otimes c_2\right) = \sum_c f(c_1) \otimes f(c_2) \\ &= \sum_c \bar{f}(\bar{c_1}) \otimes \bar{f}(\bar{c_2}) = (\bar{f} \otimes \bar{f})\left(\sum_c \bar{c_1} \otimes \bar{c_2}\right) \\ &= (\bar{f} \otimes \bar{f})(\bar{\Delta}(\bar{c})) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_D \bar{f}(\bar{c}) = \varepsilon_D(f(c)) \overset{(**)}{=} \varepsilon_C(c) = \bar{\varepsilon}(\bar{c}),$$

as igualdades $(*)$ e $(**)$ seguem do fato de que f é morfismo de coálgebras. Logo, $\bar{f}$ é morfismo de coálgebras.

■

1.2 A álgebra e a coálgebra dual

Para esta seção as principais referências foram [1] e [3].

A construção do espaço dual de um espaço vetorial nos permite construir álgebras induzidas por coálgebras e vice-versa.

Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra, considere o k-espaço vetorial $Hom_k(C,A)$ de todas as transformações lineares de C para A. Nosso objetivo agora é fornecer uma estrutura de álgebra para $Hom_k(C,A)$.

Proposição 4. *Sendo C e A como acima, $Hom_k(C,A)$ é uma álgebra com o produto de convolução definido por*

$$(f*g)(c) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = \sum_c f(c_1)g(c_2) \quad \forall f,g \in Hom_k(C,A) \text{ e } c \in C \tag{1.11}$$

e com unidade dada $\eta \circ \varepsilon$.

Demonstração: É claro que $f*g \in Hom_k(C,A)$, pois é composição de funções lineares com contradomínio em A. Mostremos que o produto de convolução é associativo, sejam $c \in C$ e $f,g,h \in Hom_k(C,A)$, então

$$\begin{aligned}
((f*g)*h)(c) &= \sum_c (f*g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum_c \left(\sum_{c_1} f(c_{1_1})g(c_{1_2}) \right) h(c_2) \\
&= \sum_c (f(c_1)g(c_2))h(c_3) \\
&= \sum_c f(c_1)(g(c_2)h(c_3)) \\
&= \sum_c f(c_1) \left(\sum_{c_2} g(c_{2_1})h(c_{2_1}) \right) \\
&= \sum_c f(c_1)(g*h)(c_2) \\
&= (f*(g*h))(c).
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
(f*(\eta \circ \varepsilon))(c) &= \sum_c f(c_1)\eta(\varepsilon(c_2)) \\
&= \sum_c \sum_c f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A \\
&= \sum_c f(c_1\varepsilon(c_2))1_A \\
&= f\left(\sum_c c_1\varepsilon(c_2) \right) 1_A \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Analogamente temos que $((\eta \circ \varepsilon) * f)(c) = f(c)$. Com isso, $Hom_k(C,A)$ se torna um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial. A relação de compatibilidade entre a estrutura de espaço vetorial e o produto de convolução é facilmente verificada. Logo, $Hom_k(C,A)$ satisfaz a Definição 1 e portanto é uma álgebra.

$\blacksquare$

Quando $A = k$, obtemos o espaço dual de C que será denotado por $C^* = Hom_k(C,k)$. Sendo k uma álgebra, temos o seguinte corolário.

Corolário 2. *O espaço dual C^* de uma coálgebra C é uma álgebra com a multiplicação dada por 1.11.*

$\square$

Dado um k-espaço vetorial V, seja $V^* = Hom(V,k)$ o espaço dual de V. É conhecido que os espaços V e V^* determinam uma aplicação bilinear não degenerada $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to k$ dada por $\langle f,v \rangle = f(v)$.

Sejam V, W k-espaços vetoriais e $\phi : V \to W$ uma aplicação k-linear. Então a *transposta* de ϕ ou a transformação dual induzida é a aplicação linear $\phi^* : W^* \to V^*$ definida por $\langle \phi^*(f), v \rangle = \langle f, \phi(v) \rangle = f(\phi(v))$, $\forall f \in W^*$ e $\forall v \in V$.

Sabemos que como k-espaços vetoriais, $k \cong k^*$ via o isomorfismo $\xi : k \to k^*$ dado por $\langle \xi(\alpha), \beta \rangle = \alpha\beta$, para todo $\alpha, \beta \in k$. Sua inversa $\xi^{-1} : k^* \to k$ é dada por $\xi^{-1}(f) = \langle f, 1 \rangle$.

Em tempo, podemos ainda considerar $V^* \otimes V^*$ como um subespaço de $(V \otimes V)^*$ via o seguinte lema que será apenas enunciado, e que se encontra demonstrado em ([1], pgs. 16 e 17).

Lema 2. *Seja V um k-espaço vetorial. Então $\iota : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$ dada por $(\iota(f \otimes g))(v \otimes w) = f(v)g(w)$ para quaisquer $f, g \in V^*$ e $v, w \in V$ é uma aplicação injetora. Além do mais, ι é um isomorfismo se V possuir dimensão finita.*

$\square$

E como corolário, que também encontra-se em ([1], pg. 16 e 17), temos:

Corolário 3. *Sejam $M_1, \ldots, M_n$ k-espaços vetoriais. Então a aplicação $\theta : M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)^*$ definida por $(\theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n))(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f_1(m_1) \ldots f_n(m_n)$ é injetora. Além disso, se todos os espaços M_i são de dimensão finita, então θ é um isomorfismo.*

□

Portanto, com estas notações, a multiplicação na coálgebra dual C^* torna-se $\Delta^* \circ \iota$ e a unidade torna-se $\varepsilon^* \circ \xi$.

Exemplo 19. Consideremos C a coálgebra vista no Exemplo 11. A álgebra dual C^* tem multiplicação definida por $(f * g)(c_n) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i})$ e a unidade $\eta : k \to C^*, \eta(\alpha)(c_n) = \alpha\delta_{0,n}$, para quaisquer $f, g \in C^*, \alpha \in k$ e $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que

$$\phi : C^* \to k[[X]],\ \phi(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(c_n)X^n$$

é um isomorfismo de álgebras, em que $k[[X]]$ é a álgebra das séries de potência formais.

Claramente, ϕ é bijetora e k-linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \phi(f*g) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (f*g)(c_n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i})X^n) \\ &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} f(c_n)X^n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} g(c_n)X^n) = \phi(f)\phi(g) \quad \text{e} \\ \phi(u(1)) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} u(1)(c_n)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{0,n}X^n = 1. \end{aligned}$$

Logo, ϕ é um isomorfismo de k-álgebras.

Pelo que fizemos acima, à toda coálgebra podemos associar uma álgebra dual. Surge, naturalmente, uma pergunta inversa: dada uma álgebra A podemos associar uma estrutra de coálgebra a A^* usando as transformações duais μ^* e η^*?

No caso anterior, a definição da multiplicação vinha de Δ e a função ι:

$$\mu = (\Delta^* \circ \iota) : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\iota} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

Poderíamos tentar definir uma comultiplicação de forma análoga:

$$\Delta = (\iota^{-1} \circ \mu^*) : A^* \xrightarrow{\mu^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} A^* \otimes A^*$$

A dificuldade em fazer isto é que ι não é necessariamente invertível, apenas se A possuir dimensão finita.

Seja A uma álgebra de dimensão finita. Definimos $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ por $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$ e $\varepsilon : A^* \to k$ por $\varepsilon = \xi^{-1} \circ \eta^*$. Com isso, temos o seguinte resultado:

Lema 3. *Se $f \in A^*$ e $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, para algum $i \in \mathbb{N}$ e para alguns $g_i, h_i \in A^*$, então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$ para quaisquer $a, b \in A$. Além disso, se $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$, então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$.*

Demonstração: Temos que $\iota(\Delta(f))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$. Mas $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$. Logo, $f(ab) = f(\mu(a \otimes b)) = \mu^*(f)(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$.

Agora, se $\sum_j g'_j(a)h'_j(b) = f(ab)$, então $\iota\left(\sum_j g'_j \otimes h'_j\right)(a \otimes b) = \iota\left(\sum_i g_j \otimes h_i\right)(a \otimes b)$. Pela injetividade de ι segue que $\sum_j g'_j \otimes h'_j = \sum_i g_i \otimes h_i$.

■

Proposição 5. *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então A^* é uma coálgebra com comultiplicação $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$ e counidade $\varepsilon = \xi^{-1} \circ \eta^*$.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$. Então podemos escrever $\Delta(f) = \sum_i h_i \otimes g_i$, para alguns $h_i, g_i \in A^*$, $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{ij} \otimes g''_{ij}$ para alguns $g'_{ij}, g''_{ij} \in A^*$ e $\Delta(h_i) = \sum_k h'_{ik} \otimes h''_{ik}$ para alguns $h'_{ik}, h''_{ik} \in A^*$. Então,

$$((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f) = (\Delta \otimes I)\left(\sum_i h_i \otimes g_i\right) = \sum_{i,k} h'_{ik} \otimes h''_{ik} \otimes g_i$$

$$((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f) = (I \otimes \Delta)\left(\sum_i h_i \otimes g_i\right) = \sum_{i,j} h_i \otimes g'_{ij} \otimes g''_{ij}$$

Seja $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ definido por $(\theta(u \otimes v \otimes w))(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$. Pelo Lema 3 θ é injetora. Portanto, pelo Lema 3

$$\begin{aligned}
((\theta \circ (\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c) &= \left(\theta\left(\sum_{i,k} h'_{ik} \otimes h''_{ik} \otimes g_i\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,k} h'_{ik}(a)h''_{ik}(b)g_i(c) \\
&= \sum_i h_i(ab)g_i(c) \\
&= f((ab)c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((\theta \circ (I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c) &= \left(\theta\left(\sum_{i,j} h_i \otimes g'_{ij} \otimes g''_{ij}\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,j} h_i(a) g'_{ij}(b) g''_{ij}(c) \\
&= \sum_i h_i(a) g_i(bc) \\
&= f(a(bc))
\end{aligned}
$$

Como $a,b,c \in A$ e $f \in A^*$ são arbitrários e A é uma álgebra associativa, pela injetividade de θ, temos a coassociatividade.

Além disso, como $\varepsilon(f) = (\xi^{-1} \circ \eta^*)(f) = f(1_A)$, pelo Lema 3 temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_i h_i \varepsilon(g_i)\right)(a) &= \sum_i h_i(a) g_i(1_A) \\
&= f(a1_A) = f(a) \text{ e} \\
\left(\sum_i \varepsilon(h_i) g_i\right)(a) &= \sum_i h_i(1_A) g_i(a) \\
&= f(1_A a) = f(a)
\end{aligned}
$$

Logo, $\sum_i h_i \varepsilon(g_i) = f = \sum_i \varepsilon(h_i) g_i$. Portanto A^* é uma coálgebra.

■

Proposição 6. *Sejam C e D coálgebras e sejam A e B álgebras de dimensão finita. Então*

i) Se $f: C \to D$ é um morfismo de coálgebras então $f^*: D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras.

ii) Se $f: A \to B$ é um morfismo de álgebras então $f^*: B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração:

i) Sejam $g,h \in D^*$ e $c \in C$. Como f é morfismo de coálgebras, temos

$$
\begin{aligned}
(f^* \circ (g * h))(c) &= (g * h)(f(c)) \\
&= \sum_c g(f(c)_1) h(f(c)_2) \\
&= \sum_c g(f(c_1)) h(f(c_2)) \\
&= \sum_c (f^*(g))(c_1)(f^*(h))(c_2) \\
&= ((f^*(g)) * (f^*(h)))(c).
\end{aligned}
$$

Logo, $f^*(g*h) = (f^*(g))*(f^*(h))$. Além disso, $f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$, pois f é morfismo de coálgebras. Logo, f^* é morfismo de álgebras.

ii) Conforme a Definição 12, precisamos mostrar que os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "f^* \otimes f^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B^*}"'] & & A^* \arrow[dl, "\varepsilon_{A^*}"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Seja $u \in B^*$. Então $(\Delta_{A^*} \circ f^*)(u) = \Delta_{A^*}(u \circ f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, para alguns $g_i, h_i \in A^*$. Seja também $\Delta_{B^*}(u) = \sum_j p_j \otimes q_j$, para alguns $p_j, q_j \in B^*$ e seja ι como no Lema 2. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Pelo Lema 3 temos que

$$(\iota((\Delta_{A^*} \circ f^*)(u)))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b) = (u \circ f)(ab).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\iota(((f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*})(u))(a \otimes b) &= \left(\iota\left(\sum_j (p_j \circ f) \otimes (q_j \circ f)\right)\right)(a \otimes b) \\ &= \sum_j (p_j \circ f)(a)(q_j \circ f)(b) \\ &= \sum_j p_j(f(a))q_j(f(b)) \\ &= u(f(a)f(b)) \\ &= (u \circ f)(ab). \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de f ser morfismo de álgebras. Como ι é injetiva, o primeiro diagrama comuta.

Além disso, como f é morfismo de álgebras, temos

$$(\varepsilon_{A^*} \circ f^*)(u) = \varepsilon_{A^*}(u \circ f) = u(f(1_A)) = u(1_B) = \varepsilon_B^*(u).$$

Portanto, o segundo diagrama comuta, donde segue que f^* é morfismo de coálgebras.

$\blacksquare$

1.3 O Dual Finito de uma álgebra

Na seção anterior construímos um álgebra dual C^* a partir de uma coálgebra C e obtivemos a dualização de uma álgebra A para uma coálgebra dual A^* no caso em que A tem dimensão finita. Vamos mostrar que podemos associar uma estrutura de coálgebra a um subespaço $A^\circ \subseteq A^*$ tal que $\Delta_{A^*} = \mu^* : A^* \to (A^* \otimes A^*)$ define uma comultiplicação, que é chamado dual finito de A.

Definição 15. *Sejam A uma álgebra e $I \subseteq A$ um ideal de A, dizemos que I tem codimensão finita se $dim(A/I) < +\infty$*

Lema 4. *Sejam V um espaço vetorial e $X, Y \subseteq V$ subespaços. Se X e Y possuem codimensão finita, então $X \cap Y$ também possui codimensão finita.*

Demonstração: Seja $\gamma : V \to V/X \times V/Y$ a transformação linear dada por $\gamma(v) = (v+X, v+Y)$. É fácil ver que $ker(\gamma) = X \cap Y$. Então, pelo teorema do homomorfismo para espaços vetoriais, $V/ker(\gamma) \cong Im(\gamma) \subseteq V/X \times V/Y$. Como $dim(V/X) < \infty$ e $dim(V/Y) < \infty$. Logo, $dim(V/(X \cap Y)) = dim(V/ker(\gamma)) < \infty$.

■

Observação 9. *É conhecido da álgebra linear que se um conjunto de funcionais lineares $\{f_i\}_{i=1}^n$ de um espaço vetorial V é linearmente independente então existem $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.(vide [])*

O próximo resultado nos fornece uma caracterização para os elementos do subespaço ao qual estamos querendo construir.

Teorema 10. *Sejam A uma álgebra, $f \in A^*$ e ι como no Lema 2. Então são equivalentes:*

1) *Existem $f_i, g_i \in A^*$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $f(ab) = \sum_i f_i(a)g_i(b)\ \forall a, b \in A$;*

2) *$\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$, em que $\Delta(f) = \mu^*(f)$;*

3) *Existe $I \subseteq Ker(f)$ um ideal à esquerda de A com codimensão finita;*

4) *Existe $J \subseteq Ker(f)$ um ideal à direita de A com codimensão finita;*

5) *Existe $K \subseteq Ker(f)$ um ideal de A com codimensão finita.*

Demonstração:

A sequência lógica de nossa demonstração será $(1 \Leftrightarrow 2)$, $(2 \Rightarrow 3)$, $(2 \Rightarrow 4)$, $(3 \Rightarrow 5)$, $(4 \Rightarrow 5)$ e $(5 \Rightarrow 2)$.

$(1 \Leftrightarrow 2)$

Sejam $a, b \in A$, então $\Delta(f)(a \otimes b) = f(\mu(a \otimes b)) = f(ab)$. Logo, se existirem $f_i, g_i \in A^*$ tais que $f(ab) = \sum\limits_i f_i(a) g_i(b)$ então $\Delta(f)(a \otimes b) = \left(\iota\left(\sum\limits_i f_i \otimes g_i\right)\right)(a \otimes b)$, que implica em $\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$.

Reciprocamente, se $f \in A^*$ é tal que $\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$ então existem $f_i, g_i \in A^*$ tais que $\Delta(f) = \iota\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)$. Logo, para quaisquer $a, b \in A$ temos que $f(ab) = \Delta(f)(a \otimes b) = \sum\limits_i f_i(a) g_i(b)$.

$(2 \Rightarrow 3)$

Escreva $\Delta(f) = \iota\left(\sum\limits_i g_i \otimes h_i\right)$. Por propriedades do produto tensorial podemos supor sem perda de generalidade que $\{g_i\}_{i=1}^n$ são linearmente independentes e os $\{h_i\}_{i=1}^n$ não nulos.

Seja $I = \bigcap\limits_i ker(h_i)$. Então I é um ideal à esquerda de A com codimensão finita e contido em $ker(f)$.

$\vdash$ I é um ideal à esquerda de A.

É obvio que I é um subespaço de A. Sejam $b \in A$ e $c \in I$, então

$$0 = \sum_i g_i(ab) h_i(c) = f(abc) = \sum_i g_i(a) h_i(bc) \quad \text{para todo } a \in A,$$

pela independência linear dos g_i temos que $h_i(bc) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $bc \in I$. $\dashv$

$\vdash$ I tem codimensão finita.

De fato, pois $dim(A/ker(h_i)) = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, pelo Lema 4 segue que $\bigcap\limits_i ker(h_i) = I$ tem codimensão finita.$\dashv$

$\vdash I \subseteq ker(f)$.

De fato, pois dado $a \in I$ temos que $f(a) = f(1_A a) = \sum\limits_i g_i(1_A) h_i(a) = 0$. Portanto, $I \subseteq ker(f)$. $\dashv$

$(2 \Rightarrow 4)$

A demonstração é análoga a demonstração feita em $(2 \Rightarrow 3)$.

$(3 \Rightarrow 5)$

Seja $I \subseteq A$ um ideal à esquerda de codimensão finita que está contido em $ker(f)$. Defina $\pi : A \to Hom_k(A/I)$ dada por $\pi(a)(b+I) = ab+I \ \forall a,b \in A$.

$\vdash$ π é um homomorfismo de álgebras.

Para quaisquer $a,b,c \in A$ temos que π está bem definida, pois se $a = b$ então $\pi(a)(c+I) = ac+I = bc+I = \pi(b)(c+I) \forall a,b,c \in I$. E também, $\pi(ab)(c+I) = (ab)c+I = a(bc)+I = \pi(a)(\pi(b)(c+I))$, isto implica que $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. É fácil ver que $\pi(a+b) = \pi(a)+\pi(b)$ e $\pi(\alpha a) = \alpha\pi(a) \forall \alpha \in k$. Donde concluímos que π é homomorfismo de álgebras. $\dashv$

Seja $K = ker(\pi)$. Pela afirmação acima temos que K é um ideal de A. Como $dim(Hom_k(A/I)) = (dim(A/I))^2 < \infty$ e π é um homomorfismo de álgebras, pelo Corolário 1, $A/K = A/ker(\pi) \cong Im(\pi) \subseteq Hom_k(A/I)$. Portanto K é um ideal de A com codimensão finita.

Resta mostrarmos que $K \subseteq ker(f)$. Para tanto, seja $x \in K$. Então $0+I = \pi(x)(a+I) = xa+I$, ou seja, $xa \in I$ para qualquer $a \in A$, em particular para $a = 1_A$. Logo, $x \in I \subseteq ker(f)$, donde segue que $K \subseteq ker(f)$.

$(4 \Rightarrow 5)$

Novamente, a demonstração é análoga à demonstração feita em $(3 \Rightarrow 5)$.

$(5 \Rightarrow 2)$

Seja K um ideal de A como no item 5). Seja $\rho : A \to A/K$ a projeção canônica e $\rho^* : (A/K)^* \to A^*$ a transformação dual induzida. Considere também

$$\rho^* \otimes \rho^* : (A/K)^* \otimes (A/K)^* \to A^* \otimes A^*.$$

Vamos mostrar que $\Delta(f) \in Im(\iota \circ (\rho^* \otimes \rho^*))$. A priori, sabemos que $\Delta(f) \in (A \otimes A)^*$. Note que $\Delta(f)|_{A\otimes K + K \otimes A} = 0$, pois como K é um ideal de A, temos que $\mu(A \otimes K + K \otimes A) \subseteq K$ e portanto

$$\begin{aligned} \Delta(f)(A \otimes K + K \otimes A) &= \Delta(f)(A \otimes K) + \Delta(f)(K \otimes A) \\ &= f(AK) + f(KA) = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única transformação linear $\widehat{\Delta(f)} : \dfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} \longrightarrow k$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Delta(f)"] \arrow[d, "P"'] & k \\ \dfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} \arrow[ur, "\widehat{\Delta(f)}"'] & \end{tikzcd}$$

em que P é a projeção canônica. Notemos que $\rho \otimes \rho : A \otimes A \to A/K \otimes A/K$ é sobrejetora (pois ρ é sobrejetora) e que pelo Lema 1 $ker(\rho \otimes \rho) = A \otimes ker(\rho) + ker(\rho) \otimes A = A \otimes K + K \otimes A$, donde segue pelo teorema do homomorfismo para espaços vetoriais que

$$\frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} = (A \otimes A)/ker(\rho \otimes \rho) \cong Im(\rho \otimes \rho) = A/K \otimes A/K.$$

Chamemos de $\omega : A/K \otimes A/K \to \dfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}$ este último isomorfismo. Então $P = \omega \circ (\rho \otimes \rho)$.

Notemos que $\widehat{\Delta(f)} \in \left(\dfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}\right)^*$ e como K tem codimensão finita segue que $A/K \otimes A/K$ tem dimensão finita. Consequentemente,

$$\left(\frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}\right)^* \cong (A/K \otimes A/K)^*.$$

Sejam $a, b \in A$, então

$$\begin{aligned} (\Delta(f))(a \otimes b) &= \widehat{\Delta(f)}(P(a \otimes b)) \\ &= \widehat{\Delta(f)}(\omega(\rho \otimes \rho(a \otimes b))) \\ &= (\omega^* \circ \widehat{\Delta(f)})((\rho \otimes \rho)(a \otimes b)), \end{aligned}$$

agora, notemos que $(\omega^* \circ \widehat{\Delta(f)}) \in (A/K \otimes A/K)^* \cong (A/K)^* \otimes (A/K)^*$, uma vez que $dim(A/K) < \infty$. Portanto $(\omega^* \circ \widehat{\Delta(f)}) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i$, em que $g_i, h_i \in (A/K)^*$. Logo,

$$\begin{aligned} (\Delta(f))(a \otimes b) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(\rho(a)) h_i(\rho(b)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\rho^* \circ g_i)(a)(\rho^* \circ h_i)(b) \\ &= \left(\iota\left(\rho^* \otimes \rho^*\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i\right)\right)\right)(a \otimes b) \\ &= (\iota(\rho^* \otimes \rho^*(\widehat{\Delta(f)}))(a \otimes b). \end{aligned}$$

E portanto, $\Delta(f) \in Im(\iota \circ (\rho^* \otimes \rho^*))$ como queríamos.

■

Definição 16. *Seja A uma álgebra. Definimos o dual finito de A como sendo o conjunto A° das funções $f \in A^*$ tal que f satisfaz qualquer um dos itens do teorema 10.*

Lema 5. *A° é um subespaço vetorial de A^*.*

Demonstração: $\vdash 0 \in A^\circ$.

Claramente $0 \in A^\circ$ pois $ker(0) = A$, donde segue que $dim(A/ker(0)) < \infty$, ou seja, $ker(0)$ tem codimensão finita. $\dashv$

$\vdash f + g \in A^\circ$ para quaisquer $f, g \in A^\circ$.

Sejam $f, g \in A^\circ$. Então existem ideais I, J de A, $I \subseteq ker(f)$ e $J \subseteq ker(g)$ tais que $dim(A/I) < \infty$ e $dim(A/J) < \infty$. É claro que $I \cap J$ é um ideal de A e $I \cap J \subseteq ker(f) \cap ker(g) \subseteq ker(f+g)$. Pelo Lema 4, $dim(A/(I \cap J)) < \infty$ e portanto $f + g \in A^\circ$. $\dashv$

$\vdash \alpha f \in A^\circ$ para quaisquer $f \in A^\circ$ e $\alpha \in k$.

Como $f \in A^\circ$ existe $K \subseteq ker(f)$ ideal de A tal que $dim(A/K) < \infty$. Mas como $ker(f) \subseteq ker(\alpha f)$, temos que $\alpha f \in A^\circ$. $\dashv$

■

Para finalizarmos esta seção vamos mostrar que A° é de fato uma coálgebra.

Proposição 7. *$(A^\circ, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Em que $\Delta(f) = \mu^*(f)$ e $\varepsilon(f) = f(1_A)$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $\Delta(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$. Seja $f \in A^\circ$, então podemos escrever $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ com $g_i, h_i \in A^*$ e $\{h_i\}_{i=1}^n$ um conjunto linearmente independente. Então, pela Observação 9, existem $a_j \in A$, para $j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $h_i(a_j) = \delta_{ij}$. Segue-se que para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ temos

$$\begin{aligned} g_i(ab) &= \sum_{j=1}^{n} g_j(ab)\delta_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} g_j(ab)h_j(a_i) \\ &= f(aba_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g_j(a)h_j(ba_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g_j(a)(h_j \circ R_{a_i})(b) \end{aligned}$$

em que R_{a_i} é a multiplicação à direita por a_i. Portanto pelo item 1 do Teorema 10 segue que $g_i \in A^\circ$ para qualquer $i \in \{1,\dots,n\}$. Com isso, concluímos que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A^*$. Com raciocínio análogo mostra-se que $\Delta(f) \in A^* \otimes A^\circ$. Como A° é subespaço de A^* temos que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A^\circ$.

A demonstração da propriedade coassociativa e da propriedade da counidade é análoga à demonstração feita na Proposição 3. Portanto A° é uma coálgebra.

$\blacksquare$

Para finalizarmos esta seção, daremos um exemplo que se encontra em [3].

Exemplo 20. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma representação do grupo G em V é um homomorfismo de grupos $\pi : G \to End(V)$. Se $dim(V) < \infty$ dizemos que π é uma representação de dimensão finita de G.*

Seja $f : G \to k$ uma função. Dizemos que f é uma função representativa se existe uma representação π de dimensão finita de G e se existem $v \in V$ e $\varphi \in V^*$ tais que $f(g) = \varphi(\pi(g)(v))$ para todo $g \in G$. Denotamos o conjunto das funções representativas de G por $Rep(G)$. Vimos no Exemplo 2 que $\mathscr{F}(G)$ é uma álgebra com o produto ponto a ponto.

$\vdash$ *$Rep(G)$ é uma subálgebra de $\mathscr{F}(G)$.*

Sejam $f,g \in Rep(G)$, existem $\pi_f : G \to End(V_f)$ e $\pi_g : G \to End(V_g)$ representações de dimensão finita e existem $v \in V_f$, $w \in V_g$, $\varphi_f \in V_f^*$ e $\varphi_g \in V_g^*$ tais que $f(x) = \varphi_f(\pi_f(x)(v))$ e $g(x) = \varphi_g(\pi_g(x)(w))$ para todo $g \in G$. Se definirmos a representação produto tensorial $\pi_f \otimes \pi_g : G \to End(V_f \otimes V_g)$ por $(\pi_f \otimes \pi_g)(x) = \pi_f(x) \otimes \pi_g(x)$ que é de dimensão finita e escolhermos $v \otimes w \in V_f \otimes V_g$ e o funcional $\iota(\varphi_f \otimes \varphi_g) \in (V_f \otimes V_g)^*$ obtemos facilmente que $\iota(\varphi_f \otimes \varphi_g)((\pi_f \otimes \pi_g)(x)v \otimes w) = f(x)g(x) = fg(x)$ para todo $xainG$. Portanto $fg \in Rep(G)$.

Notemos que $1_{\mathscr{F}(G)} \in Rep(G)$*, pois basta tomarmos a representação*

$$\pi : G \to End(k) \quad dada\,por \quad \pi(g) = id,$$

tomar $v = 1_k \in k$ *e* $\phi = I \in k^*$*. A soma, tomando a representação soma direta, e o produto por escalar são facilmente verificados. (vide [3])* $\dashv$

Pelo Exemplo 14 $\mathscr{F}(G)$ *é uma coálgebra e* $Rep(G) \subset \mathscr{F}(G)$*. Vamos mostrar que* $Rep(G)$ *é uma coálgebra com comultiplicação e counidade sendo a comultiplicação e a counidade de* $\mathscr{F}(G)$ *restrita à* $Rep(G)$*. Seja* $f \in Rep(G)$*. Então existem* $\pi : G \to End(V)$ *uma representação de dimensão finita,* $\phi \in V^*$ *e* $v \in V$ *tais que* $f(x) = \phi(\pi(x)(v))$ *para todo xinG. Seja* $\{e_i\}_i \subseteq V$ *uma base de* V *e seja* $\{\psi_i\}_i \subseteq V^*$ *a base dual associada. Então para todo* $w \in V$ *temos que* $w = \sum_i \psi_i(w)e_i$*, portanto, para todo* $x, y \in G$ *temos*

$$\begin{aligned} \Delta(f)(x,y) &= f(xy) \\ &= \phi(\pi(xy)(v)) \\ &= \phi((\pi(x)\pi(y))(v)) \\ &= \phi(\pi(x)(\sum_i \psi_i(\pi(y)(v)))e_i)) \\ &= \sum_i \phi(\pi(x)(e_i))\psi_i(\pi(y)(v)). \end{aligned}$$

Logo, $\Delta(f) = \sum_i f_{1,i} \otimes f_{2,i}$ *em que* $f_{1,i} = \phi(\pi(\cdot)(e_i)) \in Rep(G)$ *e* $f_{2,i} = \psi_i(\pi(\cdot)(v)) \in Rep(G)$ *para todo i.*

Portanto $\Delta(f) \in Rep(G) \otimes Rep(G)$*, donde concluímos que* $(Rep(G), \Delta|_{Rep(G)}, \varepsilon|_{Rep(G)})$ *é uma coálgebra.*

1.4 Biálgebras e Álgebras de Hopf

1.4.1 Biálgebras

Nesta seção, estamos interessados em espaços que têm estruturas de álgebras e de coálgebras simultaneamente e de modo a haver uma compatibilidade entre tais estruturas. Tais espaços serão denominados biálgebras.

Observação 11. *Se* C *e* D *são coálgebras, o espaço vetorial* $C \otimes D$ *tem estrutura de coálgebra,* *onde* $\Delta_{C\otimes D} = (I\otimes\tau\otimes I)\circ(\Delta_C\otimes\Delta_D)$ *e* $\varepsilon_{C\otimes D}(c\otimes d) = \varepsilon(c)\varepsilon(d)$*. Na notação de Sweedler temos*

$$\Delta_{C\otimes D}(c\otimes d) = \sum_{c,d} c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2.$$

O corpo k tem uma estrutura natural de coálgebra com comultiplicação dada pelo isomorfismo canônico $k\cong k\otimes k$ *e counidade dada pela aplicação identidade. Lembremos também que se A e B são álgebras então* $A\otimes B$ *tem estrutura de álgebra como no Exemplo 3.*

Proposição 8. *Considere* $(H,\Delta,\varepsilon,\mu,\eta)$*, em que* (H,μ,η) *é uma álgebra e* (H,Δ,ε) *é uma coálgebra. Então são equivalentes:*

i) μ *e* η *são morfismos de coálgebras;*

ii) Δ *e* ε *são morfismos de álgebras.*

Demonstração: Temos que Δ é um morfismo de álgebras se, e somente se, os dois seguintes diagramas forem comutativos

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[r, "\Delta"] & H\otimes H \\ H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "I\otimes\tau\otimes I"'] & & H\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "\mu\otimes\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] & H\otimes H \\ k \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\cong"] & k\otimes k \arrow[u, "\eta\otimes\eta"'] \end{tikzcd}$$

e a comutatividade dos diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\mu"'] & k\otimes k \arrow[d, "\cong"] \\ H \arrow[r, "\varepsilon"'] & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ k \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "id"'] & & k \end{tikzcd}$$

é equivalente ao fato de ε ser morfismo de álgebras. Observe que μ é morfismo de coálgebras se, e somente se, o primeiro e o terceiro diagrama comutam, enquanto η é morfismo de coálgebras se, e somente se, o segundo e o quarto diagramas comutam. Temos, portanto, a equivalência entre $i)$ e $ii)$.

$\blacksquare$

Definição 17. *Uma biálgebra é um sistema* $(H,\Delta,\varepsilon,\mu,\eta)$ *que satisfaz as condições da proposição 8.*

A partir daqui omitiremos as funções estruturais $\Delta,\varepsilon,\mu,\eta$ de uma biálgebra $(H,\Delta,\varepsilon,\mu,\eta)$, ficando subentendidas quando nos referirmos à biálgebra H apenas.

Proposição 9. *Seja* $(H,\Delta,\varepsilon,\mu,\eta)$ *uma biálgebra com* $dim(H)<\infty$*. Então* H^* *é uma biálgebra.*

Demonstração: Pelo Corolário 2 e pela Proposição 5 temos que H^* é uma álgebras e coálgebra respectivamente. Denotemos por Δ e por ε a comultiplicação e a counidade de H e por δ e E a comultiplicação e a counidade de H^*. Vamos mostrar que δ e E são morfismos de álgebras.

Lembramos que para qualquer $h^*\in H^*$ temos que $E(h^*)=h*(1_H)$ e $\delta(h^*)=\sum\limits_{h^*}h_1^*\otimes h_2^*$, em que $h^*(hg)=\sum\limits_{h^*}h_1^*(h)h_2^*(g)$. Sejam $h^*,g^*\in H^*$ e $\delta(h^*)=\sum\limits_{h^*}h_1^*\otimes h_2^*$, $\delta(g^*)=\sum\limits_{g^*}g_1^*\otimes g_2^*$, então para qualquer $g,h\in H$, usando o fato de Δ é morfismo de álgebras, temos

$$\begin{aligned}
(h^**g^*)(hg) &= \sum_{h,g}h^*(h_1g_1)g^*(h_2g_2)\\
&= \sum_{h,g}\sum_{h^*,g^*}h_1^*(h_1)h_2^*(g_1)g_1^*(h_2)g_2^*(g_2)\\
&= \sum_{h^*,g^*}(h_1^**g_1^*)(h)(h_2^**g_2^*)(g)
\end{aligned}$$

o que nos mostra que

$$\delta(h^*\otimes g^*)=\sum_{h^*,g^*}(h_1^**g_1^*)\otimes(h_2^**g_2^*)=\delta(h^*)\delta(g^*).$$

Temos também que $\varepsilon(hg)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)$ para quaiquer $h,g\in H$, pois ε é um morfismo de álgebras, assim $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\otimes\varepsilon$, e portanto δ é morfismo de álgebras. É claro que E é um morfismo de álgebras, pois sendo H uma biálgebra temos que

$$E(h^**g^*)=(h^**g^*)(1_H)=h^*(1_H)g^*(1_H)=E(h^*)E(g^*)$$

e

$$E(\varepsilon)=\varepsilon(1_H)=1_k.$$

Logo, H^* é uma biálgebra.

∎

Observação 12. *Diremos que uma biálgebra H tem a pripriedade P, se a álgebra e a coálgebra subjacentes possuem a propriedade P.*

Uma aplicação $f:H_1\to H_2$ de biálgebras é chamada *morfismo de biálgebras* se f for morfismo de álgebras e de coálgebras. Um subespaço $I\subseteq H_1$ é um $bi-ideal$ se I for um ideal e um coideal. Notemos que o quociente H_1/I é uma biálgebra se, e somente se, I for um bi-ideal de H_1 e que, neste caso, a aplicação canônica $H_1\to H_1/I$ é um morfismo de biálgebras.

Exemplo 21. *Seja G um grupo. Vimos nos exemplos 4 e 12 que $\mathbb{K}G$ é uma álgebra e uma coálgebra. E como em sua estrutura de coálgebra $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$, fica claro que Δ e ε são morfismos de álgebras e portanto $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra.*

Exemplo 22. *Seja G um grupo. No Exemplo 14 demos uma estrutura de coálgebra à álgebra $\mathscr{F}(G)$. Verifiquemos que $\mathscr{F}(G)$ é uma biálgebra. De fato,*

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(x,y) &= (fg)(xy)\\ &= f(xy)g(xy)\\ &= \Delta(f)(x,y)\Delta(g)(x,y)\\ &= (\Delta(f)\Delta(g))(x,y),\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(fg) = (fg)(e) = f(e)g(e) = \varepsilon(f)\varepsilon(g).$$

Consequentemente, concluímos que $Rep(G)$ é uma biálgebra.

Exemplo 23. *No Exemplo 15 demos uma estrutura de coálgebra à álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Com a estrutura de álgebra dada no Exemplo 9. Na construção de Δ e ε concluímos que ambos são morfismos de álgebras e, portanto, $U(\mathfrak{g})$ é uma biálgebra.*

1.4.2 Álgebras de Hopf

Álgebras de Hopf essencialmente são biálgebras com uma função adicional, chamada antípoda.

Antes de iniciarmos de fato, lembremos que se (C,Δ,ε) é uma coálgebra e (A,μ,η) é uma álgebra então $Hom_k(C,A)$ é uma álgebra com o produto de convolução $*$, como visto na proposição 4, e counidade $\eta \circ \varepsilon$.

Seja H uma biálgebra. Se denotarmos por $H^c = (H,\Delta,\varepsilon)$ e $H^a = (H,\mu,\eta)$ então $Hom_k(H^c,H^a)$ é uma álgebra com o produto de convolução $*$.

Definição 18. *Seja H uma biálgebra. Uma transformação linear $S : H \to H$ é chamada uma antípoda em H se S é a inversa da transformação identidade $I : H \to H$ com respeito ao produto de convolução em $Hom_k(H^c,H^a)$. Ou seja,*

$$\varepsilon(c)1_H = (S*I)(c) = \sum_c S(c_1)c_{(2)} \tag{1.12}$$

$$\varepsilon(c)1_H = (I*S)(c) = \sum_c c_1 S(c_2) \tag{1.13}$$

ou ainda,

$$\sum_c c_1 S(c_2) = \varepsilon(c)1_H = \sum_c S(c_1)c_2 \tag{1.14}$$

Definição 19. *Uma biálgebra H que possui uma antípoda é chamada uma* ***Álgebra de Hopf****.*

Exemplo 24. *Já vimos que kG possui uma estrutura de biálgebra. Mostremos que a aplicação $S : kG \to kG$ definida por $S(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$ satisfaz 1.14. De fato, pois como $\Delta(g) = g \otimes g$ o resultado procede. Logo kG é uma álgebra de Hopf.*

Exemplo 25. *Seja G um grupo finito e seja $\{p_g/g \in G\}$ a base de $(kG)^*$, isto é, $\langle p_g, h\rangle = \delta_{gh}$, para todos $g,h \in G$. O espaço $H = (kG)^*$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf com multiplicação satisfazendo*

$$\langle p_g p_h, l\rangle = \langle p_g, l\rangle\langle p_h, l\rangle = \delta_{gl}\delta_{hl}$$

para todos $g,h,l \in G$ e $1_H = \varepsilon$ a função aumento de kG. A comultiplicação de H é tal que

$$\Delta(p_g) = \sum_{h\in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$$

e $\varepsilon_H(p_g) = \delta_{ge}$ para todos $g,h \in G$. A antípoda S é dada por $S(p_g) = p_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

Exemplo 26. *Seja G um grupo. Conforme Exemplo 22 temos que $\mathscr{F}(G)$ é uma biálgebra. Defina*

$$S : \mathscr{F}(G) \to \mathscr{F}(G) \quad \text{dada por} \quad S(f)(g) = f(g^{-1}).$$

Verifica-se facilmente que S é uma antípoda para $\mathscr{F}(G)$ (vide [4]). Agora, dada $f \in Rep(G)$, vamos mostrar que $S(f) \in Rep(G)$. Seja $f \in Rep(G)$, então existem $\pi : G \to End(V)$ representação de dimensão finita e $\phi \in V^*$, $v \in V$ tais que $f(g) = \phi(\pi(g)(v))$ para todo $g \in G$. Defina $ev_v : V^* \to k$ dada por $ev_v(\psi) = \psi(v)$.

Defina também a representação transposta $\pi^* : G \to End(V^*)$ dada por $\pi^*(g)(T)(w) = T(\pi(x^{-1})(w))$ para todo $T \in V^*$ e $w \in V$. Então,

$$\begin{aligned} S(f)(g) &= f(g^{-1}) \\ &= \phi(\pi(g^{-1})(v)) \\ &= (\pi^*(g)(\phi))(v) \\ &= ev_v(\pi^*(g)(\phi)). \end{aligned}$$

Portanto, $S(f) \in Rep(G)$, donde conluímos que $\mathscr{F}(G)$ e $Rep(G)$ são álgebras de Hopf.

Exemplo 27. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Vimos no Exemplo 23 que $U(\mathfrak{g})$ é uma biálgebra. $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S tal que $S(x) = -x$ e $S(1) = 1$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Notemos que*

$$\begin{aligned}
(S*I)(x) &= \mu((S\otimes id)(\Delta(x))) \\
&= \mu(S\otimes id)(x\otimes 1 + 1\otimes x) \\
&= S(x)1 + S(1)x \\
&= -x + x \\
&= 0 = (\eta\circ\varepsilon)(x),
\end{aligned}$$

analogamente mostra-se que $(I*S) = (\eta\circ\varepsilon)$, logo S é uma antípoda para $U(\mathfrak{g})$, donde, $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf.

Como na Observação 12, diremos que uma álgebra de Hopf possui a propriedade P se a álgebra e a coálgebra subjacentes possuírem a propriedade P.

Definição 20. *Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf. Dizemos que uma aplicação $f : H_1 \to H_2$ é um morfismo de álgebras de Hopf se f for um morfismo de biálgebras.*

Proposição 10. *Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf com antípodas S_1 e S_2 respectivamente. Se $f : H_1 \to H_2$ é um morfismo de álgebras de Hopf então $S_2\circ f = f\circ S_1$.*

Demonstração: Sabemos que $Hom_k(H_1,H_2)$ é uma álgebra com produto de convolução $*$. Seja $h \in H_1$, então

$$\begin{aligned}
((S_2\circ f)*f)(h) &= \sum_h S_2(f(h_1))f(h_2) = \sum_{f(h)} S_2(f(h)_1)f(h)_2 \\
&= \varepsilon_{(H_2)}(f(h))1_{H_2} = \varepsilon_{H_1}(h)1_{H_2} \\
&= (\mu_{H_2}\circ\varepsilon_{H_1})(h)
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(f*(f\circ S_1))(h) &= \sum_h f(h_1)f(S_1(h_2)) = f\left(\sum_h h_1S_1(h_2)\right) \\
&= f(\varepsilon_{H_1}(h)1_{H_1}) = f(\varepsilon_{H_1}(h)\eta_{H_1}(1_k)) \\
&= (f\circ\eta_{H_1})(\varepsilon_{H_1}(h)) = \eta_{H_2}(\varepsilon_{H_1}(h)) \\
&= \varepsilon_{H_1}(h)1_{H_2} = (\mu_{H_2}\circ\varepsilon_{H_1})(h)
\end{aligned}$$

logo, pela unicidade do inverso por convolução, $f\circ S_1 = S_2\circ f$.

■

Proposição 11. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então*

i) $S(hg) = S(g)S(h)$ *para todo* $g,h \in H$;

ii) $S(1_H) = 1_H$;

iii) $\Delta(S(h)) = \sum_h S(h_2) \otimes S(h_1)$ *para todo* $h \in H$;

iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$ *para todo* $h \in H$.

Demonstração:

i) Consideremos as seguintes funções lineares $M,N,P : H \otimes H \to H$, definidas por $M(g \otimes h) = gh$, $N(g \otimes h) = S(h)S(g)$ e $P(g \otimes h) = S(gh)$. Observe que $M,N,P \in Hom_k(H \otimes H,H)$. Olhemos $H \otimes H$ com a estrutura de coálgebra dada na Observação 11, H com estrutura de álgebra e $Hom_k(H \otimes H,H)$ como uma álgebra com o produto de convolução $\star$. Seja $\overline{\varepsilon} = \varepsilon_{H \otimes H}$. Então $\mu \circ \overline{\varepsilon}$ é a unidade de $Hom_k(H \otimes H,H)$. É suficiente mostrarmos que $P \star M = \eta \circ \overline{\varepsilon} = M \star N$, pois, nesse caso, $P = P \star (M \star N) = (P \star M) \star N = N$. Temos, para quaisquer $g,h \in H$,

$$\begin{aligned}
(M \star N)(g \otimes h) &= \sum_{g,h} M(g_1 \otimes h_1)N(g_2 \otimes h_2) \\
&= \sum_{g,h} g_1 h_1 S(h_2)S(g_2) \\
&= \sum_{g} g_1 S(g_2)\varepsilon(h) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H = \mu(\overline{\varepsilon}(g \otimes h))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(P \star M)(g \otimes h) &= \sum_{g,h} P(g_1 \otimes h_1)M(g_2 \otimes h_2) \\
&= \sum_{g,h} S(g_1 h_1)h_2 g_2 \\
&= \sum_{gh} S((gh)_1)(gh)_2 \\
&= (S * I)(gh) = \varepsilon(gh)1_H \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H = \mu(\overline{\varepsilon}(g \otimes h)).
\end{aligned}$$

Portanto, $P \star M = \eta \circ \overline{\varepsilon} = M \star N$ e, assim, $S(gh) = S(h)S(g)$.

ii) Observe que como $\varepsilon(1_H) = 1_k$ e $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, temos $1_H = \varepsilon(1_H)1_H = (\eta \circ \varepsilon)(1_H) = (id * S)(1_H) = 1_H S(1_H) = S(1_H)$.

iii) Consideremos H como coálgebra, $H \otimes H$ com estrutura de álgebra como no Exemplo 3 sendo $\overline{\eta} = \eta_{H\otimes H}$ e $Hom_k(H, H \otimes H)$ uma álgebra com produto de convolução $\star$. Definindo $N, P : H \to H \otimes H$ por $N(h) = \sum_h S(h_2) \otimes S(h_1)$ e $P(h) = \Delta(S(h))$, temos que $\Delta, N, P \in Hom_k(H, H \otimes H)$. É suficiente mostrarmos que $P \star \Delta = \overline{\eta} \circ \varepsilon = \Delta \star N$, pois, nesse caso, $P = P \star (\Delta \star N) = (P \star \Delta) \star N = N$. Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
(P \star \Delta)(h) &= \sum_h P(h_1)\Delta(h_2) \\
&= \sum_h \Delta(S(h_1))\Delta(h_2) \\
&= \sum_h \Delta(S(h_1)h_2) \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) = \overline{\eta}(\varepsilon(h))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\Delta \star N)(h) &= \sum_h \Delta(h_1)N(h_2) \\
&= \sum_h \sum_{h_1} (h_{1_1} \otimes h_{1_2})N(h_2) = \sum_h (h_1 \otimes h_2)N(h_3) \\
&= \sum_h \sum_{h_3} (h_1 \otimes h_2)(S(h_{3_2}) \otimes S(h_{3_1})) = \sum_h (h_1 \otimes h_2)(S(h_4) \otimes S(h_3)) \\
&= \sum_h h_1 S(h_4) \otimes h_2 S(h_3) = \sum_h h_1 S(h_3) \otimes \varepsilon(h_2) 1_H \\
&= \sum_h h_1 S(h_3 \varepsilon(h_2)) \otimes 1_H = \sum_h h_1 S(h_2) \otimes 1_H \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) = \overline{\eta}(\varepsilon(h)).
\end{aligned}$$

Portanto, $P \star \Delta = \overline{\eta} \circ \varepsilon = \Delta \star N$ e, assim, $\Delta(S(h)) = \sum_h S(h_2) \otimes S(h_1)$.

iv) Seja $h \in H$. Então $\varepsilon(\eta(\varepsilon(h))) = \varepsilon(h)\varepsilon(\eta(1_k)) = \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) = \varepsilon(h)$ e $\eta(\varepsilon(h)) = \sum_h S(h_1)h_2$. Logo,

$$\varepsilon(h) = \varepsilon(\eta(\varepsilon(h))) = \sum_h \varepsilon(S(h_1)h_2) = \sum_h \varepsilon(S(h_1))\varepsilon(h_2).$$

Por outro lado, como H é coálgebra, temos que

$$h = \sum_h h_1 \varepsilon(h_2).$$

Assim,

$$\varepsilon(S(h)) = \sum_h \varepsilon(S(h_1\varepsilon(h_2))) = \sum_h \varepsilon(S(h_1))\varepsilon(h_2).$$

Portanto, $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

■

Proposição 12. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

i) $\sum_h S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$;

ii) $\sum_h h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$;

iii) $S \circ S = I$.

Demonstração: $i) \Rightarrow iii)$

Observe que para qualquer $h \in H$

$$\begin{aligned}
(S*(S\circ S))(h) &= \sum_h S(h_1)(S(S(h_2))) \\
&= \sum_h S(S(h_2)h_1) = S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)S(1_H) = \varepsilon(h)1_H \\
&= (\eta\circ\varepsilon)(h).
\end{aligned}$$

Assim, $S\circ S$ é uma inversa à direita de S no produto de convolução e portanto $S\circ S = I$.

Analogamente mostra-se que $ii) \Rightarrow iii)$.

$iii) \Rightarrow ii)$

Temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h)1_H &= \eta(\varepsilon(h)) \\
&= (I*S)(h) = \sum_h h_1S(h_2) \\
&= \sum_h S(S(h_1))S(h_2) \\
&= \sum_h S(h_2S(h_1)).
\end{aligned}$$

Aplicando S na igualdade acima obtemos

$$\varepsilon(h)1_H = \varepsilon(h)S(1_H) = S(\eta(\varepsilon(h))) = \sum_h (S\circ S)(h_2S(h_1)) = \sum_h h_2S(h_1).$$

Analogamente mostra-se que *iii)* $\Rightarrow$ *i)*.

■

Corolário 4. *Se H é comutativo ou cocomutativo então $S^2 = I_H$.*

Demonstração: Se H é comutativa, então como $\sum_h S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$ segue que $\sum_h h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1_H$ e pela Proposição 12 segue que $S \circ S = I$.

Se H é cocomutativa então $\sum_h h_1 \otimes h_2 = \sum_h h_2 \otimes h_1$. Como $\sum_h S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$ segue que $\sum_h S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1_H$ e pela Proposição 12 segue que $S \circ S = I$.

■

Observação 13. *[[5], pg. 80] Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetiva. Usando as propriedades listadas acima para S, é fácil ver que S^{-1} satisfaz, para todo $h \in H$:*

i) S^{-1} *é um antihomomorfismo de álgebras;*

ii) $\sum_h S^{-1}(h_2)h_1 = \sum_h h_2S^{-1}(h_1) = \varepsilon(h)1_H$;

iii) $\varepsilon(S^{-1}(h)) = \varepsilon(h)$;

iv) $\Delta(S) = \sum_h S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1)$.

Proposição 13. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita então H^* também é álgebra de Hopf.*

Demonstração: Sabemos da Proposição 9 que H^* é uma biálgebra. Para mostrarmos que H^* é uma álgebra de Hopf, seja $S^* : H^* \to H^*$ dada por $S^*(\varphi)(h) = \varphi(S(h))$ para quaisquer $\varphi \in H^*$ e $h \in H$. Sejam $\varphi \in H^*$ e $\delta(\varphi) = \sum_\varphi h_1^* \otimes h_2^*$, em que δ é a comultiplicação em H^*. Então para qualquer $h \in H$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_\varphi (S^*(\varphi_1) * \varphi_2)(h) &= \sum_{\varphi,h} S^*(\varphi_1)(h_1)h_2^*(h_2) \\
&= \sum_{\varphi,h} \varphi_1(S(h_1))\varphi_2(h_2) \\
&= \sum_h \varphi(S(h_1)h_2) = \varphi(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)\varphi(1_H) = E(\varphi)\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

em que E é a counidade em H^*. Provamos então que $\sum_{\varphi} S^*(\varphi_1)\varphi_2 = E(\varphi)\varepsilon = E(h)1_{H^*}$. Analagomente mostra-se que $\sum_{\varphi} \varphi_1 S^*(\varphi_2) = E(\varphi)1_{H^*}$.

■

Terminamos esta seção observando que dada uma álgebra de Hopf H com antípoda S, um bi-ideal I de H é chamado um *ideal de Hopf* se $S(I) \subseteq I$. Se I é um ideal de Hopf então a biálgebra quociente H/I tem uma estrutura natural de álgebra de Hopf com a qual a aplicação canônica $H \to H/I$ é um morfismo de álgebras de Hopf. Para maiores informações cunsulte ([1], pg. 157).

2 *Módulos, Comódulos e integrais*

2.1 Módulos e Comódulos

Nesta seção, veremos que o conceito de módulo sobre uma álgebra pode ser dualizado, dando origem à noção de comódulo sobre uma coálgebra.

Definição 21. *Seja A uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (X,γ), em que X é um espaço vetorial e $\gamma : A\otimes X \to X$ é um morfismo de espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes X \arrow[r, "I_A\otimes\gamma"] \arrow[d, "\mu\otimes I_X"'] & A\otimes X \arrow[d, "\gamma"] \\ A\otimes X \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A\otimes X \arrow[dd, "\gamma"] \\ k\otimes X \arrow[ur, "\eta\otimes I_X"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\ & X. \end{tikzcd}$$

A definição de A-módulo à direita é análoga, exceto que agora $\gamma : X\otimes A \to X$.

Em geral, escrevemos $a\cdot m$ ao invés de $\gamma(a\otimes m)$. O primeiro diagrama significa que $a\cdot(b\cdot m) = (ab)\cdot m$, e o segundo pode ser lido como $1_A\cdot m = m$, para quaisquer $a,b\in A$ e $m\in M$.

Na definição de A-módulo, partimos de um espaço vetorial e de uma álgebra dados e, essencialmente, definimos uma operação que relaciona as duas estruturas. Para a dualização, também partimos de um espaço vetorial, mas agora usando uma coálgebra no lugar de uma álgebra.

Definição 22. *Seja C uma coálgebra. Um C-comódulo à direita (ou um comódulo à direita sobre C) é um par (M,ρ), em que M é um espaço vetorial e $\rho : M\to M\otimes C$ é um morfismo de* *espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M\otimes C \arrow[d, "I_M\otimes\Delta"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\rho\otimes I_C"'] & M\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\ & M\otimes k \\ M\otimes C. \arrow[ur, "I_M\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

A comutatividade dos diagramas acima nos diz que $(I_M\otimes\Delta)\circ\rho = (\rho\otimes I_C)\circ\rho$ e que $(I\otimes\varepsilon)\circ\rho$ é a identidade em M.

Analogamente, definimos um C-comódulo à esquerda (ou um comódulo à esquerda sobre C), considerando o morfismo de k-espaços vetoriais $\lambda : M \to C\otimes M$.

Assim como no caso das coálgebras, também temos uma notação de Sweedler para comódulos. Dado $m\in M$, escrevemos $\rho(m) = \sum_m m_0\otimes m_1$, em que $m_0\in M$ e $m_1\in C$.

Utilizando a notação de Sweedler, a comutatividade dos diagramas acima nos diz que

$$\sum_m m_0\otimes m_{1_1}\otimes m_{1_2} = \sum_m m_{0_0}\otimes m_{0_1}\otimes m_1 = \sum_m m_0\otimes m_1\otimes m_2 \tag{2.1}$$

e que

$$\sum_m m_0\varepsilon(m_1) = m. \tag{2.2}$$

Para comódulos à esquerda, a notação é $\lambda(m) = \sum_m m_{-1}\otimes m_0$.

Dada uma coálgebra C, a partir deste ponto sempre que nos referirmos a um C-comódulo à direita (M,ρ) a menos que se diga o contrário omitiremos a função ρ, que ficará subjacente à M.

Exemplo 28. *Toda coálgebra (C,Δ,ε) é um C-comódulo à direita e à esquerda, com $\rho=\Delta$.*

Exemplo 29. *Sejam C uma coálgebra e X um espaço vetorial. Então $X\otimes C$ é um C-comódulo à direita, com a aplicação $\rho : X\otimes C\to X\otimes C\otimes C$ dada por $\rho = I\otimes\Delta$. Verifiquemos que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} X\otimes C \arrow[r, "I_X\otimes\Delta"] \arrow[d, "I_X\otimes\Delta"'] & X\otimes C\otimes C \arrow[d, "I_{X\otimes C}\otimes\Delta"] \\ X\otimes C\otimes C \arrow[r, "I_X\otimes\Delta\otimes I_C"] & X\otimes C\otimes C\otimes C. \end{tikzcd}$$

De fato, sejam $x \in X$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}
((I_X \otimes \Delta \otimes I_C) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes (\sum_c c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum_c x \otimes \Delta(c_1) \otimes c_2 \\
&= \sum_{c,c_1} x \otimes c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 \\
&= \sum_c x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
((I_{X\otimes C} \otimes \Delta) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes (\sum_c c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum_c (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum_c x \otimes c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum_{c,c_2} x \otimes c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} \\
&= \sum_c x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Logo, o primeiro diagrama é comutativo. Resta mostrarmos a comutatividade do segundo diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[dd, "I_X \otimes \Delta"'] \arrow[dr, "\simeq", "\psi"'] & \\
& X \otimes C \otimes k \\
X \otimes C \otimes C. \arrow[ur, "I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}((I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)\circ(I\otimes\Delta))(x\otimes c) &= (I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(x\otimes(\sum_c c_1\otimes c_2))\\ &= (I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(\sum_c x\otimes c_1\otimes c_2)\\ &= \sum_c (I_{X\otimes C}\otimes\varepsilon)(x\otimes c_1\otimes c_2)\\ &= \sum_c x\otimes c_1\otimes\varepsilon(c_2)\\ &= \sum_c x\otimes c_1\varepsilon(c_2)\otimes 1_k\\ &= x\otimes\sum_c c_1\varepsilon(c_2)\otimes 1_k\\ &= x\otimes c\otimes 1_k\\ &= \psi(x\otimes c).\end{aligned}$$

Exemplo 30. *Dado um grupo G, dizemos que uma álgebra A é G-graduada se existir uma família de subespaços de A, $\{A_g : g\in G\}$, indexada por G tais que $A=\oplus_{g\in G}A_g$, $A_gA_h\subseteq A_{gh}$, para todos $g,h\in G$, e $1_A\in A_e$, sendo e o elemento neutro do grupo G. Dizemos que a álgebra é G-graduada como k-espaço vetorial se apenas $A=\oplus_{g\in G}A_g$.*

Sejam G um grupo, $H=kG$ como álgebra de Hopf e A uma álgebra. Então A é H-comódulo à direita se, e somente se, A for uma álgebra G-graduada como k-espaço vetorial.

Demonstração: ($\Leftarrow$) *Seja A uma álgebra G-graduada. Da graduação de A, temos que para $a\in A$, $a=\sum_{g\in G}a_g$. Então definimos*

$$\rho : A\to A\otimes kG \quad \text{dada por} \quad \rho(a)=\sum_{g\in G}a_g\otimes g.$$

É fácil ver que ρ é uma aplicação linear. Além disso, para todo $a\in A$ temos que

$$(\rho\otimes id)(\rho(a))=\sum_{g\in G}a_g\otimes g\otimes g=(id\otimes\Delta)\left(\sum_{g\in G}a_g\otimes g\right)=(id\otimes\Delta)(\rho(a)),$$

e

$$((id\circ\varepsilon)\rho(a))=(id\circ\varepsilon)\left(\sum_{g\in G}a_g\otimes g\right)=\sum_{g\in G}a_g\otimes 1_H.$$

Portanto, (A,ρ) é um H-comódulo à direita.

($\Rightarrow$) *Seja A um H-comódulo à direita e seja $a\in A$. Podemos escrever $\rho(a)=\sum_{g\in G}m_g\otimes g$. Como $(id\otimes\Delta)\circ\rho=(\rho\otimes id)\circ\rho$, temos que*

$$\sum_{g\in G} a_g \otimes g \otimes g = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} (a_g)_h \otimes h \otimes g.$$

Da expressão acima, obtemos que $(a_g)_h = \delta_{g,h} a_g$ *e portanto* $\rho(a_g) = a_g \otimes g$*, para todo* $g \in G$*. Definimos* $A_g = \{a_g : a \in A\}$ *para* $g \in G$*. É fácil ver que* A_g *é um subespaço de* A*.*

Pelo segundo diagrama da definição de comódulo, obtemos que $\sum_{g\in G} a_g = a$ *para todo* $a \in A$*. Assim,* $\sum_{g\in G} A_g = A$*. Para vermos que a soma é direta, observamos que* $a \in A_g$ *se, e somente se,* $\rho(a) = a \otimes g$*. De fato, se* $a \in A_g$*, então* $a = b_g$*, para algum* $b \in A$*, portanto* $\rho(a) = \rho(b_g) = b_g \otimes g = a \otimes g$*. A recíproca é imediata. Logo, a soma dos* A_g *é direta e* A *é uma álgebra* G*-graduada como espaço vetorial.*

■

Lembramos a definição de morfismos entre dois A-módulos via diagramas e abaixo apresentamos a versão dual, ou seja, morfismos entre dois C-comódulos.

Definição 23. *Sejam* A *uma álgebra,* (X,γ) *e* (Y,κ) *dois* A*-módulos à esquerda. Uma transformação linear* $f : X \to Y$ *é dita um morfismo de* A*-módulos se o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes X \arrow[r, "I_A\otimes f"] \arrow[d, "\gamma"'] & A\otimes Y \arrow[d, "\kappa"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Definição 24. *Sejam* C *uma coálgebra,* (M,ρ) *e* (N,ϕ) *dois* C*-comódulos à direita. Uma transformação linear* $g : M \to N$ *é dita um morfismo de* C*-comódulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\
M\otimes C \arrow[r, "g\otimes I_C"'] & N\otimes C.
\end{tikzcd}$$

Em notação de Swedler temos

$$\phi(g(m)) = \sum_m g(m_0) \otimes m_1, \text{ para todo } m \in M.$$

Nesta seção estamos considerando C-comódulos à direita, mas todas as definições e resultados valem para C-comódulos à esquerda.

Definição 25. *Seja M um C-comódulo à direita. Um subespaço vetorial N de M é dito um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.*

Seja C uma coálgebra. Notemos que $I \subseteq C$ é um C-subcomódulo à direita de C se, e somente se, I é um coideal à direita da coálgebra C. De fato, como (C,Δ) é a estrutura de C-comódulo da coálgebra C e sendo I um C-subcomódulo à direita de C, então $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$. Logo, I é coideal à direita da coálgebra C. Obviamente, se I é um coideal à direita de C, então (I,Δ) é um C-subcomódulo à direita de C.

Teorema 14 (Teorema fundamental de comódulos)**.** *Sejam C uma coálgebra e seja (M,ρ) um C-comódulo à direita. Então todo elemento de M pertence a um subcomódulo de M de dimensão finita.*

Demonstração: Seja $\{c_i\}_{i\in I}$ uma base para C. Para $m \in M$ escrevemos

$$\rho(m) = \sum_i m_i \otimes c_i.$$

Como o número de m_i's não nulos é finito, o subespaço W de M gerado por esses elementos tem dimensão finita. Agora, para cada c_i, $\Delta(c_i) = \sum_{j,k} a_{ijk} c_j \otimes c_k$, e

$$\sum \rho(m_i) \otimes c_i = \sum m_i \otimes a_{ijk} c_j \otimes c_k.$$

Logo, $\rho(m_k) = \sum m_i \otimes a_{ijk} c_j$ e, portanto, W é um subcomódulo de dimensão finita. Observe, ainda, que $m \otimes 1 = ((I \otimes \varepsilon) \circ \rho)(m)$. Assim, $m = \sum \varepsilon(c_i) m_i \in W$.

■

Corolário 5 (Teorema fundamental das Coálgebras)**.** *Todo elemento de uma coálgebra C pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração: Sabemos que (C,Δ) é um C-comódulo à direita. Portanto, dado $c \in C$, existe, pelo teorema anterior, um subcomódulo à direita (isto é, um coideal à direita) de dimensão finita V de C contendo c. Assim, se $\{v_i\}$ para $i \in \{1,\ldots,r\}$ é uma base de V, temos, que para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$

$$\Delta(v_i) = \sum_{j=1}^{r} v_j \otimes c_{ji},$$

com $c_{ji} \in C$. Aplicando $\Delta \otimes I$ na expressão acima e usando a coassociatividade da coálgebra, obtemos

$$\sum_{k,j} v_k \otimes c_{kj} \otimes c_{ji} = \sum_j v_j \otimes \Delta(c_{ji}).$$

Assim, $\Delta(c_{ki}) = \sum_j c_{kj} \otimes c_{ji}$, o que mostra que o subespaço gerado por V e pelos c_{ji}'s é uma subcoálgebra de dimensão finita contendo c.

■

Sejam (M,ρ) um C-comódulo à direita e N um C-subcomódulo de M. Então M/N é o espaço vetorial quociente e $\pi : M \to M/N$, a aplicação canônica, $\pi(m) = \overline{m}$ para todo $m \in M$, é obviamente linear.

Proposição 14. *Sejam (M,ρ) um C-comódulo à direita e N um C-subcomódulo. Então existe uma única estrutura de C-comódulo à direita em M/N tal que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.*

Demonstração: Temos que $(\pi \otimes I_C) \circ \rho(N) \subseteq (\pi \otimes I_C)(N \otimes C) \subseteq \pi(N) \otimes C = 0$, pois $\pi(N) = 0$. Logo, $N \subseteq Ker((\pi \otimes I_C) \circ \rho)$. Portanto, existe um único morfismo $\bar{\rho}$ de k-espaços vetoriais tal que o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, dashed, "\bar{\rho}"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\pi \otimes I_C"] & (M/N) \otimes C
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\bar{\rho} \circ \pi = (\pi \otimes I_C) \circ \rho$. Então, para qualquer $m \in M$, segue que

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\overline{m}) &= (\bar{\rho} \circ \pi)(m) = ((\pi \otimes I_C) \circ \rho)(m) = (\pi \otimes I_C)(\sum_m m_0 \otimes m_1) \\
&= \sum_m \pi(m_0) \otimes m_1 = \sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\rho}(\overline{m}) = \sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1$. Afirmamos que $(M/N, \bar{\rho})$ é um C-comódulo à direita. Mostremos que $(I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho}$. De fato, seja $\overline{m} \in M/N$. Então

$$\begin{aligned}
((I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho})(\overline{m}) &= (I_{M/N} \otimes \Delta)(\sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1) \\
&= \sum_m \overline{m}_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} \\
&= \sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1 \otimes m_2 \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho})(\overline{m}) &= (\bar{\rho} \otimes I)(\sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1) \\
&= \sum_m \bar{\rho}(\overline{m}_0) \otimes m_1 \\
&= \sum_m (\overline{m}_0)_0 \otimes (m_0)_1 \otimes m_1 \\
&= \sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1 \otimes m_2.
\end{aligned}
$$

Logo, $(I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho}$. O fato de que o diagrama acima é comutativo nos diz que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.

■

O comódulo M/N com a estrutura dada acima é chamado *comódulo quociente* de M com respeito ao subcomódulo N.

Proposição 15. *Sejam M e N dois C-comódulos à direita e $f : M \to N$ um morfismo de comódulos. Então $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N e $Ker(f)$ é um C-subcomódulo de M.*

Demonstração: Sejam $\rho_M : M \to M \otimes C$ e $\rho_N : N \to N \otimes C$ as respectivas aplicações de estrutura dos dois C-comódulos. Como f é um morfismo de comódulos, temos que $((f \otimes I) \circ \rho_M)(Kerf) = \rho_N(f(Kerf)) = 0$. Logo, $\rho_M(Kerf) \subseteq Ker(f \otimes I) = Kerf \otimes C$, esta última igualdade decorre do Lema 1. Assim, $Kerf$ é um subcomódulo de M.

Por outro lado, $\rho_N(Imf) = \rho_N(f(M)) = (\rho_N \circ f)(M) = ((f \otimes I) \circ \rho_M)(M) \subseteq Imf \otimes C$ e portanto, Imf é um subcomódulo de N.

■

Teorema 15 (Teorema do isomorfismo para comódulos)**.** *Sejam $f : M \to N$ um morfismo de C-comódulos à direita, $\pi : M \to M/Ker(f)$ e $i : Imf \to N$, a projeção e a inclusão canônicas, respectivamente. Então existe um único isomorfismo de C-comódulos $\bar{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ tal que o diagrama abaixo comuta*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\
M/Kerf \arrow[r, "\bar{f}"] & Imf. \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Demonstração: Pelo teorema do isomorfismo de espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ tal que $\bar{f}(\overline{m}) = f(m)$, isto é, $(i \circ \bar{f} \circ \pi)(m) = f(m), \forall m \in M$. Claramente, $\bar{f}$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Para provarmos o teorema, precisamos verificar que $\bar{f}$ é um morfismo de comódulos.

Sejam $\omega : M/Ker(f) \to (M/Ker(f)) \otimes C$ e $\vartheta : Im(f) \to Im(f) \otimes C$ as aplicações de estrutura dos respectivos comódulos. Mostremos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
M/Ker(f) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\omega"'] & Im(f) \arrow[d, "\vartheta"] \\
(M/Ker(f)) \otimes C \arrow[r, "\bar{f}\otimes I_C"] & Im(f) \otimes C.
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
((\bar{f} \otimes I_C) \circ \omega)(\overline{m}) &= (\bar{f} \otimes I_C)(\sum_m \overline{m}_0 \otimes m_1) = \sum_m \bar{f}(\overline{m}_0) \otimes m_1 \\
&= \sum f(m_0) \otimes m_1 \overset{(*)}{=} \sum f(m)_0 \otimes m_1 \\
&= \vartheta(f(m)) = \vartheta(\bar{f}(\bar{m})) = (\vartheta \circ \bar{f})(\overline{m}),
\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que f é um morfismo de comódulos. Logo, $(\bar{f} \otimes I) \circ \omega = \vartheta \circ \bar{f}$, ou seja, $\bar{f}$ é um morfismo de comódulos à direita.

■

Lema 6. *Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra. Se (M, ρ) é um C-comódulo à direita então M é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração: Sejam $m \in M$ e $f \in C^*$. Escreva $\rho(m) = \sum_m m_0 \otimes m_1$. Então M se torna um C^*-módulo à esquerda via a ação dada por

$$f \cdot m = \sum_m f(m_1) m_0.$$

Denotemos $\gamma : C^* \otimes M \to M$ a ação de C^* em M, ou seja, $\gamma(f \otimes m) = f \cdot m$. Como ε é a unidade de C^*, temos que

$$1_{C^*} \cdot m = \sum_m \varepsilon(m_1) m_0 = m \qquad \forall \quad m \in M.$$

Sejam $f, g \in C^*$, então para qualquer $m \in M$ temos:

$$\begin{aligned} f\cdot(g\cdot m)) &= \sum_m \gamma(f\otimes g(m_1)m_0 \\ &= \sum_m g(m_1)\gamma(f\otimes m_0) \\ &= \sum_{m,m_0} g(m_1)f(m_{0_1})m_{0_0} \end{aligned}$$

e por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (f*g)\cdot m &= \sum_m (f*g)(m_1)m_0 \\ &= \sum_{m,m_1} f(m_{1_1})g(m_{1_2})m_0 \end{aligned}$$

mas como M é um C-comódulo à direita, temos que $(\rho\otimes I)\circ\rho = (I\otimes\Delta)\circ\rho$. Logo, as últimas expressões do lado direito das duas relações acima coincidem. E portanto

$$(f*g)\cdot m = f\cdot(g\cdot m)),$$

ou seja, (M,γ) é um C^*-módulo à esquerda.

■

Exemplo 31. *Seja C uma coálgebra. Pelo Lema 6, a estrutura de comódulo de C induz uma ação à esquerda de C^* em C dada por*

$$f \rightharpoonup c = \sum_c f(c_2)c_1 \tag{2.3}$$

para $f \in C^*$ e $c \in C$. Do mesmo modo, existe uma ação natural à direita de C^* em C, dada por

$$c \leftharpoonup f = \sum_c f(c_1)c_2. \tag{2.4}$$

Exemplo 32. *Seja A uma álgebra. De modo análogo, podemos definir uma ação à esquerda de A em A^*. Para todo $a \in A$ e $f \in A^*$, $a \rightharpoonup f$ é o elemento de A^* tal que, para todo $b \in A$,*

$$(a \rightharpoonup f)(b) = f(ba). \tag{2.5}$$

Do mesmo modo, definimos uma ação à direita $f \leftharpoonup a$ de A em A^*, em que

$$(f \leftharpoonup a)(b) = f(ab). \tag{2.6}$$

Definição 26. *Seja M um H-módulo à esquerda. Os invariantes de H em M é o subespaço de*

M

$$M^H = \{m \in M : h \cdot m = \varepsilon(h)m, \quad \forall h \in H\}.$$

Definição 27. *Seja M um H-comódulo à direita. Os coinvariantes de H em M é o subespaço de M*

$$M^{coH} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1_H\}.$$

O próximo Lema, segue da construção feita no Lema 6 e encontra-se em [6].

Lema 7. *Seja M um H-comódulo à direita, e considere sua H^*-módulo estrutura à esquerda dada no Lema 6. Então $M^{H^*} = M^{coH}$.*

□

Exemplo 33. *Seja H uma álgebra de Hopf e considere H como um H-módulo à esquerda via multiplicação à esquerda. Então*

$$H^H = \{t \in H : ht = \varepsilon(h)t, \quad \forall h \in H\}.$$

Exemplo 34. *Seja H uma álgebra de Hopf e considere H como um H-comódulo à direita com $\rho = \Delta$. Então $H^{coH} = k1_H$.*

Demonstração: *($\subseteq$) Seja $h \in H^{coH}$, então $\Delta(h) = h \otimes 1_H$ e portanto $h = \varepsilon(h)1_H \in k1_H$. Logo, $H^{coH} \subseteq k1_H$.*

($\supseteq$) Seja $\beta \in k$, então $\rho(\beta 1_H) = \beta\rho(1_H) = \beta\Delta(1_H) = \beta 1_H \otimes 1_H$, portanto $k1_H \subseteq H^{coH}$.

■

2.2 Módulos de Hopf

Como em álgebras de Hopf as estruturas de álgebra e de coálgebra estão na álgebra de Hopf conjuntamente, em módulos de Hopf também estarão conjuntas as estruturas de módulo e comódulos.

Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S e seja M um H-módulo à direita e um H-comódulo à direita com estrutura $\rho : M \to M \otimes H$.

Definição 28. *Dizemos que M é um módulo de Hopf à direita se o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{tikzcd} M\otimes H \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\rho\otimes\Delta"'] & M \arrow[r, "\rho"] & M\otimes H \\ M\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[rr, "I_M\otimes\tau\otimes I_H"] & & M\otimes H\otimes H\otimes H \arrow[u, "\cdot\otimes\mu_H"'] \end{tikzcd}$$

ou seja, se

$$\rho(m\cdot h)=\sum_{h,m}(m_0\cdot h_1)\otimes(m_1h_2),$$

para todo $m\in M$ e todo $h\in H$.

Sejam V um espaço vetorial e H uma álgebra de Hopf. Considere $V\otimes H$. Então, $V\otimes H$ com a ação $(v\otimes h)\triangleleft g=v\otimes hg$ para quaisquer $v\in V$ e $h,g\in H$ e a coação $\rho(v\otimes h)=\sum_h v\otimes h_1\otimes h_2$ para quaisquer $v\in V$ e $h\in H$, é um módulo de Hopf à direita.

Seja H uma álgebra de Hopf e seja M um H-módulo à direita. Temos em $M\otimes H$ uma estrutura natural de $H\otimes H$-módulo à direita, onde a ação é dada por $(m\otimes h)\cdot(a\otimes b)=m\cdot a\otimes hb$, para todo $m\in M$ e todos $a,b,h\in H$. Como $\Delta:H\to H\otimes H$ é um morfismo de álgebras, temos induzida uma estrutura de H-módulo à direita em $M\otimes H$, dada por $(m\otimes h)\cdot g=\sum_g m\cdot g_1\otimes hg_2$, para todo $m\in M$ e para todos $g,h\in H$. Com essa estrutura, demonstra-se que M é um módulo de Hopf à direita se, e somente se, $\rho:M\to M\otimes H$ for um morfismo de H-módulos à direita. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} M\otimes H \arrow[r, "\rho\otimes I"'] \arrow[d, "\cdot"] & M\otimes H\otimes H \arrow[d, "\cdot"] \\ M \arrow[r, "\rho"] & M\otimes H \end{tikzcd}$$

se, e somente se, $\rho(m\cdot h)=\sum_{m,h}m_0\cdot h_1\otimes m_1h_2$.

De modo análogo, pode-se reinterpretar a definição de H-módulo à direita em termos das estruturas de comódulo de M e de $M\otimes H$. Em $M\otimes H$ temos uma estrutura natural de $H\otimes H$-comódulo à direita induzida pela estrutura de comódulo à direita de M e a comultiplicação de H, dada por $\delta:m\otimes h\mapsto\sum_{m,h}m_0\otimes h_1\otimes m_1\otimes h_2$, para $m\in M$ e $h\in H$. O fato de a multiplicação em H ser um morfismo de coálgebras faz com que $M\otimes H$ tenha estrutura de H-comódulo à direita. Com essa estrutura, verifica-se que M é um módulo de Hopf se, e somente se, a estrutura de módulo de M, $\cdot : M \otimes H \to M$, for um morfismo de H-comódulos à direita. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
M \otimes H \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[d, "(I_M \otimes I_H \otimes \mu)\circ\delta"'] & & M \arrow[d, "\rho"] \\
M \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\cdot \otimes I_H"] & & M \otimes H
\end{tikzcd}$$

se, e somente se, $\rho(m \cdot h) = \sum_{m,h} m_0 \cdot h_1 \otimes m_1 h_2$.

Notemos que, com as estruturas de H-módulo à direita e H-comódulo à direita definidas acima para $M \otimes H$, foi provado que $\rho : M \to M \otimes H$ é um morfismo de módulos se, e somente se, $\cdot : M \otimes H \to M$ for um morfismo de comódulos.

Definição 29. *Seja H uma álgebra de Hopf e sejam M e N dois módulos de Hopf à direita. Dizemos que a aplicação linear $f : M \to N$ é um morfismo de módulos de Hopf se f for um morfismo de módulos à direita e um morfismo de comódulos à direita.*

Exemplo 35. *Sejam H uma álgebra de Hopf e V um espaço vetorial. Definimos em $V \otimes H$ uma estrutura de H-módulo à direita por $(v \otimes h) \cdot g = v \otimes hg$, para todo $v \in V$ e todos $h, g \in H$, e uma estrutura de H-comódulo à direita $\rho : V \otimes H \to V \otimes H \otimes H$ por $\rho = I \otimes \Delta$, isto é, $\rho(v \otimes h) = \sum_h v \otimes h_1 \otimes h_2$, para todo $v \in V$ e todo $h \in H$. Com essas estruturas, $V \otimes H$ é um módulo de Hopf à direita. De fato, para todo $v \in V$ e todos $h, g \in H$, temos*

$$\begin{aligned}
\rho((v \otimes h) \cdot g) &= \rho(v \otimes hg) \\
&= \sum_{gh} v \otimes (hg)_1 \otimes (hg)_2 \\
&= \sum_{g,h} v \otimes h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \\
&= \sum_{g,h} (v \otimes h_1) \cdot g_1 \otimes h_2 g_2 \\
&= \sum_{(v \otimes h)} \sum_{g} (v \otimes h)_0 \cdot g_1 \otimes (v \otimes h)_1 g_2.
\end{aligned}$$

Veremos a seguir que todo H-módulo de Hopf é isomorfo a um módulo do Exemplo 35, isto é, para todo módulo de Hopf M, existe um espaço V tal que M é isomorfo ao módulo de Hopf $V \otimes H$ com a estrutura dada no exemplo acima.

Teorema 16 (Teorema Fundamental dos módulos de Hopf)**.** *Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita. Então a aplicação $\alpha : M^{coH} \otimes H \to M$ definida por*

$\alpha(m \otimes h) = m \cdot h$, para $m \in M^{coH}$ e $h \in H$, é um isomorfismo de módulos de Hopf, onde a estrutura de $M^{coH} \otimes H$ é a dada no Exemplo 35 para o espaço M^{coH}.

Demonstração: Seja S a antípoda de H e seja $\rho : M \to M \otimes H$ a estrutura de H-comódulo à direita de M. Defina $P : M \to M$ como sendo a composta

$$M \xrightarrow{\rho} M \otimes H \xrightarrow{id \otimes S} M \otimes H \xrightarrow{\cdot} M,$$

isto é,

$$P(m) = \sum_m m_0 \cdot S(m_1),$$

para todo $m \in M$. Usando a definição de módulo de Hopf e o fato que a antípoda é um antihomomorfismo de coálgebras (Proposição 11 item c), obtemos, para todo $m \in M$,

$$\begin{aligned}
\rho(P(m)) &= \sum_m \rho(m_0 \cdot S(m_1)) \\
&= \sum_m m_0 \cdot S(m_3) \otimes m_1 S(m_2) \\
&= \sum_m m_0 \cdot S(m_2) \otimes \varepsilon(m_1) 1_H \\
&= \sum_m m_0 \cdot S(m_1) \otimes 1_H \\
&= P(m) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Logo, $P(M) \subseteq M^{coH}$ e, assim, podemos definir uma aplicação linear $\beta : M \to M^{coH} \otimes H$ por $\beta = (P \otimes id) \circ \rho$, isto é,

$$\beta(m) = \sum_m m_0 \cdot S(m_1) \otimes m_2,$$

para todo $m \in M$. Mostremos que β é a inversa de α. Para $m \in M$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta(m)) &= \alpha\left(\sum_m m_0 \cdot S(m_1) \otimes m_2\right) \\
&= \sum_m (m_0 \cdot S(m_1)) \cdot m_2 \\
&= \sum_m m_0 \cdot (S(m_1) m_2) \\
&= \sum_m m_0 \cdot (\varepsilon(m_1) 1_H) \\
&= \sum_m \varepsilon(m_1) m_0 \cdot 1_H \\
&= m \cdot 1_H = m.
\end{aligned}$$

Como H é módulo de Hopf, temos para $m \in M^{coH}$ e $h \in H$,

$$\rho(m \cdot h) = \sum_h m \cdot h_1 \otimes h_2.$$

Portanto, se $m \in M^{coH}$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha(m \otimes h)) &= \beta(m \cdot h) \\
&= (P \otimes id)\left(\sum_h m \cdot h_1 \otimes h_2\right) \\
&= \sum_h (m \cdot h_1) \cdot S(h_2) \otimes h_3 \\
&= \sum_h m \cdot (h_1 S(h_2)) \otimes h_3 \\
&= \sum_h m \cdot (\varepsilon(h_1) 1_H) \otimes h_3 \\
&= m \otimes h.
\end{aligned}$$

Assim, β é a inversa de α. Além disso, α é morfismo de módulos, pois $\alpha((m \otimes h) \cdot g) = \alpha(m \otimes hg) = m \cdot (hg) = (m \cdot h) \cdot g = (\alpha(m \otimes h)) \cdot g$, para todo $m \in M^{coH}$ e todos $h, g \in H$. Resta apenas verificar que α é morfismo de comódulos. Para isso, basta observar que

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha(m \otimes h)) &= \rho(m \cdot h) \\
&= \sum_h m \cdot h_1 \otimes h_2 \\
&= \sum_h (\alpha \otimes id)(m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= ((\alpha \otimes id) \circ (id \otimes \Delta))(m \otimes h),
\end{aligned}$$

para todo $m \in M^{coH}$ e todo $h \in H$.

■

2.3 Integrais

Em uma álgebra de Hopf H um elemento $t \in H$ com a propriedade de que $ht = \varepsilon(h)t$ para todo $h \in H$ é um elemento de certa relevância, tal elemento será chamado elemento integral na álgebra de Hopf.

Neste capítulo veremos um teorema de Maschke para álgebras de Hopf que relaciona a existência de elementos integrais de counidade não nula com a semi-simplicidade da álgebra.

2.3.1 Integrais sobre uma Biálgebra

Nosso estudo de integrais inicia pelo espaço dual H^* de uma biálgebra H. Lembramos que a estrutura de coálgebra em H induz uma estrutura de álgebra em H^* cujo produto é o produto de convolução.

Definição 30. *Dizemos que $T \in H^*$ é uma integral à esquerda de H se $h^* * T = h^*(1_H)T$ para todo $h^* \in H^*$. Integrais à direita são definidos simetricamente.*

O conjunto dos integrais à esquerda de H será denotado por $\int_l^{H^*}$, enquanto $\int_r^{H^*}$ representará os integrais à direita de H.

Observação 17. *Claramente $\int_l^{H^*}$ é um subespaço vetorial de H^*. Mais ainda, $\int_l^{H^*}$ é um ideal na álgebra H^*. Que ele é um ideal à direita é claro, uma vez que se $g^* \in H^*$, e $T \in \int_l^{H^*}$, então para qualquer $h^* \in H^*$ temos*

$$h^* * (T * g^*) = (h^* * T) * g^* = (h^*(1_H)T) * g^* = h^*(1_H)T * g^*$$

e então $T * g^* \in \int_l^{H^*}$. Para mostrarmos que $\int_l^{H^*}$ é também um ideal à esquerda, com as mesmas notações temos

$$h^* * (g^* * T) = (h^* * g^*) * T = (h^* * g^*)(1_H)T = h^*(1_H)g^*(1_H)T = h * (1_H)g^* * T$$

o que prova que $g^* * T \in \int_l^{H^*}$

Exemplo 36. *Seja G um grupo e seja $H = kG$ a álgebra do grupo G. Então o elemento $p_e \in H^*$, definido por $p_e(g) = \delta_{e,g}$, para todo $g \in G$, é um integral à esquerda de H. De fato, para todo $h^* \in H^*$ e todo $g \in G$, temos*

$$(h^* * p_e)(g) = h^*(g)p_e(g) = \begin{cases} h^*(e), & se\ g = e \\ 0, & se\ g \neq e \end{cases}$$

portanto, $h^* * p_e = h^*(e)p_e$.

2.3.2 Integrais em álgebras de Hopf

A patir daqui H sempre denotará uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Anteriormente definimos o que seria uma integral de uma biálgebra, partimos agora para uma definição de integral em uma álgebra de Hopf.

Definição 31. *Uma integral à esquerda (à direita) em H é um elemento $t \in H$ tal que $ht = \varepsilon(h)t$ ($th = \varepsilon(h)t$), para todo $h \in H$. Denotamos $\int_H^l$ como o espaço das integrais à esquerda e $\int_H^r$ como o espaço das integrais à direita.*

Exemplo 37. *Seja $H = \mathbb{K}G$ álgebra de Hopf. Então $t = \sum_{g \in G} g$ gera o espaço das integrais à esquerda e à direita de H.*

Exemplo 38. *Seja $H = (\mathbb{K}G)^*$ álgebra de Hopf. Então $t = p_e$ gera o espaço das integrais à esquerda e à direita de H.*

O seguinte resultado será útil na demonstração do nosso próximo resultado e encontra-se demonstrado em ([6], pg 18).

Lema 8 (Larson - Sweedler)**.** *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então*

i) Se $\{h_1^*, \ldots, h_n^*\}$ é uma base de H^* e $f \in H^*$, então existem $f_1, \ldots, f_n \in H$ tal que para todo $g \in H^*$ $g * f = \sum g(f_i)h_i^*$;

ii) H^* é um H-módulo de Hopf à direita com ação $\leftharpoondown$ e coação ρ em que $\leftharpoondown : H^* \otimes H \to H^*$ é tal que $\leftharpoondown (h^* \otimes h) = h^* \leftharpoondown h = S(h) \rightharpoonup h^*$ e $\rho : H^* \to H^* \otimes H$ é dada por $\rho(f) = \sum_i h_i^* \otimes f_i$, sendo h_i^* e f_i são como no item i).

$\square$

Teorema 18. *As seguintes afirmações são válidas:*

1) $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são unidimensionais.

2) A antípoda S de H é bijetiva, e $S\left(\int_H^l\right) = \int_H^r$.

Demonstração:

i) Pelo Lema 8 H^* é um H-módulo de Hopf à direita e pelo Teorema Fundamental de módulos de Hopf (Teorema 16), $H^* \cong H^{*coH} \otimes H$ e isto implica que $dim(H^{*coH}) = 1$ pois $dim(H^*) = dim(H)$.

Mas, pelo Lema 7 $H^{*coH} = H^{*H^*} = \{f \in H^* : g * f = \varepsilon_{H^*}(g)f, \forall g \in H^*\}$. Assim, $dim(\int_{H^*}^l) = 1$. Trocando $H^{**} \cong H$ por H^* provamos que $dim(\int_H^l) = 1$, consequentemente $dim(\int_H^r) = 1$.

ii) Sejam $0 \neq f \in \int_{H^*}^{l}$ e $h \in ker(S)$. Então

$$\alpha(f \otimes h) = f \leftharpoonup h = S(h) \rightharpoonup f = f(S(h)) = 0 = \alpha(0),$$

em que α é o isomorfismo dado pelo Teorema Fundamental de módulos de Hopf. Logo, $f \otimes h = 0$ e portanto $h = 0$.

Logo, S é injetiva e como $dim(H) < \infty$ temos que S é bijetiva.

■

Observação 19. *Notemos, que na demonstração do item* $i)$ *acima, mostramos que* $H^{*coH} = \int_{H^*}^{l}$.

Definição 32. *Uma álgebra A é dita semissimples se ela é um A-módulo à direita semissimples, ou seja, se* $A = \bigoplus_{i \in J} N_i$, *em que J é um conjunto de índices e para todo* $i \in J$ N_i *é um A-módulo à direita simples.*

Proposição 16 ([7])**.** *Uma álgebra A é semissimples se, e somente se, para qualquer A-módulo à esquerda M e qualquer submódulo* $N \subseteq M$ *existe um submódulo* N' *tal que* $M = N \oplus N'$.

□

Teorema 20 (Teorema de Maschke). *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então*

$$H \text{ é uma álgebra semissimples} \Leftrightarrow \varepsilon(t) \neq 0 \text{ para algum } t \in \textstyle\int_{H}^{l}.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$

Sabemos que $Ker(\varepsilon)$ é um ideal de codimensão 1 em H. Como $ker(\varepsilon)$ é um submódulo à esquerda de H e H é semissimples, $ker(\varepsilon)$ é um somando direto em H. Então existe $I \subseteq H$ um ideal à esquerda tal que $H = ker(\varepsilon) \oplus I$.

Seja $1_H = z + h$ com $z \in ker(\varepsilon)$ e $h \in I$. É claro que $h \neq 0$ pois $1_H \neq ker(\varepsilon)$. Como $ker(\varepsilon)$ tem codimensão 1, segue que $dim(I) = 1$.

Seja $l \in H$, então $lh \in I$ e portanto $lh = 0 + lh$. Por outro lado $l = (l - \varepsilon(l)1_H) + \varepsilon(l)1_H$ que implica em

$$(l - \varepsilon(l)1_H)h + \varepsilon(l)h = lh \quad \text{em que } (l - \varepsilon(l)1_H)h \in ker(\varepsilon) \text{ e } \varepsilon(l)h \in I.$$

Logo, $(l - \varepsilon(l)1_H)h = 0$, pois $lh = 0 + lh$ e a representação é única. Portanto, $lh = \varepsilon(l)h$ para qualquer $l \in H$, ou seja, $h \in \int_{H}^{l}$ e como $I \cap ker(\varepsilon) = 0$ e $h \neq 0$, segue que $\varepsilon(h) \neq 0$.

($\Leftarrow$)

Assuma agora que $\varepsilon(t) \neq 0$ para algum $t \in \int_H^l$. Suponha sem perda de generalidade que $\varepsilon(t) = 1$ (caso contrário tome $l = \dfrac{t}{\varepsilon(t)}$).

Precisamos mostrar que para qualquer H-módulo M e para qualquer H-submódulo N de M, N é somando direto de M.

Seja $\pi : M \to N$ uma projeção qualquer tal que $\pi(n) = n \quad \forall n \in N$ (N é somando direto de M como espaço vetorial).

Defina $P : M \to N$ por $P(m) = \sum_t t_1 \cdot \pi(S(t_2) \cdot m) \quad \forall m \in M$. Seja $n \in N$, então

$$P(n) = \sum_t t_1 \cdot \pi(S(t_2) \cdot n) = \sum_t t_1 \cdot (S(t_2) \cdot n) = \left(\sum_t t_1 S(t_2)\right) \cdot n = \varepsilon(t) 1_H \cdot n = n.$$

Mostremos que P é um morfismo de H-módulos à esquerda. Sejam $m \in M$ e $h \in H$, então:

$$\begin{aligned}
h \cdot P(m) &= \sum_t h \cdot (t_1 \cdot \pi(S(t_2) \cdot m)) \\
&= \sum_{t,h} (h_1 t_1) \cdot \pi(S(t_2)\varepsilon(h_2) \cdot m) \\
&= \sum_{t,h} (h_1 t_1) \cdot \pi(S(t_2)S(h_2)h_3 \cdot m) \\
&= \sum_{t,h} (h_1 t_1) \cdot \pi(S(h_2 t_2)h_3 \cdot m) \\
&= \sum_{t,h} (h_1 t)_1 \cdot \pi(S((h_1 t)_2)h_2 \cdot m) \\
&= \sum_{t,h} \varepsilon(h_1)(t_1 \cdot \pi(S(t_2)h_2 \cdot m)) \\
&= \sum_t t_1 \cdot \pi(S(t_2)h \cdot m) \\
&= \sum_t t_1 \cdot \pi(S(t_2) \cdot (h \cdot m)) \\
&= P(h \cdot m).
\end{aligned}$$

Portanto, existe um morfismo de H-módulos $P : M \to N$ tal que $P(n) = n \quad \forall n \in N$. Logo $M = N \oplus ker(P)$ e o resultado procede.

$\blacksquare$

3 Produto Smash e Extensões de Hopf-Galois

Neste capítulo estudaremos ações de uma álgebra de Hopf H em uma álgebra A com o objetivo de estender resultados conhecidos de ações de grupos finitos para ações de álgebras de Hopf.

A maioria dos resultados aqui presentes dependem do conceito de produto smash, que é uma generalização do skew anel de grupo no contexto de álgebras de Hopf.

3.1 Ações e coações de álgebras de Hopf e Produto Smash

Iniciamos esta seção definindo o conceito de ação de uma álgebra de Hopf H em uma álgebra A.

Definição 33. *Dizemos que A é uma H-módulo álgebra à esquerda ou que H age em A à esquerda se, para todo $h \in H$ e $a, b \in A$, valem*

1) *A é um H-módulo à esquerda, via $h \otimes a \mapsto h \cdot a$;*

2) $h \cdot (ab) = \sum_h (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$;

3) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$.

O conceito de ação de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A surge no sentido de generalizar ações de grupos sobre álgebras por automorfismos.

Exemplo 39. *Dizemos que um grupo G age em uma álgebra A por automorfismos se existir um homomorfismo de grupos $G \to Aut(A)$, onde $Aut(A)$ denota o grupo de automorfismos da álgebra A. Seja, agora, $H = kG$ a álgebra de grupo do grupo G sobre k com a estrutura usual de álgebra de Hopf dada no Exemplo 24. Então uma álgebra A é uma H-módulo álgebra se, e somente se, G agir em A por automorfismos. De fato, suponha que $\phi : G \to Aut(A)$ seja um* *homomorfismo de grupos. Defina uma estrutura de H-módulo em A tal que $g \cdot a = \phi(g)(a)$, para todo $g \in G$ e todo $a \in A$. Como todo g de G é tal que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\phi(g)$ é um homomorfismo de álgebras, segue que A é, de fato, uma H-módulo álgebra. Reciprocamente, suponha que A seja uma H-módulo álgebra e defina $\phi : G \to Aut(A)$ por $\phi(g)(a) = g \cdot a$, para todos $g \in G$ e todos $a \in A$. É claro que $\phi(gl) = \phi(g)\phi(l)$, para todos $g, l \in G$, pois A é um módulo sobre H. Como $\Delta(g) = g \otimes g$, segue que, para todos $a, b \in A$, temos $\phi(g)(ab) = g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b) = (\phi(g)(a))(\phi(g)(b))$. Além disso, $\phi(g)(1_A) = g \cdot 1_A = \varepsilon(g)1_A = 1_A$. Portanto ϕ define uma ação de G em A por automorfismos.*

Seja H uma álgebra de Hopf que age em uma álgebra A. Sejam ainda $h \in H$ e $a \in A$. Dizemos que h *age trivialmente* em a se $h \cdot a = \varepsilon(h)a$. É fácil ver que o conjunto A^H formado pelos elementos de A nos quais todos elementos de H agem trivialmente forma uma subálgebra de A, chamada *subálgebra dos invariantes* de A sob a ação de H, isto é,

$$A^H = \{a \in A : h \cdot a = \varepsilon(h)a, \quad \forall h \in H\}.$$

De fato, sejam $a, b \in A^H$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned} h \cdot (ab) &= \sum_h (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \\ &= \sum_h \varepsilon(h_1)a\varepsilon(h_2)b \\ &= \sum_h \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)ab \\ &= \varepsilon(\sum_h h_1 ep(h_2))ab \\ &= \varepsilon(h)ab, \end{aligned}$$

logo $ab \in A^H$.

Exemplo 40. *Toda álgebra de Hopf H age sobre si mesma via a ação adjunta à esquerda, definida por*

$$h \cdot g = \sum_h h_1 g S(h_2), \tag{3.1}$$

para todos $g, h \in H$. Além disso, se $Z(H)$ denota o centro de H, isto é, $Z(H) = \{z \in H : zh = hz, \quad \forall h \in H\}$, então, é claro que $Z(H) \subseteq H^H$. E, reciprocamente, se $g \in H^H$, então, para todo $h \in H$, $hg = \sum_h h_1\varepsilon(h_2)g = \sum_h h_1 g S(h_2)h_3 = \sum_h (h_1 \cdot g)h_2 = \sum_h \varepsilon(h_1)gh_2 = gh$. Logo, $H^H = Z(H)$.

Exemplo 41. *Seja A uma álgebra. Uma derivação em A é uma transformação linear $D : A \to A$ tal que $D(ab) = aD(b) + D(a)b$. É conhecido que o conjunto de todas as derivações de uma* *álgebra A, denotado por Der(A), com comutador definido por* $[D,D'] = D \circ D' - D' \circ D$*, é uma álgebra de Lie.*

Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *age por derivações em uma álgebra A se exister um homomorfismo de álgebras de Lie* $\phi : \mathfrak{g} \to Der(A)$.

Considere $H = U(\mathfrak{g})$ *com estrutura de álgebra de Hopf dada no Exemplo 27. Então A é um H-módulo álgebra se, e somente se,* $\mathfrak{g}$ *agir em A por derivações.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) *Suponha que A seja um H-módulo álgebra e defina* $\alpha : \mathfrak{g} \to End(A)$ *por* $\alpha(x)(a) = x \cdot a$*, para todos* $x \in \mathfrak{g}$ *e todos* $a \in A$*. Como* $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ *para todo* $x \in \mathfrak{g}$*, segue que* $\alpha(x) \in Der(A)$*, para todo* $x \in \mathfrak{g}$*. Assim,* α *define uma ação de* $\mathfrak{g}$ *em A por derivações, uma vez que A é um H-módulo.*

($\Leftarrow$)*Suponha que* $\alpha : \mathfrak{g} \to Der(A) \subseteq (End(A))^-$ *é um homomorfismo de álgebras de Lie, então existe* $\bar{\alpha} : H \to End(A)$ *homomorfismo de álgebras e, portanto, A tem uma estrutura de H-módulo dada por* $h \cdot a = \bar{\alpha}(h)(a)$*, para todos* $h \in H$ *e todo* $a \in A$*. Agora, como* $\mathfrak{g}$ *gera H como álgebra, basta, verificar as condições* (ii) *e* (iii) *na definição de ação para os elementos de* $\mathfrak{g}$*. Seja, então,* $x \in \mathfrak{g}$ *e lembremos que* $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$*. Temos que* $x \cdot (ab) = \alpha(x)(ab) = \alpha(x)(a)b + a\alpha(x)(b) = (x \cdot a)b + a(x \cdot b) = \sum_x (x_1 \cdot a)(x_2 \cdot b)$*, pois* $\alpha(x)$ *é uma derivação em A. Finalmente,* $x \cdot 1_A = \alpha(x)(1_A) = 0 = \varepsilon(x)1_A$*, pois toda derivação se anula no elemento unidade de uma álgebra.*

■

Associado ao par (A,H) construímos uma álgebra que generaliza a construção do skew anel de grupo, da seguinte maneira:

Definição 34. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então a álgebra produto smash A#H é definida como*

1) $A\#H = A \otimes H$ *como k-espaço vetorial. Escrevemos a#h para denotar o elemento* $a \otimes h$

2) e multiplicação dada por

$$(a\#h)(b\#g) = \sum_h a(h_1 \cdot b)\#h_2 g \tag{3.2}$$

para quaisquer $a,b \in A$ *e* $g,h \in H$

Observação 21. *Com o produto definido acima, A#H á uma álgebra de fato. A relação de compatibilidade com o produto escalar e a linearidade é claramente satisfeita. Mostremos que* *o produto é associativo, sejam $a,b,c \in A$ e $g,h,l \in H$, então*

$$
\begin{aligned}
((a\#h)(b\#l))(c\#g) &= \left(\sum_h (a(h_1 \cdot b))\#h_2 l\right)(c\#g) \\
&= \sum_{h,(h_1 l)} a(h_1 \cdot b)((h_1 l)_1 \cdot c)\#(h_1 l)_2 g \\
&= \sum_{h,l} a(h_1 \cdot b)((h_2 l_1) \cdot c)\#h_3 k_2 g \\
&= \sum_{h,l} a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot (l_1 \cdot c)\#h_3 k_2 g \\
&= \sum_{h,l} a(h_1 \cdot (b(l_1 \cdot c)))\#h_2 k_2 g \\
&= (a\#h)\left(\sum_l b(l_1 \cdot c)\#l_2 g\right) \\
&= (a\#h)((b\#l)(c\#g)),
\end{aligned}
$$

e portanto o produto é associativo. Além do mais, utilizando as mesmas notações, mostremos que $1_A\#1_H$ é a unidade desta álgebra,

$$
\begin{aligned}
(a\#h)(1_A\#1_H) &= \sum_h a(h_1 \cdot 1_A)\#h_2 1_H \\
&= \sum_h a(\varepsilon(h_1)1_A)\#h_2 \\
&= a\#h,
\end{aligned}
$$

e, como $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, temos

$$
\begin{aligned}
(1_A\#1_H)(a\#h) &= 1_A(1_H \cdot a)\#1_H h \\
&= a\#h.
\end{aligned}
$$

Exemplo 42. *Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra qualquer. Então sempre é possível definir uma ação trivial de H em A da seguinte maneira, $h \cdot a = \varepsilon(h)a$, para todos $h \in H$ e $a \in A$. É claro que, neste caso, $A\#H$ é isomorfo, como álgebra, ao produto tensorial $A \otimes H$.*

Exemplo 43. *Se H age sobre si mesma pela ação adjunta, então $H\#H$ é isomorfa, como álgebra, à álgebra $H \otimes H$. De fato, defina*

$$\phi : H\#H \to H \otimes H \quad \text{dada por} \quad \phi(h\#g) = sum_g h g_1 \otimes g_2,$$

é fácil ver que ϕ é linear, pois $\phi = (\mu \otimes I) \circ (I \otimes \Delta)$. Vamos verificar que ϕ é homomorfismo de *álgebras, de fato, pois*

$$\begin{aligned}
\phi((h\#g)(l\#m)) &= \phi(\sum_{g} h(g_1\cdot l)\#g_2m) \\
&= \phi(\sum_{g} hg_1lS(g_2)\#g_3m) \\
&= \sum_{g,m} hg_1lS(g_2)g_3m_1\otimes g_4m_2 \\
&= \sum_{g,m} hg_1lm_1\otimes g_2m_2 \\
&= \sum_{g,m} (hg_1\otimes g_2)(lm_1\otimes m_2) \\
&= \phi(h\#g)\phi(l\#m),
\end{aligned}$$

e $\phi(1_H\#1_H)=1_H1_H\otimes 1_H=1_H\otimes 1_H$. *Podemos mostrar também que a aplicação* $\Psi: H\otimes H\to H\#H$ *dada por* $\Psi(h\otimes g)=\sum_{g} hS(g_1)\otimes g_2$ *é a inversa de* ϕ*, de fato,*

$$\begin{aligned}
(\Psi\circ\phi)(h\#g) &= \Psi(\sum_{g} hg_1\otimes g_2) \\
&= \sum_{g} hg_1S(g_2)\#g_3 \\
&= h\#g,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\phi\circ\Psi)(h\otimes g) &= \phi(\sum_{g} hS(g_1)\#g_2) \\
&= \sum_{g} hS(g_1)g_2\otimes g_3 \\
&= h\otimes g,
\end{aligned}$$

provando, assim, o isomorfismo.

Exemplo 44. *Nas condições do Exemplo 39 observe que, neste caso,* A^H *coincide com a subálgebra dos invariantes da ação de G em A por automorfismos, ou seja,*

$$A^H=A^G=\{a\in A:\phi(g)(a)=a,\quad \forall g\in G\}.$$

O Produto smash A#H nada mais é do que o Skew anel de grupo $A*G$*, uma vez que o produto em A#H satisfaz* $(a\#g)(b\#l)=a\phi(g)(b)\#gl$*, para todos* $a,b\in A$ *e* $g,l\in G$*.*

Exemplo 45. *Neste exemplo, veremos que graduações por grupos finitos podem ser realizadas como ações de álgebras de Hopf. Seja G um grupo finito, seja* $H=(kG)^*$ *a álgebra de dual da álgebra de Hopf kG (como no Exemplo 25) e seja A uma álgebra. Então A é uma H-módulo* *álgebra se, e somente se, A for G-graduada. De fato, se A é G-graduada, digamos* $A = \oplus_{g\in G}A_g$, *todo elemento* $a \in A$ *se escreve de maneira única na forma* $a = \sum_{g\in G} a_g$, *com* $a_g \in A_g$, *para todo* $g \in G$. *Seja* $\{p_g : g \in G\}$ *a base dual de G, isto é, a base de H tal que* $p_g(h) = \delta_{gh}$, *para todos* $g,h \in G$. *Então A é um H-módulo à esquerda via* $p_g \cdot a = a_g$, *para todos* $g \in G$ *e* $a \in A$. *Além disso, como* $\varepsilon(p_g) = \delta_{ge}$, *para todo* $g \in G$ *e* $1_A \in A_e$, *segue* $p_g \cdot 1_A = \delta_{ge}1_A = \varepsilon(p_g)1_A$. *Portanto a condição (iii) na definição de H-módulo álgebra está satisfeita. Finalmente, a condição (ii) também está satisfeita, uma vez que dados* $a,b \in A$ *e* $g \in G$, *temos* $p_g \cdot (ab) = (ab)_g = \sum_{h\in G} a_{gh^{-1}}b_h = \sum_{h\in G}(p_{gh^{-1}\cdot a})(p_h \cdot b)$.

Reciprocamente, suponha que A seja uma H-módulo álgebra e, para cada $g \in G$, *seja* $A_g = \{p_g \cdot a : a \in A\}$. *Então* A_g *é um subespaço de A e, como* $\{p_g : g \in G\}$ *é um conjunto de idempotentes ortogonais cuja soma é* 1, *segue* $A = \oplus_{g\in G}A_g$. *Além disso, se* $a,b \in A$, *então, para quaisquer* $g,h \in G$, *temos* $(p_g \cdot a)(p_h \cdot b) = p_{gh}((p_g \cdot a)(p_h \cdot b))$, *como é fácil de verificar, uma vez que A é uma H-módulo álgebra. Logo* $A_gA_h \subseteq A_{gh}$. *Finalmente,* $1_A = \varepsilon(p_e)1_A = p_e \cdot 1_A \in A_e$. *Assim, A é G-graduada.*

Neste caso, como é fácil ver, $A^H = A_e$.

Exemplo 46. *Já sabemos que H age em* H^* *via:*

$$\rightharpoonup : H \otimes H^* \to H^*,$$

em que $(h \rightharpoonup f)(l) := f(lh)$. *Vejamos que* H^* *é um H-módulo álgebra. De fato, sejam* $h \in H$ *e* $g,f \in H^*$, *então, para todo* $l \in H$, *temos:*

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup (f*g))(l) &= (f*g)(lh) \\
&= \sum_{l,h} f(l_1h_1)g(l_2h_2) \\
&= \sum_{l,h} (h_1 \rightharpoonup f)(l_1)(h_2 \rightharpoonup g)(l_2) \\
&= \sum_{l} (h_1 \rightharpoonup f)*(h_2 \rightharpoonup g)(l),
\end{aligned}$$

e

$$(h \rightharpoonup 1_{H^*})(l) = \varepsilon(lh) = \varepsilon(l)\varepsilon(h) = \varepsilon(h)1_{H^*}(l),$$

o que implica em $(h \rightharpoonup \varepsilon = \varepsilon(h)1_{H*})$. *Assim,* H^* *possui estrutura de H-módulo álgebra e podemos definir* $H^*\#H$.

para todos $f,g \in H^*$ *e* $a,b \in H$.

O próximo resultado nos permite enxergar $A\#H$ como uma álgebra contendo A e H e que de certa forma codifica suas estruturas.

Proposição 17. *Seja H uma álgebra de Hopf e seja A uma H-módulo álgebra. Então as funções*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A\#H \\ a &\longmapsto a\#1_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} H &\longrightarrow A\#H \\ h &\longmapsto 1_A\#h \end{aligned}$$

são homomorfismos injetores de álgebras.

Demonstração: Que as funções são k-lineares e injetoras é imediato. Mostremos que são homomorfismo de álgebras. Sejam $a,b \in A$, então:

$$\begin{aligned} (a\#1_H)(b\#1_H) &= a(1_H \cdot b)\#1_H \\ &= ab\#1_H, \end{aligned}$$

e para todos $h,g \in H$, temos:

$$\begin{aligned} (1_A\#h)(1_A\#g) &= \sum_h 1_A(h_1 \cdot 1_A)\#h_2 g \\ &= \sum_h (\varepsilon(h_1)1_A)\#h_2 g \\ &= \sum_h 1_A\#\varepsilon(h_1)h_2 g \\ &= 1_A\#hg. \end{aligned}$$

Portanto o resultado procede.

■

Em vista da proposição acima, passaremos, quando for conveniente, a olhar A e H como subálgebras de $A\#H$ via a identificação de A e H com suas imagens nos homomorfismos injetores dados na proposição. Dessa maneira, $A\#H$ tem uma estrutura natural de A-módulo à esquerda e à direita induzidas pela multiplicação de $A\#H$. Mais detalhadamente, $A\#H$ é um A-módulo à esquerda via

$$\begin{aligned} A \times (A\#H) &\longrightarrow A\#H \\ (a, b\#h) &\longmapsto (a\#1_H)(b\#1_H) = ab\#h, \end{aligned}$$

e é um A-módulo à direita via

$$\begin{aligned}(A\#H)\times A &\longrightarrow A\#H\\ (b\#h,a) &\longmapsto (b\#1_H)(a\#1_H)=\sum_h b(h_1\cdot a)\#h_2.\end{aligned}$$

A noção dual de ação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra é chamada coação. Mais exatamente, temos a seguinte definição.

Definição 35. *Seja A uma álgebra, A é dito um H-comódulo álgebra à direita se:*

i) *A é um H-comódulo à direita via, digamos, $\rho : A \to A\otimes H$;*

ii) $\rho(ab)=\sum_{a,b} a_0b_0\otimes a_1b_1$, *para todos $a,b\in A$;*

iii) $\rho(1_A)=1_A\otimes 1_H$.

Dizemos, também, que ρ é uma coação à direita de H em A.

Notemos que o item $ii)$ da definição acima nos exepressa que $\rho(ab)=\rho(a)\rho(b)$.

Exemplo 47. *Sejam G um grupo, A uma álgebra G-graduada e $H=kG$. Então A é um H-comódulo álgebra à direita e $A^{coH}=A_e$, em que e é o elemento neutro de G.*

Demonstração: *Do Exemplo 30, temos que A é um H-comódulo à direita. Sejam $a=\sum_{g\in G} a_g$ e $b=\sum_{h\in G} b_h$ em A. Então*

$$\rho(a)\rho(b)=(\sum_{g\in G} a_g\otimes g)(\sum_{h\in G} b_h\otimes h)=\sum_{v\in G}(\sum_{\substack{gh=v\\ g,h\in G}} a_gb_h)\otimes v=\rho(\sum_{v\in G}(\sum_{\substack{gh=v\\ g,h\in G}} a_gb_h))=\rho(ab),$$

e $\rho(1_A)=1_A\otimes e$, pois $e\in A_e$.

Portanto, A é um H-comódulo álgebra à direita. Claramente $A^{coH}=A_e$.

■

Reciprocamente, se A é um H-comódulo álgebra, então já sabemos do Exemplo 30 que A é G-graduada como k-espaço vetorial e que para cada $a_g\in A_g$, $\rho(a_g)=a_g\otimes g$. Assim, $\rho(a_ga_h)=\rho(a_g)\rho(a_h)=a_ga_h\otimes gh$, isto é, $a_ga_h\in A_{gh}$ e portanto $A_gA_h\subseteq A_{gh}$ para quaisquer $g,h\in G$, e também temos que $1_A\in A_e$. Logo A é uma álgebra G-graduada.

Neste contexto podemos falar na subálgebra de coinvariantes de A, definida como:

Definição 36. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H-comódulo álgebra via coação $\rho : A \to A \otimes H$. A subálgebra de coinvariantes de A sob a coação de H é definida por*

$$A^{coH} = \{a \in A : \rho(a) = a \otimes 1_H\}.$$

A seguinte proposição que será apenas enunciada e cuja demonstração se encontra em ([1], pgs. 244 e 245) nos diz que no caso de uma álgebra de Hopf H de dimensão finita, temos uma conexão natural entre ações e coações.

Proposição 18. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e seja A uma álgebra. Então A é um H-comódulo álgebra à direita se, e somente se, A for um H^*-módulo álgebra à esquerda. Neste caso, $A^{H^*} = A^{coH}$.*

□

Observação 22. *A ação à esquerda de H^* é dada a partir da coação à direita da seguinte maneira $f \cdot h = \sum_h h_0 f(h_1)$.*

3.2 Conexões entre a álgebra dos invariantes e o produto smash via um contexto de Morita

Está claro a partir das seções anteriores que existe uma relação intrínseca entre $A\#H$ e A^H. Aqui nós formalizamos esta relação via um *Contexto de Morita*.

A ideia básica é encontrar uma relação entre os dois anéis via os seus módulos. Primeiramente, relembramos o que significa dois anéis R e S estarem conectados via um *Contexto de Morita*.

Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H-módulo álgebra. Considerando $A\#H$, com a finalidade de simplificarmos nossa notação, escrevemos para quaisquer $a \in A$ e $h, g \in H$, $a\#h = ah$, $(1_A\#h)(a\#1_H) = ha$ e $(1_A\#h)(a\#g) = hag$.

3.2.1 Função Traço

Vamos generalizar a noção de função traço existente na teoria de ações de grupo em um contexto de ações de álgebras de Hopf. Seja G um grupo finito que age sobre uma álgebra A, definimos a função traço como:

$$\begin{array}{rccc} tr: & A & \to & A^G \\ & a & \mapsto & \sum\limits_{g\in G} g\cdot a. \end{array}$$

Lema 9. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, A um H-módulo álgebra e $0 \neq t \in \int_H^l$. Então a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} \widehat{t}: & A & \to & A \\ & a & \mapsto & \widehat{t}(a) := t\cdot a \end{array}$$

é um morfismo de A^H-bimódulos com valores em A^H.

Demonstração: É óbvio que $\widehat{t}$ é k-linear. Portanto, temos de mostrar que para todos $a \in A$ e $x \in A^H$, $\widehat{t}(xa) = x(\widehat{t}(a))$ e $\widehat{t}(ax) = \widehat{t}(a)x$. Sejam $a \in A$ e $x \in A^H$. Então

$$\begin{aligned} \widehat{t}(xa) &= t\cdot(xa) \\ &= \sum_t (t_1\cdot x)(t_2\cdot a) = \sum_t \varepsilon(t_1)x(t_2\cdot a) \\ &= x(t\cdot a) = x(\widehat{t}(a)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{t}(ax) &= t\cdot(ax) \\ &= \sum_t (t_1\cdot a)(t_2\cdot x) = \sum_t (t_1\cdot a)\varepsilon(t_2)x \\ &= (t\cdot a)x = (\widehat{t}(a))x. \end{aligned}$$

Para finalizar, seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} h\cdot\widehat{t}(a) &= h\cdot(t\cdot a) \\ &= (ht)\cdot a \\ &= (\varepsilon(h)t)\cdot a \\ &= \varepsilon(h)(t\cdot a) \\ &= \varepsilon(h)\widehat{t}(a). \end{aligned}$$

Portanto, $t\cdot a \in A^H$ e o resultado procede.

■

Definição 37. *Sendo H e A como no lema acima. Uma aplicação $\widehat{t}: A \to A^H$ como no Lema 9 é chamada uma função traço de H em A.*

A relação com a definição de traço para ação de grupo reside no fato de que em kG o elemento $t = \sum_{g \in G} g$ é um elemento integral à esquerda.

Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H-módulo álgebra. Com a finalidade de simplificarmos nossa notação, para o próximo lema, escrevemos para quaisquer $a \in A$ e $h, g \in H$, $a\#h = ah$ e $(1_A\#h)(a\#g) = hag$.

Lema 10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H-módulo álgebra. Sejam $h \in H$, $a \in A$ e $t \in \int_H^l$, então $hat = (h \cdot a)t$.*

Demonstração: De fato, pois

$$\begin{aligned} hat &= (1_A\#h)(a\#t) \\ &= \sum_h 1_A(h_1 \cdot a)\#h_2 t \\ &= \sum_h (h_1 \cdot a)\#\varepsilon(h_2)t \\ &= (h \cdot a)\#t = (h \cdot a)t. \end{aligned}$$

■

Lema 11. *Sejam H e A como acima, $t \in H$ uma integral tal que $\widehat{t} : A \to A^H$ sobrejetora. Então existe um elemento idempotente não nulo $e \in A\#H$ tal que $e(A\#H)e = A^H e \cong A^H$ como álgebras.*

Demonstração: Como $1_A \in A^H$ e $\widehat{t}$ é sobrejetora, existe $c \in A$ tal que $\widehat{t}(c) = 1_A$, ou seja, $t \cdot c = 1_A$. Portanto, definimos $e := tc = (1_A\#t)(c\#1_H)$. Claramente e é idempotente, pois pelo Lema 10 temos que $e^2 = (tc)(tc) = (t \cdot c)(tc) = (1_A)tc = tc = e$. Vejamos que vale a igualdade $e(A\#H)e = A^H e$. Sejam $a \in A$ e $h \in H$, então, usando o Lema 10:

$$\begin{aligned} e(a\#h)e &= tc(a\#h)tc \\ &= tca(ht)c \\ &= tca(\varepsilon(h)t)c \\ &= \varepsilon(h)(tcat)c \\ &= \varepsilon(h)(t \cdot (ca))tc \\ &= \varepsilon(h)(t \cdot (ca))e \in A^H e, \end{aligned}$$

uma vez que, como $t \in \int_H^l$, $\varepsilon(h)(t \cdot (ca)) \in A^H$.

Por outro lado, para todo $a \in A^H$ e $t \in \int_H^l$, temos que $\widehat{t}(ca) = t \cdot (ca) = (t \cdot c)a = a$, e então, $ae = atc = (t \cdot c)atc = tcatc \in e(A\#H)e$. Portanto, $e(A\#H)e = A^H e$.

Resta mostrarmos que $A^He \cong A^H$ como álgebras. Defina $\phi : A^H \to A^He$, tal que $\phi(a) = ae$, para qualquer $a \in A^H$. Claramente ϕ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais, e ϕ é morfismo de álgebras pois

$$\begin{aligned}
(ae)(be) &= (atc)(btc) \\
&= a(tcbt)c \\
&= a(t\cdot(cb))tc \\
&= \sum_t a(t_1\cdot c)(t_2\cdot b)tc \\
&= a(t\cdot c)btc \\
&= abtc = abe.
\end{aligned}$$

■

Observação 23. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Notemos que para qualquer $0 \neq t \in \int_H^l$ e para qualquer $h \in H$ temos $th \in \int_H^l$. E como $\int_H^l$ é unidimensional, segue que $th = \alpha(h)t$ para algum $\alpha(h) \in k$. Note que para quaisquer $g, h \in H$ temos $t(hg) = \alpha(hg)t$, mas também temos que $t(hg) = (th)g = \alpha(h)tg = \alpha(h)\alpha(g)t$. Assim $\alpha : H \to k$ é um homomorfismo de álgebras. Por outro lado $\Delta(\alpha)(h\otimes g) = \alpha(h\otimes g) = \alpha(h)\alpha(g) = (\mu(\alpha\otimes\alpha))(h\otimes g)$, portanto $\Delta(\alpha) = \alpha\otimes\alpha$ em H^*. Isto nos motiva à seguinte definição.*

Definição 38. *Seja $0 \neq t \in \int_H^l$. Um elemento $\alpha \in H^*$ é chamado um* ***elemento group like distinto*** *se $\alpha(h)t = th$ para todo $h \in H$.*

Sendo $\alpha \in H^*$ um *elemento group like distinto* e $h \in H$, escrevemos $h^\alpha = \sum_h \alpha(h_2)h_1 \in H$.

Lema 12. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Sejam A um H-módulo álgebra e $0 \neq t \in \int_H^l$. Então para todo $a \in A$, $h \in H$, as seguintes identidades são verificadas em $A\#H$.*

i) $ah = \sum_h h_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)})\cdot a)$.

ii) $tah = t(S^{-1}(h^\alpha)\cdot a)$, *em que α é um elemento group like distinto.*

iii) $(t) = AtA$ *é um ideal de $A\#H$.*

Demonstração:

i) De fato,

$$\begin{aligned}\sum_h h_2(S^{-1}(h_1)\cdot a) &= \sum_h (1_A\#h_2)(S^{-1}(h_1)\cdot a\#1_H)\\ &= \sum_h 1_A(h_2\cdot(S^{-1}(h_1)\cdot a))\#h_3\\ &= \sum_h (h_2S^{-1}(h_1)\cdot a\#h_3\\ &= \sum_h a\#\varepsilon(h_1)h_2\\ &= a\#h = ah.\end{aligned}$$

ii) Pela Observação 23 $t\in\int_H^l$ determina um elemento group like distinto α tal que $th = \alpha(h)t$, assim, usando também o item i), temos

$$\begin{aligned}tah &\overset{i)}{=} \sum_h th_2(S^{-1}(h_1)\cdot a)\\ &= \sum_h \alpha(h_2)t(S^{-1}(h_1)\cdot a)\\ &= \sum_h t(S^{-1}(\alpha(h_2)h_1)\cdot a)\\ &= t(S^{-1}\left(\sum_h \alpha(h_2)h_1\right)\cdot a)\\ &= tS^{-1}(h^{\alpha})\cdot a.\end{aligned}$$

iii) É fácil ver que $\mu((t)\otimes A\#H + A\#H\otimes(t)) = (t)$ uma vez que ii) foi provada. Assim, (t) é ideal de $A\#H$.

■

3.2.2 Um Contexto de Morita relacionando $A\#H$ e A^H

Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H-módulo álgebra. É claro que A é um A^H-módulo à esquerda (à direita) com a ação sendo simplesmente a multiplicação à esquerda (à direita) em A.

Lema 13. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S bijetora. Seja A um H-módulo álgebra, então A é um $A\#H$ módulo à esquerda e à direita via:*

i) $ah\triangleright b = a(h\cdot b)$

ii) $b\triangleleft ah = S^{-1}(h)\cdot(ba)$, *para quaisquer $a,b\in A$ e $h\in H$.*

Demonstração: É óbvio que $i)$ determina uma ação à esquerda, uma vez que A é um H-módulo álgebra. Para provarmos $ii)$ mostraremos apenas a associatividade, pois o resto das propriedades são óbvias. Sejam $a, b, c \in A$ e $h, g \in H$, vamos mostrar que $b \triangleleft (ahcg) = (b \triangleleft ah) \triangleleft cg$. Como $ahcg = \sum_h a(h_1 \cdot c)h_2 g$, temos que

$$b \triangleleft (ahcg) = S^{-1}(h_2 g) \cdot (ba(h_1 \cdot c)) = S^{-1}(g) \cdot \left(\sum_h S^{-1}(h_2) \cdot (ba(h_1 \cdot c)) \right).$$

Agora, como pela Observação 13, $\Delta(S^{-1}(h_2)) = \sum_h S^{-1}(h_3) \otimes S^{-1}(h_2)$, temos que:

$$\begin{aligned}
b \triangleleft (ahcg) &= S^{-1}(g) \cdot \sum_h (S^{-1}(h_3) \cdot (ba))(S^{-1}(h_2) \cdot (h_1 \cdot c)) \\
&= S^{-1}(g) \cdot \sum_h (S^{-1}(h_2) \cdot (ba))(\varepsilon(h_1) 1_H \cdot c)) \\
&= S^{-1}(g) \cdot \left(\left(S^{-1} \left(\sum_h \varepsilon(h_1) h_2 \right) \cdot (ba) \right) c \right) \\
&= S^{-1}(g) \cdot ((S^{-1}(h) \cdot (ba))c) \\
&= S^{-1}(g) \cdot ((b \triangleleft ah)c) \\
&= (b \triangleleft ah) \triangleleft cg.
\end{aligned}$$

■

Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H-módulo álgebra. Pelo Lema 13 A é um $A\#H$-módulo à direita e à esquerda. Certamente, como já foi comentado, A também é um A^H-módulo à direita e à esquerda via multiplicação à direita e à esquerda. Podemos então considerar os dois bimódulos ${}_{A^H}A_{A\#H}$ e ${}_{A\#H}A_{A^H}$. Para enxergarmos que eles são bimódulos basta utilizarmos os fatos de que se $a \in A^H$, $b \in A$ e $h \in H$ então $h \cdot (ab) = a(h \cdot b)$ e $h \cdot (ba) = (h \cdot b)a$ e portanto para quaisquer $c \in A^H$, $a, b \in A$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned}
((ah) \triangleleft b)c &= a(h \cdot b)c \\
&= \sum_h a(h_1 \cdot b)\varepsilon(h_2)c \\
&= \sum_h a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot c) \\
&= a(h \cdot (bc)) \\
&= ah \triangleleft (bc),
\end{aligned}$$

o outro caso é análogo.

Definição 39. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S. Dizemos que H*

tem um elemento integral S-fixo se existe $t \in \int_H^l$ *tal que* $S(t) = t$.

Sendo H de dimensão finita, e $t \in \int_H^l$ como na definição acima, temos imediatamente que $\int_H^l = \int_H^r$, uma vez que $S(\int_H^l) = \int_H^r$.

Apresentaremos nosso contexto de Morita baseados nas ideias apresentadas em [8] que envolvem a definição dada acima, embora em [6] é apresentado um contexto de Morita entre os mesmos módulos envolvendo o conceito da Definição 38.

Antes de prosseguirmos, lembremos o que é um contexto de Morita.

Definição 40. *Um contexto de Morita entre dois anéis R e S é uma sêxtupla* $(R, S, M, N, [\ ,\ ], (\ ,\ ))$, *em que* M *é um* (R,S)*-bimódulo,* N *é um* (S,R)*-bimódulo e* $[\ ,\ ], (\ ,\ )$ *são duas aplicações lineares*

$$[\ ,\ ] : N \otimes_R M \to S \text{ e } (\ ,\ ) : M \otimes_S N \to R$$

tais que

1) $[\ ,\ ]$ *é um homomorfismo de S-bimódulos*

2) $(\ ,\ )$ *é um homomorfismo de R-bimódulos*

3) *Para todo* $m, m' \in M$ *e* $n, n' \in N$, *temos* $m'[n,m] = (m',n)m$ *e* $[n,m]n' = n(m,n')$.

Observação 24. *É fácil ver que* A^H *"centraliza"* H *em* $A\#H$. *No sentido de que para quaisquer* $a \in A^H$, $h \in H$ *temos que*

$$ha = \sum_h (h_1 \cdot a)h_2 = \sum_h \varepsilon(h_1)ah_2 = a\sum_h \varepsilon(h_1)h_2 = ah.$$

Para exibirmos o nosso contexto de Morita, escolhemos $R = A^H$, $S = A\#H$, e usamos $M = N = A$. A é um A^H-módulo à esquerda (à direita) com a ação sendo simplesmente a multiplicação à esquerda (à direita) em A. E A é um $A\#H$-módulo à esquerda via as ações apresentadas no Lema 13.

Teorema 25. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S e com um elemento integral S-fixa* $t \in \int_H^l$. *Considere A como um* A^H*-módulo à esquerda (direita) via multiplicação à esquerda (direita), como um* $A\#H$*-módulo à esquerda e à direita com as ações dadas no Lema 13. Então* $M = {}_{A^H}A_{A\#H}$ *e* $N = {}_{A\#H}A_{A^H}$, *unidos com as aplicações*

$$[\ ,\ ] : A \otimes_{A^H} A \to A\#H \text{ dada por } [a,b] = atb$$

$$(\ ,\ ) : A \otimes_{A\#H} A \to A^H \text{ dada por } (a,b) = \hat{t}(ab) = t \cdot (ab)$$

nos fornece um contexto de Morita para A^H e $A\#H$.

Demonstração: Vamos mostrar que $[,]$ é um homomorfismo de $A\#H$-bimódulos. Pela Observação 24 para quaisquer $b,c \in A$ e $a \in A^H$ temos que

$$\begin{aligned}
[b,ac] &= btac = b\sum_t t_1 \cdot (ac)t_2 \\
&= \sum_t b(t_1 \cdot a)(t_2 \cdot c)t_3 \\
&= \sum_t \varepsilon(t_1)a(t_2 \cdot c)t_3 \\
&= \sum_t ba(t_1 \cdot c)t_2 \\
&= batc = [ba,c],
\end{aligned}$$

e portanto $[,]$ está bem definida. Agora, sejam $ch \in A\#H$ e $a,b \in A$. Então

$$\begin{aligned}
ch[a,b] &= ch(atb) \\
&= c(h\cdot a)tb \qquad \text{(Lema 10)} \\
&= (ch \triangleright a)tb \\
&= [ch \triangleright a, b].
\end{aligned}$$

Agora, notemos que para quaisquer $m \in A$ e $h \in H$, temos que $tmh = t(S^{-1}(h)\cdot m)$. De fato, pois pelo Lema 12 $mh = \sum_h h_2(S^{-1}(h_1)\cdot m)$, e então,

$$tmh = \sum_h th_2(S^{-1}(h_1)\cdot m) = \sum_h t\varepsilon(h_2)(S^{-1}(h_1)\cdot m) = t\left(S^{-1}\left(\sum_h \varepsilon(h_2)h_1\right)\cdot m\right) = t(S^{-1}(h)\cdot m).$$

Em que a segunda igualdade advém do fato de t ser integral S-fixa e portanto é integral à esquerda e à direita. Assim, $[a,b]ch = atbch = at(S^{-1}(h)\cdot(bc)) = at(b \triangleleft ch) = [a, b \triangleleft ch]$.

Agora, sejam $a,b \in A$ e $ch \in A\#H$. Então,

$$\begin{aligned}
(a \lhd ch, b) &= t\cdot((S^{-1}(h)\cdot(ac))b) = t\cdot\sum_h (S^{-1}(h_2)\cdot(ac))\varepsilon(h_1)b \\
&= t\cdot\sum_h (S^{-1}(h_3)\cdot(ac))(S^{-1}(h_2)h_1\cdot b) \\
&= t\cdot\sum_h S^{-1}(h_2)\cdot(ac(h_1\cdot b)) = \sum_h tS^{-1}(h_2)\cdot(ac(h_1\cdot b)) \\
&= \sum_h t\varepsilon(S^{-1}(h_2))\cdot(ac(h_1\cdot b)) = t(\varepsilon(h_2))\cdot(ac(h_1\cdot b)) \\
&= t\cdot\left(ac\left(\sum_h \varepsilon(h_2)h_1\right)\cdot b\right) = t\cdot(ac(h\cdot b)) \\
&= (a, ch \rhd b).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $(,)$ está bem definida. Além do mais, $(,)$ é um homomorfismo de A^H-bimódulos uma vez que mostramos no Lema 9 que $\hat{t}$ é um homomorfismo de A^H-bimódulos.

Resta mostrarmos a condição $iii)$ da definição de contexto de morita. Para isso, sejam $a,b,c \in A$ então

$$\begin{aligned}
a \lhd [b,c] &= a \lhd (btc) = (a \lhd bt) \lhd c \\
&= (S^{-1}(t)\cdot(ab))c = (t\cdot(ab))c \qquad \text{uma vez que } S^{-1}(t) = t \\
&= (a,b)c
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[a,b] \rhd c &= (atb) \rhd c \\
&= (at) \rhd (bc) \\
&= a(t\cdot(bc)) \\
&= a(b,c).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado procede.

■

Maiores informações a cerca de contexto de Morita podem ser encontradas em [7] e informações adicionais sobre um contexto de Morita entre $A\#H$ e A^H, como já foi citado, podem ser encontradas em [6].

3.3 Extensões de Hopf-Galois

Nesta seção, primeiramente damos alguns exemplos de extensões de Hopf-Galois e depois estudamos extensões de Hopf-Galois no caso da álgebra de Hopf ter dimensão finita e então apresentamos algumas caracterização dessas extensões.

Neste capítulo, H sempre denotará uma álgebra de Hopf.

Definição 41. *Sejam A e B k-álgebras, com $B \subset A$, e H uma álgebra de Hopf. Dizemos que $B \subset A$ é uma H-extensão à direita se A é um H-comódulo álgebra com $A^{coH} = B$.*

Definição 42. *Dizemos que uma H-extensão $B \subset A$ é H-fendida se existe um morfismo de H-comódulos à direita $\gamma : H \to A$ que é invertível por convolução.*

A definição de extensão de Hopf-Galois é dada em termos da coação, da seguinte maneira.

Definição 43. *Seja A um H-comódulo álgebra à direita com aplicação estrutural $\rho : A \to A \otimes H$. Dizemos que a H-extensão $A^{coH} \subset A$ é H-Galois à direita se a transformação*

$$can : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_k H \text{ dada por } a \otimes b \mapsto (a \otimes 1_H)\rho(b)$$

é bijetiva.

Observação 26. *Parece haver uma assimetria na definição de can, por que não definimos $can'(a \otimes b) = \rho(a)(1_A \otimes b)$? Na verdade, se a antípoda, S, é bijetiva, então can é sobrejetiva, injetiva ou bijetiva respectivamente se, e somente se, can' é sobrejetiva, injetiva ou bijetiva.*

Isto pode ser visto da seguinte forma: seja $\phi \in End(A \otimes_k H)$ dada por $\phi(a \otimes h) = \rho(a)(1_A \otimes S(h))$. Então ϕ é invertível com inversa dada por $\phi^{-1}(a \otimes h) = (1_A \otimes S^{-1}(h))\rho(a)$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \phi^{-1})(a \otimes h) &= \phi((1_A \otimes S^{-1}(h))\rho(a)) \\
&= \phi(\sum_a a_0 \otimes S^{-1}(h)a_1) \\
&= \sum_a \rho(a_0)(1_A \otimes S(S^{-1}(h)a_1)) \\
&= \sum_a a_0 \otimes a_1 S(S^{-1}(h)a_2) \\
&= \sum_a a_0 \otimes a_1 S(a_2)h \\
&= \sum_a a_0 \varepsilon(a_1) \otimes h \\
&= a \otimes h.
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\phi^{-1}\circ\phi)(a\otimes h) &= \phi^{-1}(\rho(a)(1_A\otimes S(h)))\\
&= \phi^{-1}\left(\sum_a a_0\otimes a_1S(h)\right)\\
&= \sum_a(1_A\otimes S^{-1}(a_1S(h)))\rho(a_0)\\
&= \sum_a a_0\otimes hS^{-1}(a_2)a_1\\
&= \sum_a a_0\otimes h\varepsilon(a_1)\\
&= a\otimes h.
\end{aligned}
$$

Assim, vemos que $\phi\circ can = can'$. E portanto, can é sobrejetiva, injetiva ou bijetiva respectivamente se, e somente se, can' é sobrejetiva, injetiva ou bijetiva.

Nós agora daremos alguns exemplos para ilustrarmos esta definição.

Exemplo 48. *Primeiramente, como deveria ser, a definição clássica de extensão de Galois para corpos deve ser englobada por esta generalização.*

Relembramos alguns fatos da Teoria de Corpos. Seja L um corpo e seja $f(x)\in L[x]$ um polinômio mônico e irredutível, seja $L\subset N$ a extensão que contém todas as raízes de $f(x)$. Dizemos que $f(x)$ é separável sobre L se $f(x)$ não possui raízes múltiplas em N. Sejam $F\subset E \quad (E/F)$ uma extensão algébrica e $x\in E$, dizemos que x é separável sobre F se o polinômio minimal $Irr(x,F)$ é separável sobre F. Dizemos que a extensão algébrica E/F é uma extensão separável se todo elemento de E é separável sobre F. No mesmo contexto, dizemos que E/F é uma extensão normal se para todo $\alpha\in E$, o polinômio minimal $Irr(\alpha,F)$ tem todas as suas raízes em E. Por fim, dizemos que E/F é uma extensão galoisiana (extensão de Galois) se E/F é uma extensão normal e separável. O grau de uma extensão algébrica E/F, denotado por $[E:F]$, é a dimensão do espaço vetorial E sobre F.

É conhecido que E/F é galoisiana com grupo de Galois $G = Gal(E/F) = Aut_F(E)$ se, e somente se, $[E:F] = |G|$ (veja [9] pg. 236).

Outro resultado importante e conhecido é o ***Lema de Dedekind*** *que diz que se E é um corpo e $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in Aut(E)$ são distintos então eles são linearmente independentes (veja [9] pg. 292).*

Seja G um grupo finito agindo por automorfismos em um corpo $E\supset k$, e seja $F = E^G = \{e\in E : g\cdot e = e \quad \forall g\in G\}$. Pelo Exemplo 44, sabemos que E é um kG-módulo álgebra e portanto um $(kG)^*$-comódulo álgebra. Pelo Lema 7 concluímos que $F = E^{kG} = E^{co(kG)^*}$. Suponha que

E/F é galoisiana. Sejam $n = |G|$, $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ uma base de E/F. Seja $\{p_1, \dots, p_n\} \subset (kG)^*$ a base dual para $\{x_1, \dots, x_n\} \subset kG$.

Sabemos que E é um $(kG)^*$-comódulo álgebra à direita via coação

$$\rho : E \to E \otimes (kG)^* \quad \text{dada por} \quad \rho(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot a) \otimes p_i.$$

Logo, $can : E \otimes_F E \to E \otimes (kG)^*$ é dada por $can(a \otimes b) = \sum_{i=1}^{n} a(x_i \cdot b) \otimes p_i$. Seja $w = \sum_j a_j \otimes b_j \in Ker(can)$, então, pela independência linear dos $p_i^{\prime}s$, temos que

$$\sum_j a_j (x_j \cdot b_j) = 0, \quad \forall i,$$

o Lema de Dedekind nos fornece que a matriz $n \times n$ $C = [x_i \cdot b_j]$ é invertível ([9] pg. 292). Assim, $a_j = 0 \quad \forall j$, e portanto $w = 0$. Concluímos que can é injetiva. Mas can é F-linear e ambos, $E \otimes_F E$ e $E \otimes (kG)^*$ são F-espaços vetoriais de dimensão n^2, portanto can é bijetiva. Logo, $F \subset E$ é $(kG)^*$-Galois à direita.

Reciprocamente, temos que $dim_F(E \otimes_F E) = [E : F]^2$ e $dim_F(E \otimes (kG)) = [E : F]|G|$. Se can é um isomorfismo segue que $[E : F] = |G|$, e então E/F é uma extensão galoisiana.

Exemplo 49. *Já vimos que H é um H-comódulo à direita com $\rho = \Delta$. Seja $B = k1_H$. Então a H-extensão $B \subseteq H$ é H-Galois à direita.*

De fato, pelo Exemplo 34 temos que $H^{coH} = B$. Da estrutura de comódulo dada por ρ, temos que $can : H \otimes_B H \to H \otimes_k H$ é dada por $can(h \otimes g) = \sum_k hk_1 \otimes k_2$. Definimos $\gamma : H \otimes H \to H \otimes H$ por $\gamma(h \otimes m) = \sum_m hS(m_1) \otimes m_2$, então

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ can)(h \otimes m) &= \gamma\left(\sum_m hm_1 \otimes m_2\right) \\
&= \sum_m hm_1 S(m_2) \otimes m_3 \\
&= \sum_m h\varepsilon(m_1) \otimes m_2 \\
&= h \otimes \sum_m \varepsilon(m_1) m_2 \\
&= h \otimes m,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(can\circ\gamma)(h\otimes m) &= can\left(\sum_m hS(m_1)\otimes m_2\right)\\ &= \sum_m hS(m_1)m_2\otimes m_3\\ &= \sum_m h\varepsilon(m_1)\otimes m_2\\ &= h\otimes\sum_m \varepsilon(m_1)m_2\\ &= h\otimes m.\end{aligned}$$

Portanto, can é bijetora e então $B\subseteq H$ é uma extensão H-Galois à direita.

No nosso próximo exemplo, consideramos extensões kG-Galois.

Exemplo 50. *Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada. Dizemos que A é fortemente graduada se $A_gA_h = A_{gh}$ para quaisquer $g,h\in G$.*

Sendo A uma álgebra G-graduada são equivalentes

i) A é fortemente graduada.

ii) $A_gA_{g^{-1}} = A_e$ para todo $g\in G$.

iii) Para cada $g\in G$, existem $a_i^g\in A_g$ e $b_i^{g^{-1}}\in A_{g^{-1}}$ tais que $\sum_i a_i^g b_i^{g^{-1}} = 1_A$

Demonstração: *$i)\Rightarrow ii)$ é óbvio. Como $1_A\in A_e$, então $ii)\Rightarrow iii)$ é claro. É suficiente mostrarmos que $iii)\Rightarrow i)$. Sejam $g,h\in G$. Sabemos que $A_gA_h\in A_{gh}$, então é suficiente mostrarmos a inclusão contrária. Seja $a\in A_{gh}$. Assumindo iii), existem $a_i^g\in A_g$ e $b_i^g\in A_{g^{-1}}$ tais que $\sum_i a_i^g b_i^{g^{-1}} = 1_A$. Então*

$$a = 1_A a = \sum_i a_i^g(b_i^{g^{-1}}a),$$

mas $a_i^g\in A_g$ e $b_i^{g^{-1}}a\in A_{g^{-1}}A_{gh}\subseteq A_h$. Portanto $a\in A_gA_h$.

■

Seja A um kG-comódulo álgebra. Então $A_e\subseteq A$ é kG-Galois à direita se, e somente se, A é fortemente graduada.

Demonstração: ($\Rightarrow$) *Assuma que* $A_e \subseteq A$ *é kG-Galois à direita. Então para cada* $g \in G$ *existem* $a_i, b_i \in A$ *tais que* $can(\sum_i a_i \otimes b_i) = 1_A \otimes g$. *Pelo Exemplo 47 A é uma álgebra G-graduada, então podemos escrever* $a_i = \sum_{u \in G} a_i^u$ *e* $b_i = \sum_{v \in G} b_i^v$ *tais que* $a_i^u \in A_u$ *e* $b_i^v \in A_v$. *Assim, temos que*

$$1_A \otimes g = can(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_{u,v \in G} (\sum_i a_i^u b_i^v) \otimes v.$$

Mas isto implica que $\sum_{u \in G} (\sum_i a_i^u b_i^g) = 1_A \in A_e$. *Mas também temos que* $\sum_i a_i^u b_i^g \in A_{ug}$, *como u percorre G, então ug também percorre. Uma vez que a soma dos* A_g'*s é direta, concluímos que* $\sum_i a_i^u b_i^g = 0$ *para todo* $u \neq g^{-1}$. *Portanto* $\sum_i a_i^{g^{-1}} b_i^g = 1_A$, *donde segue que A é fortemente graduada.*

($\Leftarrow$) *Agora, suponha que A é fortemente graduada. Então para cada* $g \in G$, *existem* $a_i^{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}$ *e* $b_i^g \in A_g$ *tais que displaystyle*$\sum_i a_i^{g^{-1}} b_i^g = 1_A$. *Vamos mostrar que can é bijetora. Defina* $\gamma : A \otimes_k kG \to A \otimes_{A_e} A$ *por* $\gamma(a \otimes g) = \sum_i a a_i^{g^{-1}} \otimes b_i^g$. *Temos que*

$$\begin{aligned}
(can \circ \gamma)(a \otimes g) &= can(\sum_i a a_i^{g^{-1}} \otimes b_i^g) \\
&= \sum_i a a_i^{g^{-1}} b_i^g \otimes g \\
&= a \otimes g.
\end{aligned}$$

Finalmente, precisamos mostrar que para quaisquer $a, b \in A$ *temos* $(\gamma \circ can)(a \otimes b) = a \otimes b$. *Como* $A = \sum_{g \in G} A_g$, *então é suficiente mostrarmos isto para* $b \in A_g$ *para cada* $g \in G$. *Temos*

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ can)(a \otimes b) &= \gamma(ab \otimes g) \\
&= \sum_i ab a_i^{g^{-1}} \otimes b_i^g \\
&= \sum_i ab a_i^{g^{-1}} \otimes b_i^g \\
&= \sum_i a \otimes b a_i^{g^{-1}} b_i^g \qquad \text{, pois } b a_i^{g^{-1}} \in A_e \\
&= a \otimes b.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

3.3.1 Extensões de Galois para álgebras de Hopf de dimensão finita

Assumimos agora que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A é um H-módulo álgebra (e pela Proposição 18 um H^*-comódulo álgebra).

O seguinte lema nos será útil na demonstração do próximo resultado.

Lema 14. *Seja* $0 \neq t \in \int_H^l$. *Então* $\theta : H^* \to H$ *dado por* $\theta(f) = \sum_t f(t_1)t_2$ *é um isomorfismo de* H^**-módulos à direita.*

Demonstração: Lembramos que H^* é um H^*-módulo à direita via multiplicação à direita e que H é um H^*-módulo à direita via ação $h \leftharpoonup f = \sum_h f(h_1)h_2$ para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$.

É óbvio que θ é k-linear. Vamos mostrar que θ é um morfismo de H^*-módulos à direita, para isso, temos que mostrar que $\theta(f * g) = \theta(f) \leftharpoonup g$. Por um lado temos que

$$\begin{aligned}
\theta(f*g) &= \sum_t (f*g)(t_1)t_2 \\
&= \sum_t f(t_1)g(t_2)t_3 \\
&= \sum_t g(f(t_1)t_2)t_3. \qquad (I)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\theta(f) \leftharpoonup g &= \mu((g \otimes id)(\Delta(\theta(f)))) \\
&= \mu\left((g \otimes id)\left(\Delta\left(\sum_t f(t_1)t_2\right)\right)\right) \\
&= \mu\left((g \otimes id)\left(\sum_t f(t_1)t_2 \otimes t_3\right)\right) \\
&= \sum_t g(f(t_1)t_2)t_3. \qquad (II)
\end{aligned}$$

Da igualdade entre (I) e (II), obtemos que $\theta(f * g) = \theta(f) \leftharpoonup g$.

Resta mostrarmos que θ é injetiva e sobrejetiva.

$\vdash$ θ é injetiva.

Pelo Lema 8 H é um H^*-módulo de Hopf e portanto pelo Teorema 16 $H^{coH^*} \otimes H^* \cong H$ via $\alpha(h \otimes f) = h \leftharpoonup f$. Mas pela Observação 19 $H^{coH^*} = \int_H^l$. Notemos que $H^* \hookrightarrow \int_H^l \otimes H^*$ e

$\theta(f) = \alpha(t \otimes f)$. Sendo α um isomorfismo e a inclusão injetora, segue que θ é injetiva. $\dashv$

Como H tem dimensão finita, segue que θ é uma bijeção. Portanto o resultado procede.

■

Teorema 27. *Seja $can : A \otimes_{A^H} A \to A \otimes H^*$ a transformação de Galois como na Definição 41 sobrejetiva. Então*

i) Existe uma base dual de A como A^H-módulo à direita;

ii) can é injetiva e portanto sobrejetiva.

Demonstração:

i) Pelo Lema 14 temos que $\theta : H^* \to H$ é um isomorfismo de H^*-módulos à direita. Escolhemos $T \in H^*$ tal que $\theta(T) = 1_H$.

Suponha que *can* é sobrejetora. Então existem $a_i, b_i \in A$ tais que

$$1_A \otimes T = can\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{b_i} b_{i_0} \otimes b_{i_1}. \tag{3.3}$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ seja, para todo $a \in A$, $\phi_i(a) = t \cdot (b_i a) \in A^H$, pois $t \in \int_H^l$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(a) &= \sum_{i=1}^{n} a_i (t \cdot b a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_t a_i (t_1 \cdot b_i)(t_2 \cdot a) \\
&\overset{(\blacktriangle)}{=} \sum_t \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{b_i} b_{i_0} b_{i_1}(t_1)(t_2 \cdot a) \\
&= \sum_t T(t_1)(t_2 \cdot a) \qquad (\text{ por } 3.3 \text{ }) \\
&= \theta(T) \cdot a = a, \qquad \forall a \in A.
\end{aligned}$$

E assim, $a_1, \ldots, a_n$ e $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são bases duais de A sobre A^H.

A igualdade em $(\blacktriangle)$ é válida, pois A é um H^*-comódulo à direita e portanto é H-módulo à esquerda via $h \cdot b = \sum_b b_0 b_1(h)$.

ii) Este item não será demonstrado aqui, sua demonstração encontra-se em ([6], pg. 132).

■

Antes de apresentarmos o último resultado do trabalho, vamos mostrar o seguinte lema que será útil no Teorema em que caracterizamos extensões de Hopf-Galois.

Lema 15. *Sejam A um H-módulo álgebra à esquerda, M um $A\#H$-módulo à esquerda. Então $A\otimes_{A^H} M^H$ é um $A\#H$-módulo à esquerda via ação $(a\#h)\rhd(b\otimes m)=a(h\cdot b)\otimes m$, para todos $a,b\in A$, $h\in H$ e $m\in M^H$, em que $M^H=\{m\in M:(1_A\#h)\cdot m=\varepsilon(h)m,\quad \forall h\in H\}$.*

Demonstração: A k-linearidade da ação é obvia. Sejam $a,b,c\in A$, $h,g\in H$ e $m\in M^H$.Por um lado temos que

$$\begin{aligned}(a\#h)\rhd((b\#g)\rhd(c\otimes m)) &= (a\#h)\rhd(b(g\cdot c)\otimes m)\\ &= \sum_h a(h_1\cdot b)(h_2 g\cdot c)\otimes m. \qquad (I)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}((a\#h)(b\#g))\cdot(c\otimes m) &= \left(\sum_h a(h_1\cdot b)\#h_2 g\right)\rhd(c\otimes m)\\ &= \sum_h a(h_1\cdot b)(h_2 g\cdot c)\otimes m. \qquad (II)\end{aligned}$$

A igualdade entre (I) e (II) nos garante que $((a\#h)(b\#g))\cdot(c\otimes m)=(a\#h)\rhd((b\#g)\rhd(c\otimes m))$. E ainda,

$$\begin{aligned}(1_A\#1_H)\rhd(c\otimes m) &= 1_A(1_H\cdot c)\otimes m\\ &= 1_A c\otimes m\\ &= c\otimes m.\end{aligned}$$

Portanto o resultado procede.

∎

Observação 28. *Considere A um H-módulo álgebra à esquerda e seja $M=A\#H$ um $A\#H$-módulo à esquerda via multiplicação à esquerda. Então $M^H=(1_A\#t)(A\#1_H)=tA$ para $0\neq t\in\int_H^l$. Este resultado encontra-se demonstrado em ([6], pg. 134) e será útil na demonstração do nosso último resultado.*

Agora, apresentaremos o principal resultado do nosso trabalho, onde caracterizamos extensões de Hopf-Galois.

Teorema 29. *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então são equivalentes:*

i) $A^H \subseteq A$ *é* H^**-Galois à direita;*

ii) *Se* $0 \neq t \in \int_H^l$ *então a aplicação* $[,] : A \otimes_{A^H} A \to A\#H$ *dada por* $[a,b] = atb = (a\#1_H)(1_A\#t)(b\#1_H)$ *é sobrejetora;*

iii) *Para qualquer* $A\#H$*-módulo à esquerda* M*, considere* $A \otimes_{A^H} M^H$ *como* $A\#H$*-módulo à esquerda com ação dada pelo Lema 15. Então a aplicação* $\phi : A \otimes_{A^H} M^H \to M$ *dada por* $a \otimes m_0 \mapsto (a\#1_H) \triangleright m_0$ *é um isomorfismo de* $A\#H$*-módulos à esquerda. Aqui* $(\triangleright)$ *denota a ação de* $A\#H$ *em* M *e* $(\cdot)$ *denota a ação de* H *em* A.

Demonstração: $i) \Leftrightarrow ii)$

Seja $0 \neq t \in \int_H^l$. Vimos, pelo Lema 14 que $\theta : H^* \to H$ dada por $\theta(f) = \sum_t f(t_1)t_2$ é um isomorfismo de H^*-módulos à direita.

$\vdash [,] = (id \otimes \theta) \circ can$, em que $can : A \otimes_{A^H} A \to A \otimes H^*$.

De fato, sejam $a, b \in A$. Então

$$\begin{aligned}((id \otimes \theta) \circ can)(a \otimes b) &= \sum_b ab_0 \otimes (\sum_t b_1(t_1)t_2) \\ &= \sum_b \sum_t ab_0 b_1(t_1) \otimes t_2 \\ &= \sum_t a(t_1 \cdot b) \otimes t_2 \qquad (\text{ mesmo argumento utilizado em } (\blacktriangle)) \\ &= (a\#t)(b\#1_H) = atb \\ &= [a,b].\end{aligned}$$

Portanto, uma vez que θ é uma bijeção, segue que $[,]$ é sobrejetora $\Leftrightarrow$ can é sobrejetora. Logo $i) \Rightarrow ii)$. Também segue que $ii) \Rightarrow i)$, uma vez que $dim(H) < \infty$ e, portanto, pelo Teorema 27, item $ii)$, o resultado procede.

$iii) \Rightarrow ii)$

Assumindo $iii)$, escolhemos $M = A\#H$, pela Observação 28, $M^H = tA$, para $0 \neq t \in \int_H^l$. Assim, $iii)$ implica que $\phi : A \otimes_{A^H} tA \to A\#H$, dada por $a \otimes tb \mapsto atb$ é um isomorfismo. E também temos que $A \otimes_{A^H} tA \cong A \otimes_{A^H} A$ via $a \otimes tb \mapsto a \otimes b$. Combinando estes dois isomorfismos, obtemos $ii)$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*)

Assumindo que $[,]$ é sobrejetora, temos que, para $0 \neq t \in \int_H^l$, $(t) = AtA = A\#H$. Portanto existem $\{b_i\}, \{c_i\} \subseteq A$ tais que $1_A\#1_H = \sum_{i=1}^{n} b_i t c_i$. Seja $d_i = tc_i$, como $t \in \int_H^l$, temos que $d_i \triangleright M \subseteq M^H$, para qualquer $A\#H$-módulo à esquerda M. Então podemos definir $\chi : M \to A \otimes_{A^H} M^H$ dada por $m \mapsto \sum_i b_i \otimes (d_i \triangleright m)$. Afirmamos que ϕ dada no item *iii*) e χ são inversas uma da outra. De fato, seja $m \in M$, então

$$
\begin{aligned}
(\phi \circ \chi)(m) &= \phi\left(\sum_i b_i \otimes (d_i \triangleright m)\right) \\
&= \sum_i b_i \triangleright (d_i \triangleright m) \\
&= \left(\sum_i b_i d_i\right) \triangleright m \\
&= m,
\end{aligned}
$$

uma vez que $1_A\#1_H = \sum_{i=1}^{n} b_i d_i$. E, para quaisquer $a \in A$ e $m_0 \in M^H$, temos

$$
\begin{aligned}
(\chi \circ \phi)(a \otimes m_0) &= \chi((a\#1_H) \triangleright m_0) \\
&= \sum_i b_i \otimes (d_i \triangleright ((a\#1_H) \triangleright m_0) \\
&= \sum_i b_i \otimes (d_i a) \triangleright m_0 \\
&= \sum_i b_i \otimes (tc_i a) \triangleright m_0 \\
&= \sum_{i,t} b_i \otimes ((t_1 \cdot c_i a)\#t_2) \triangleright m_0 \\
&= \sum_{i,t} b_i \otimes ((t_1 \cdot c_i a) \triangleright (t_2 \triangleright m_0)) \\
&= \sum_{i,t} b_i \otimes (t_1 \cdot c_i a) \triangleright (\varepsilon(t_2) m_0) \qquad \text{pois } m_0 \in M^H \\
&= \sum_i b_i \otimes (t \cdot c_i a) \triangleright m_0 \\
&= \sum_i b_i (t \cdot c_i a) \otimes m_0 \qquad \text{pois } t \cdot c_i a \in A^H \\
&= \sum_i (b_i t c_i) \cdot a \otimes m_0 \\
&= a \otimes m_0,
\end{aligned}
$$

em que a penúltima igualdade segue do fato de que $A\#H$ age em A via $(a\#h) \cdot b = a(h \cdot b)$, e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_i (b_i t c_i)\cdot a &= \sum_i (b_i\#t)(c_i\#1_H)\cdot a \\
&= \sum_i (b_i\#t)\cdot((c_i\#1_H)\cdot a) \\
&= \sum_i (b_i\#t)\cdot(c_i a) \\
&= \sum_i b_i(t\cdot(c_i a)).
\end{aligned}$$

Sejam $a, b \in A$, $h \in H$ e $m_0 \in M^H$, então

$$\begin{aligned}
(b\#h)\phi(a\otimes m_0) &= b(1_A\#h)(a\#1_H \triangleright m_0) \\
&= b\left(\sum_h (h_1\cdot a)\#h_2\right) \triangleright m_0 \\
&= b\left(\sum_h ((h_1\cdot a)\#1_H) \triangleright \varepsilon(h_2)m_0\right) \qquad \text{pois } m_0 \in M^H \\
&= (b(h\cdot a)\#1_H) \triangleright m_0 \\
&= \phi((b\#h)\cdot(a\otimes m_0)).
\end{aligned}$$

Consequentemente, o resultado procede.

■

Referências Bibliográficas

[1] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, S. Hopf algebras: an introduction. Marcel Dekker, (2001).

[2] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. Linear Algebra. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1971).

[3] TIMMERMANN, T. An invitation to quantum groups and duality: from Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond. European Mathematical Society, (2008).

[4] KLIMYK, A.; SCHMUDGEN, K. Quantum groups and their representations. Springer Berlin, (1997).

[5] SWEEDLER, M. Hopf algebras. WA Benjamin, (1969).

[6] MONTGOMERY, S. Hopf algebras and their actions on rings. American Mathematical Society, (1993).

[7] JACOBSON, N. Basic Algebra II. Dover Publications, (2009).

[8] COHEN, M.; FISHMAN, D. Hopf algebra actions. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 100, n. 2, p. 363–379, (1986).

[9] JACOBSON, N. Basic Algebra I. Dover Publications, (2009).