Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore

Giovani Goraiebe Pollachini

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Março de 2015

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Giovani Goraiebe Pollachini

Florianópolis
Março de 2015

Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore

por

Giovani Goraiebe Pollachini

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (UFPR)

Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari (UFSC)

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro (UFSC)

Florianópolis, 04 de março de 2015.

À minha familia (que também são meus amigos!) e amigos (que também são minha família!).

Agradecimentos

Quero agradecer aos meus pais, Alexandre e Graça, por todos os cuidados, amor e carinho, por acreditarem nos sonhos meus e dos meus irmãos, e por permitirem que eu more em casa mesmo depois dos 18 anos ;-) .

Agradeço aos meus irmãos Maurício e Daniel pela companhia, pelas jogatinas, brincadeiras e aventuras de infância (que continuam até hoje!). Aos meus irmãos David e Herbert, que conheci um pouco mais tarde, e aos meus primos todos, agradeço pela amizade e companheirismo. Estendo esses agradecimentos à toda família (vai ser difícil citar todos!), vocês todos são muito importantes para mim!

Também agradeço aos amigos pela amizade incondicional, pela diversão, café, trabalho, esporte, bar... Por compartilharem momentos alegres e difíceis. Pela companhia de sempre, que parece fazer efeito mesmo quando passamos muito tempo distantes. Não vão faltar momentos de reencontro e animação, podem ter certeza! Não vou poder citar os nomes de todos, como gostaria, pois vai faltar tempo e espaço. Sério, tenho que mandar imprimir e entregar o mais rápido possível para continuar no prazo!

Agradeço ao meu orientador, prof. Eliezer Batista, pelo incentivo e amizade. Estendo a todos os membros da banca, que gentilmente ofereceram correções e sugestões importantes. Espero ter atendido a todas essas correções com o rigor necessário. Também estendo o agradecimento aos professores que acompanharam minha trajetória, pelos ensinamentos criteriosos durante todo esse tempo, tanto do ponto de vista técnico como pessoal.

Agradeço à UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina - pela minha formação e pela infraestrutura necessária. E à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo apoio financeiro, essencial aos estudantes.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo explorar algumas álgebras de Hopf construídas a partir de grafos do tipo árvore (com raiz). Estudam-se as álgebras de Connes-Kreimer e a de Grossman-Larson, e busca-se uma relação entre essas duas álgebras de Hopf. A relação encontrada é a dualidade separante.

Também explora-se uma versão para árvores ordenadas das álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson. Prova-se a dualidade dessas duas álgebras seguindo a ideia do caso anterior, mas não se consegue obter que a dualidade é separante. Um contraexemplo para isso é mostrado.

Os capítulos iniciais apresentam a teoria básica de álgebras de Hopf e de Lie necessária para a leitura deste trabalho. Alguns resultados sobre biálgebras conexas com filtração e com graduação são vistos no capítulo 4, incluindo a demonstração do teorema de Milnor-Moore. O capítulo 5 apresenta as árvores (não-ordenadas e ordenadas) e as álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson obtidas a partir das mesmas. Termina-se apresentando o teorema de Panaite e a dualidade entre essas duas álgebras de Hopf.

Palavras-chave:
Árvores com raiz. Árvores com raiz ordenadas. Álgebra de Connes-Kreimer. Álgebra de Grossman-Larson. Teorema de Panaite.

Abstract

The present work explores some Hopf algebras built over rooted trees. The Hopf algebras of Connes-Kreimer and Grossman-Larson are studied, and a relationship between these algebras is investigated. The relationship between these algebras turns out to be a separating duality.

A version of the Connes-Kreimer and Grossman-Larson algebras using ordered rooted trees is also investigated. A duality between these algebras is obtained, in the same way as the non-ordered case. However, it is not a separating duality, and a counterexample is shown.

The first three chapters present the basic theory of Hopf algebras and Lie algebras required for the remainder of the work. Some results concerning gradded and filtered connected bialgebras are shown in chapter 4, including the proof of the Milnor-Moore theorem. The chapter 5 presents (non-ordered and ordered) rooted trees and the Connes-Kreimer and Grossman-Larson algebras built over them. A duality between these two algebras is, then, shown, by means of Panaite's theorem.

Key-words:
Rooted trees. Ordered rooted trees. The Connes-Kreimer algebra. The Grossman-Larson algebra. Panaite's theorem.

Sumário

Introdução

Breve histórico

As álgebras de Hopf são álgebras com uma série de estruturas adicionais. Elas têm estrutura de álgebra e de coálgebra (uma espécie de dualização da estrutura de álgebra), que são compatíveis de uma certa maneira. Além disso, há uma espécie de "inversão", a chamada antípoda. Apesar da quantidade de requisitos, essas estruturas aparecem em muitas áreas da matemática.

O início desse assunto remonta a 1941, quando o matemático alemão Heinz Hopf (1894-1991) estuda essa álgebra no contexto de topologia algébrica. Mais tarde, o assunto ganha independência, e por volta de 1969 começa a surgir uma teoria geral para álgebras de Hopf. Ao mesmo tempo, aplicações em várias áreas da matemática são descobertas.

Para exemplificar as aplicações, citamos [2], que menciona em seu prefácio a presença das álgebras de Hopf em teoria de números, geometria algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, teoria de aneis graduados, teoria de operadores, grupos localmente compactos, distribuições, combinatória, teoria de representações, entre outros. Também aparecem na física, com os chamados grupos quânticos, e em ciência da computação.

Passamos aos grafos tipo árvore. Um dos primeiros estudos foi feito em 1857 por Arthur Cayley (1821-1895). As árvores também foram estudadas por James Joseph Sylvester (1806-1897), Georg Pólya (1887-1985), entre outros. Nessa época, o interesse era usar grafos para contar isótopos de certas moléculas, conforme consta em [4].

Em 1972, J. C. Butcher publicou um artigo em que estuda os métodos

Runge-Kutta, em análise numérica, usando árvores com raiz. Descobriu, então, uma conexão entre grafos tipo árvore com raiz e derivadas de várias ordens da expansão da solução da EDO de primeira ordem $\dot{x} = F(x)$; essa expansão, inclusive, ficou conhecida na literatura como série de Butcher, ou *B-series*. É possível encontrar esse assunto desenvolvido em detalhes no livro [1], de autoria do próprio Butcher, e no artigo [11], entre outros.

Por outro lado, em alguns trabalhos de geometria não comutativa, surge uma álgebra (de Hopf) gerada pelas árvores com raiz. Os matemáticos A. Connes e D. Kreimer encontram uma conexão entre essa álgebra e a álgebra de difeomorfismos. A álgebra de árvores também foi proposta para organizar a difícil combinatória da renormalização em teoria quântica de campos, conforme aponta [11]. Essa álgebra é estudada no presente trabalho, e aqui é denotada por $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

No fim da década de 80, R. Grossman e R. G. Larson introduziram uma outra álgebra de Hopf com base nas árvores, motivados por algumas ideias em operadores diferenciais e equações diferenciais, como mencionado em [19]. Estudamos também essa álgebra, aqui sendo denotada por $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$.

Ainda, F. Panaite aponta, no artigo [19], uma conexão entre as duas álgebras $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ via dualidade. A demonstração contém um equivoco numa passagem, mas com uma correção devida a M. E. Hoffman, em [18], o resultado continua válido.

Motivação e estrutura da dissertação

A presente dissertação foi motivada, inicialmente, pela leitura do artigo [11]. O intuito era estudar, se possível, alguma conexão entre álgebras de Hopf e a renormalização em Teoria Quântica de Campos. O assunto esbarrou em uma série de pré-requisitos, e conforme buscávamos suprir esses pré-requisitos, o trabalho gradualmente se direcionou para o estudo das álgebras sobre árvores com raiz.

Para o estudo das árvores com raiz, há bastante literatura a respeito direcionada à teoria de grafos e análise numérica, como por exemplo [1], [5] e [4]. Com relação a estruturas de álgebra de Hopf sobre as árvores com raiz, no entanto, são poucas as referências que contêm um material introdutório e mais acessível a quem está começando. Destacamos o artigo [15], que contém uma ótima introdução ao assunto.

Esta dissertação contém 5 capítulos, descritos abaixo. Os pré-requisitos necessários são um curso em Álgebra Linear, para se ter familiaridade com espaços vetoriais, soma direta, transformações lineares, teoremas do isomorfismo, e um conhecimento básico sobre produto tensorial de espaços vetoriais.

O capítulo 1 traz os pré-requisitos para se estudar álgebras de Hopf. Abordamos o conceito de álgebra do ponto de vista categórico, que motiva a definição de uma estrutura dual, a coálgebra. Estudamos, também, as biálgebras, que são o pano de fundo para as álgebras de Hopf.

No capítulo 2, abordamos alguns elementos da teoria clássica de álgebras de Hopf, com ênfase nos resultados e construções necessárias nos próximos capítulos. Seguimos os textos clássicos [2] e [8], e a dissertação [10].

O capítulo 3 trata de álgebras de Lie. Fazemos uma exposição básica, com foco na álgebra envolvente universal, que é uma álgebra de Hopf. Abordamos um conhecido teorema da área: o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. As referências utilizadas são os livros [6] e [7], o artigo [16] e a dissertação [9].

Começamos com um material mais específico no capítulo 4, em que tratamos de biálgebras conexas com filtração e com graduação. Apresentamos que toda biálgebra conexa com graduação é uma álgebra de Hopf. Com relação às biálgebras conexas com filtração, apresentamos o teorema de Milnor-Moore, que em certas condições, garante que conseguimos recuperar uma biálgebra a partir dos seus elementos primitivos via o recobrimento universal. Para esse capítulo, consultamos o livro [3] e o artigo [15].

Por fim, no capítulo 5, fazemos uma introdução às árvores com raiz, e definimos as álgebras de Hopf de Connes-Kreimer $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$. Mostramos que são álgebras de Hopf e exibimos suas estruturas, com vários exemplos. Abordamos a relação entre essas álgebras, e para tanto, utilizamos o teorema de Panaite em [19], com a correção sugerida em [18]. Obtemos que as duas álgebras estão em dualidade separante. Também apresentamos as árvores (com raiz) ordenadas, e tentamos repetir os passos do caso das árvores (não-ordenadas). Mostramos as estruturas de álgebra de Hopf para as versões com árvores ordenadas das álgebras de Connes-Kreimer $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$, e mostramos um teorema análogo ao de Panaite para esse caso. Obtemos que as duas álgebras, na versão ordenada, também estão em dualidade, mas o par dual análogo ao do outro caso não é separante. Para as definições de $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$, nos contextos não-ordenado e ordenado, usamos o artigo [15].

Capítulo 1

Álgebras, coálgebras e biálgebras

Neste capítulo apresentamos alguns pré-requisitos para a leitura do trabalho. Precisamos dos conceitos de álgebra, coálgebra e biálgebra para o estudo das Álgebras de Hopf. Apresentamos as definições e alguns elementos da teoria de álgebras com uma linguagem categorial, que evidencia a possibilidade de se dualizar essa estrutura. Fazemos um pequeno estudo dessa estrutura dual, a coálgebra. Encerramos o capítulo estudando as biálgebras, que são álgebras e coálgebras ao mesmo tempo e têm uma compatibilidade entre essas estruturas.

1.1 Álgebras

Nesta seção iremos estudar álgebras de um ponto de vista categórico. As diversas propriedades, como associatividade, comutatividade, unidade serão traduzidas em termos de diagramas comutativos. Essa abordagem possibilitará posteriormente a definição de uma estrutura dual, a estrutura de *coálgebra*.

1.1.1 Definição e exemplos

Definição 1.1.1. Uma $\mathbb{K}$-*álgebra* (associativa e com unidade) é uma tripla (A, μ, η), em que:

1. A é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

2. $\mu\colon A\otimes A\to A$ e $\eta\colon \mathbb{K}\to A$ são transformações lineares;

3. os diagramas a seguir comutam:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{Id}"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathbb{K}\otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes\mathrm{Id}"] & & A\otimes\mathbb{K} \arrow[ul, "\mathrm{Id}\otimes\eta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\varphi_l", "\cong"'] \arrow[ur, "\varphi_r"', "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

$$\mu\circ(\mathrm{Id}\otimes\mu)=\mu\circ(\mu\otimes\mathrm{Id})$$

$$\mu\circ(\eta\otimes\mathrm{Id})\circ\varphi_l=\mathrm{Id}$$
$$\mu\circ(\mathrm{Id}\otimes\eta)\circ\varphi_r=\mathrm{Id}$$

Nos diagramas acima, temos as φ_l e φ_r transformações lineares e bijetoras, dadas por

$$\varphi_l\colon A\to\mathbb{K}\otimes A$$
$$\varphi_r\colon A\to A\otimes\mathbb{K}$$

com $\varphi_l(a)=1_{\mathbb{K}}\otimes a$ e $\varphi_r(a)=a\otimes 1_{\mathbb{K}}$, para todo $a\in A$.

Além disso, diz-se que a $\mathbb{K}$-álgebra é *comutativa* se o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

$$\mu\circ\tau=\mu$$

onde $\tau\colon A\otimes A\to A\otimes A$ é o operador de transposição, dado nos monômios de $A\otimes A$ por $\tau(a\otimes b)=b\otimes a$.

Observação 1.1.2. Para encurtar a notação, quando não há confusão, se costuma omitir o corpo em que se está trabalhando. Também se costuma omitir a tripla que define a álgebra, apenas mencionando o espaço vetorial. Os morfismos ficam implícitos no contexto. Dessa forma, costuma-se dizer "considere uma álgebra A" em vez de "considere uma $\mathbb{K}$-álgebra (A,μ,η)".

Observação 1.1.3. É possível verificar que essa definição é coerente com a definição usual de álgebra associativa com unidade[1]. De fato, as correspondências

$$\mu(a \otimes b) = a \cdot b$$
$$\eta(1) = 1_A$$

fornecem uma definição de μ e η em termos de $\cdot$ e 1_A e vice-versa[2].

A associatividade corresponde à comutatividade do diagrama da esquerda:

$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c) = (ab)c$$
$$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id})(a \otimes b \otimes c) = a(bc) \qquad \forall a, b, c \in A\ .$$

A propriedade do elemento neutro do produto corresponde ao diagrama da direita da definição apresentada acima:

$$\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}) \circ \varphi_l(a) = 1_A \cdot a$$
$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \eta) \circ \varphi_r(a) = a \cdot 1_A \qquad \forall a \in A\ .$$

Além disso, as propriedades de compatibilidade das estruturas de anel e espaço vetorial

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$
$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$
$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) \qquad \forall a, b, c \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

se traduzem na linearidade dos morfismos μ e η.

Observação 1.1.4. A comutatividade da álgebra, quando ocorre, é traduzida no terceiro diagrama da definição

$$\mu \circ \tau(a \otimes b) = b \cdot a$$
$$\mu(a \otimes b) = a \cdot b \qquad \forall a, b \in A\ .$$

Vamos a alguns exemplos.

[1]Definição em termos de uma operação bilinear $\cdot : A \times A \to A$, o produto, e de uma unidade 1_A. Ou ainda, A tem estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e de anel associativo com unidade.

[2]Usa-se a propriedade universal do produto tensorial para obter μ linear a partir da função bilinear $\cdot$.

Exemplo 1.1.5 ($\mathbb{K}$ é uma álgebra)**.** O corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra (comutativa), com o produto dado pela multiplicação do corpo e a unidade, pela unidade do corpo. Em termos de morfismos, temos:

$$\mu_{\mathbb{K}}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \cdot \beta$$
$$\eta_{\mathbb{K}}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \ .$$

Exemplo 1.1.6 (Álgebra de polinômios a uma variável)**.** Seja $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinômios $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ corpo. $\mathbb{K}[x]$ é uma álgebra (comutativa), com soma e multiplicação por escalar usuais, e produto dado por $a_n x^n \cdot b_m x^m = a_n b_m x^{n+m}$ (e estendido distributivamente para quaisquer dois polinômios, já que estes são somas finitas de monômios).

Exemplo 1.1.7 (Álgebra das matrizes $n \times n$)**.** Seja M_n o conjunto das matrizes $n \times n$, munido da soma e produto por escalar usuais. O produto matricial e a unidade Id tornam M_n uma álgebra (não comutativa).

Exemplo 1.1.8 (Álgebra das séries de potência formais)**.** Seja $\mathbb{K}[[x]]$ o conjunto das séries de pontências formais. Isto é, o conjunto cujos elementos são somas formais

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ x^n = (a_n)_{n=0}^{\infty} \ ,$$

que podem ser pensadas também como sequências de elementos $a_n \in \mathbb{K}$. Na verdade, a igualdade acima serve como definição para uma soma formal. Esse conjunto é uma álgebra, com produto e unidade dados por

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} a_i \cdot b_j \Big) x^n$$
$$1_{\mathbb{K}[[x]]} = 1_{\mathbb{K}} \ .$$

Em outras seções deste capítulo veremos mais exemplos e construções envolvendo álgebras, como a álgebra tensorial de um espaço vetorial, álgebra livre gerada por um conjunto e a álgebra quociente.

1.1.2 Subálgebras, ideais e morfismos

Revisamos abaixo os conceitos de subálgebra, ideal, e morfismos de álgebras. Procuramos, como antes, dar ênfase à versão categórica desses conceitos.

Definição 1.1.9. Seja A uma álgebra. Uma *subálgebra* B é um subespaço vetorial de A tal que $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.

Observação 1.1.10. Nessa definição, observa-se que a subálgebra B é, por si só, uma álgebra (associativa), mas não necessariamente com unidade. Ainda, caso a subálgebra B seja, por si só, uma álgebra associativa com unidade, a unidade pode ou não ser a mesma da álgebra A que a contém. De fato, considere como A a álgebra das matrizes 2×2 com coeficientes reais, com o produto matricial e unidade $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Sejam $B = \{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{smallmatrix}\right] : a \in \mathbb{R}\}$ e $B' = \{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right] : a, b \in \mathbb{R}\}$, que são subálgebras de A. B tem unidade $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e B' não tem unidade, como vemos a seguir. Se B' tivesse uma unidade $\left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right]$, então por causa de $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e de $\left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right]$, deveríamos ter $\left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Mas $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, uma contradição.

Definição 1.1.11. Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial I de A é:

1. um *ideal à esquerda* de A se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$;
2. um *ideal à direita* de A se $\mu(I \otimes A) \subseteq I$;
3. um *ideal bilateral* de A, ou apenas *ideal* de A, se $\mu(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I$, ou equivalentemente, se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ e $\mu(I \otimes A) \subseteq I$.

Definição 1.1.12. Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) duas álgebras. Uma função $\mathbb{K}$-linear $f \colon A \to B$ é um *morfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras* se os seguintes diagramas comutarem:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbb{K} \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A \qquad\qquad f \circ \eta_A = \eta_B$$

Observação 1.1.13. Essa definição também é a tradução em linguagem categorial da definição usual [3].

[3] $f \colon A \to B$ é morfismo de álgebras se é morfismo de anéis com unidade e de espaços vetoriais.

O diagrama da esquerda representa o fato de f ser morfismo de anéis:

$$\mu_B \circ (f \otimes f)(a_1 \otimes a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$$
$$f \circ \mu_A(a_1 \otimes a_2) = f(a_1 \cdot a_2)$$

Já o diagrama da direita corresponde ao fato de f preservar a unidade:

$$f \circ \eta_A(1) = f(1_A)$$
$$\eta_B(1) = 1_B \quad .$$

Finalizamos essa seção com uma proposição que liga os conceitos de morfismo, ideais e subálgebras.

Proposição 1.1.14. *Sejam A e B álgebras e $f\colon A \to B$ morfismo de álgebras. Então:*

1. $\mathrm{Im}(f)$ *é subálgebra de B;*

2. $\ker(f)$ *é ideal de A .*

Demonstração.

1. $\mathrm{Im}(f)$ é um subespaço vetorial de B. Como $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$, então para todos $a, b \in A$, temos $\mu_b(f(a) \otimes f(b)) = f(\mu_A(a \otimes b)) \in \mathrm{Im}(f)$. Portanto $\mu_B(\mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

2. $ker(f)$ é subespaço vetorial de A. Sabemos que

$$\ker(f \otimes f) = \ker(f) \otimes A + A \otimes \ker(f) \ .$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} &\mu_B \circ (f \otimes f)(\ker(f \otimes f)) = 0 \\ &\quad \Longrightarrow f \circ \mu_A(\ker(f \otimes f)) = 0 \\ &\quad \Longrightarrow \mu_A(\ker(f \otimes f)) \subseteq \ker(f) \\ &\quad \Longrightarrow \mu_A(\ker(f) \otimes A + A \otimes \mathrm{Im}(f)) \subseteq \ker(f) \ . \end{aligned}$$

Portanto $\ker(f)$ é ideal de A.

□

1.1.3 Álgebra oposta

Seja A uma álgebra. Vamos definir um produto “invertido”, fazendo

$$\mu^{\mathrm{op}} = \mu \circ \tau \ ,$$

em que $\tau\colon A \otimes A \to A \otimes A$, como visto na definição 1.1.1, é o operador de transposição, dado por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. De forma equivalente, traduzindo para a notação usual de álgebras, estamos definindo o produto oposto

$$a \cdot_{\mathrm{op}} b = b \cdot a \ .$$

Podemos mostrar que $(A, \mu^{\mathrm{op}}, \eta)$ é uma álgebra. Quando se considera o produto oposto na álgebra, a álgebra é denotada por A^{op} e é chamada de *álgebra oposta*.

Checaremos que a álgebra oposta é uma álgebra. Faremos as contas apenas usando morfismos, mas é igualmente possível (e na verdade, mais fácil) fazer as contas aplicando em elementos, para checar as propriedades de álgebra. Para facilitar, vamos estabelecer uma notação conveniente para trabalhar com os operadores de transposição. Vamos escrever $\tau_{A,A'}$ a transposição definida por

$$\begin{aligned} \tau_{A,A'}\colon A \otimes A' &\to A' \otimes A \\ a \otimes a' &\mapsto a' \otimes a \ , \end{aligned}$$

e quando não ouver risco de confusão, omitiremos o subscrito.

Vale destacar que para transformações lineares $f\colon A \to B$ e $g\colon A' \to B'$, tem-se

$$\tau_{B,B'} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ \tau_{A,A'} \ .$$

Escreveremos também τ_p, com p uma permutação, para referir-nos a, por exemplo,

$$\begin{aligned} \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)}\colon A \otimes A \otimes A &\to A \otimes A \otimes A \\ a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 &\mapsto a_3 \otimes a_2 \otimes a_1 \ . \end{aligned}$$

Vamos verificar a comutatividade dos diagramas:

$$\begin{aligned} \mu^{op} \circ (\mu^{\mathrm{op}} \otimes \mathrm{Id}) &= \mu \circ \tau \circ ((\mu \circ \tau) \otimes \mathrm{Id}) \\ &= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes (\mu \circ \tau)) \circ \tau_{A \otimes A, A} \\ &= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau) \circ \tau_{A \otimes A, A} \\ &= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{op} \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu^{\mathrm{op}}) &= \mu \circ \tau \circ (\mathrm{Id} \otimes (\mu \circ \tau)) \\
&= \mu \circ ((\mu \circ \tau) \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{A, A\otimes A} \\
&= \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}) \circ (\tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{A, A\otimes A} \\
&= \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \ ,
\end{aligned}$$

portanto $\mu^{op} \circ (\mu^{\mathrm{op}} \otimes \mathrm{Id}) = \mu^{op} \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu^{\mathrm{op}})$, e

$$\begin{aligned}
\mu^{\mathrm{op}} \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}) \circ \varphi_l &= \mu \circ \tau \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}) \circ \varphi_l \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \eta) \circ \tau_{\mathbb{K}, A} \circ \varphi_l \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \eta) \circ \varphi_r \\
&= \mathrm{Id} \ .
\end{aligned}$$

O outro diagrama é análogo. Note que $\tau_{\mathbb{K},A} \circ \varphi_l = \varphi_r$ e $\tau_{A,\mathbb{K}} \circ \varphi_r = \varphi_l$.

1.1.4 Álgebra quociente

O resultado a seguir fornece uma estrutura de álgebra conveniente para o quociente $\frac{A}{I}$ de uma álgebra por um ideal.

Proposição 1.1.15. *Sejam A álgebra, $I \subseteq A$ um ideal e $\pi \colon A \to \frac{A}{I}$ a projeção canônica, que é morfismo de espaços vetoriais. Então existe uma única estrutura de álgebra em $\frac{A}{I}$ tal que a projeção canônica π seja um morfismo de álgebras. Essa estrutura de álgebra é dada por:*

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{a \cdot b} \\
1_{\frac{A}{I}} &= \overline{1_A} \quad .
\end{aligned}$$

Demonstração. $\frac{A}{I}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. O produto $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ está bem definido, pois:

$$\begin{array}{l} \overline{a} = \overline{a'} \\ \overline{b} = \overline{b'} \end{array} \implies \begin{aligned} ab - a'b' &= ab - ab' + ab' - a'b' \\ &= a\underbrace{(b - b')}_{\in I} + \underbrace{(a - a')}_{\in I} b' \in I \implies \overline{ab} = \overline{a'b'} \ . \end{aligned}$$

A bilinearidade do produto, e a propriedade da unidade decorrem das mesmas propriedades em A. Portanto $\frac{A}{I}$ é uma álgebra.

Com esse produto e essa unidade, não é difícil verificar que a projeção π é um homomorfismo de álgebras.

Agora, vejamos a unicidade. Se $\bullet$ é um outro produto em $\frac{A}{I}$ que faz π ser um morfismo de álgebras, então

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \pi(a) \bullet \pi(b) = \pi(ab) = \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \quad .$$

E se $1'_{\frac{A}{I}}$ é outra unidade, em relação ao produto $\bullet = \cdot$, então

$$1'_{\frac{A}{I}} = 1'_{\frac{A}{I}} \cdot \overline{1_A} = 1'_{\frac{A}{I}} \bullet \overline{1_A} = \overline{1_A} \quad .$$

□

Proposição 1.1.16. *Sejam A, B álgebras, $I \subseteq A$ ideal e $\pi\colon A \to \frac{A}{I}$ o a projeção canônica. Se $f\colon A \to B$ é um morfismo de álgebras tal que $I \subseteq \ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras $\overline{f}\colon \frac{A}{I} \to B$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \\ & \frac{A}{I} \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ \pi = f \quad .$$

Demonstração. Considere

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \tfrac{A}{I} &\to B \\ \overline{a} &\mapsto f(a) \quad . \end{aligned}$$

Como $I \subseteq \ker(f)$, $\overline{f}$ está bem definida:

$$\begin{aligned} \overline{a} = \overline{b} \quad &\Longrightarrow \quad a - b \in I \subseteq \ker(f) \quad \Longrightarrow \quad f(a-b) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b}) \ . \end{aligned}$$

Além disso, não é difícil checar que $\overline{f}$ é morfismo de álgebras. Isso decorre de f ser morfismo, e da estrutura de álgebra vista no teorema anterior. O produto, por exemplo, fica, para quaisquer $\overline{a}, \overline{b} \in \frac{A}{I}$,

$$\overline{f}(\overline{a}\overline{b}) = \overline{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \overline{f}(\overline{a})\overline{f}(\overline{b}) \ .$$

Por construção, temos $\overline{f} \circ \pi = f$.

Resta apenas verificar a unicidade da $\overline{f}$. Se $\overline{g}\colon \frac{A}{I} \to B$ for outro morfismo de álgebras com $\overline{g} \circ \pi = f$, então

$$\overline{g}(\overline{a}) = \overline{g} \circ \pi(a) = f(a) = \overline{f}(\overline{a})$$

para todo $\overline{a} \in \frac{A}{I}$. Portanto $\overline{g} = \overline{f}$ e a unicidade fica provada. □

Corolário 1.1.17. *Sejam A, B álgebras e $f\colon A \to B$ morfismo de álgebras. Então*

$$\begin{aligned}\overline{f}\colon \frac{A}{\ker(f)} &\to \mathrm{Im}(f)\\ \overline{a} &\mapsto f(a)\end{aligned}$$

é isomorfismo de álgebras, e portanto

$$\frac{A}{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f) \ .$$

Demonstração. Basta considerar $I = \ker(f)$ na proposição anterior, para obter que $\overline{f}$ é morfismo de álgebras. Para mostrar que é bijeção, basta notar que a sobrejetividade é imediata, e que a injetividade vem de

$$\overline{f}(\overline{a}) = 0 \implies f(a) = 0 \implies a \in \ker(f) \implies \overline{a} = 0 \implies \overline{a} \in \ker(f) \ .$$

□

1.1.5 Álgebra do produto tensorial

Sejam A e B duas álgebras. Temos que $A \otimes B$ é um espaço vetorial, o qual pode-se dar uma estrutura de álgebra a partir das estruturas de A e B. Defina

$$\begin{aligned}\mu_{A\otimes B} &= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \tau_{B,A} \otimes \mathrm{Id}_B)\\ \eta_{A\otimes B} &= (\eta_A \otimes \eta_B) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \quad ,\end{aligned}$$

em que as transformações lineares $\Delta_{\mathbb{K}}$ e $\tau_{B,A}$ são dadas por:

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}\\ &\Delta_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{B,A}\colon B \otimes A \to A \otimes B\\ &\tau_{B,A}(b \otimes a) = a \otimes b \ .\end{aligned}$$

Em termos de elementos, temos

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') &= (a \cdot a') \otimes (b \cdot b') \qquad \forall a, a' \in A,\ \forall b, b' \in B\\ 1_{A\otimes B} &= 1_A \otimes 1_B \ .\end{aligned}$$

Vamos mostrar a comutatividade dos diagramas da associatividade e da unidade:

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\otimes B}\circ(\mathrm{Id}_{A\otimes B}\otimes\mu_{A\otimes B})\\
&\quad=\mu_{A\otimes B}\circ\Big(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\big((\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}_B)\big)\Big)\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mu_B)\circ\\
&\qquad\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A\otimes A}\otimes\mathrm{Id}_{B\otimes B})\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&5&4&6\end{smallmatrix}\right)}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mu_B)\circ\\
&\qquad\qquad\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&4&2&5&6\end{smallmatrix}\right)}\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&5&4&6\end{smallmatrix}\right)}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mu_B)\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&5&2&4&6\end{smallmatrix}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\otimes B}\circ(\mu_{A\otimes B}\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes B})\\
&\quad=\mu_{A\otimes B}\circ\Big(\big((\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}_B)\big)\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B\Big)\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\circ(\mu_A\otimes\mu_B\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B)\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mu_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mu_B\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\circ(\mathrm{Id}_{A\otimes A}\otimes\tau_{B\otimes B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{smallmatrix}\right)}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mu_A\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mu_B\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\qquad\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&3&4&6\end{smallmatrix}\right)}\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{smallmatrix}\right)}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\mu_A\otimes\mathrm{Id}_B\otimes\mu_B)\circ\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&5&2&4&6\end{smallmatrix}\right)}\quad.
\end{aligned}$$

Portanto $\mu_{A\otimes B}\circ(\mu_{A\otimes B}\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes B})=\mu_{A\otimes B}\circ(\mathrm{Id}_{A\otimes B}\otimes\mu_{A\otimes B})$. Quanto aos diagramas da counidades, temos:

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\otimes B}\circ(\eta_{A\otimes B}\otimes\mathrm{Id}_{A\otimes B})\circ\varphi_{l\ A\otimes B}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\circ\Big(\big((\eta_A\otimes\eta_B)\circ\Delta_{\mathbb{K}}\big)\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B\Big)\circ\varphi_{l\ A\otimes B}\\
&\quad=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes\tau_{B,A}\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\\
&\qquad\circ(\eta_A\otimes\eta_B\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B)\circ(\Delta_{\mathbb{K}}\otimes\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_B)\circ\varphi_{l\ A\otimes B}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \eta_B \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \\
&\qquad \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \tau_{\mathbb{K},A} \otimes \mathrm{Id}_B) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \varphi_{l\ A\otimes B} \\
&= (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\eta_A \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \eta_B \otimes \mathrm{Id}_B) \circ (\varphi_{l\ A} \otimes \varphi_{l\ B}) \\
&= \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B = \mathrm{Id}_{A\otimes B}\ .
\end{aligned}
$$

O outro diagrama é análogo. Note que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \tau_{\mathbb{K},A} \otimes \mathrm{Id}_B) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \varphi_{l\ A\otimes B} &= \varphi_{l\ A} \otimes \varphi_{l\ B} \\
(\mathrm{Id}_A \otimes \tau_{B,\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B \otimes \Delta_{\mathbb{K}}) \circ \varphi_{r\ A\otimes B} &= \varphi_{r\ A} \otimes \varphi_{r\ B}\ ,
\end{aligned}
$$

o que se observa aplicando em um elemento de $A \otimes B$.

1.1.6 Álgebra livre

No contexto de espaços vetoriais é possível definir o espaço vetorial livre gerado por um conjunto de elementos, digamos S, que é, então, base do espaço. Esse espaço vetorial livre é constituído de combinações lineares finitas (formais) de elementos de S com coeficientes em $\mathbb{K}$, que podemos escrever como $\sum_{s\in S} a_s s$ ou $(a_s)_{s\in S}$, com os a_s's escalares em $\mathbb{K}$.

É possível fazer o mesmo no contexto das álgebras e definir a *álgebra livre* gerada por um conjunto S. Como além da estrutura de espaço vetorial devemos ter também uma multiplicação, não é suficiente considerar só somas formais da forma $\sum_{s\in S} a_s s$. A ideia é considerar as palavras formadas de finitos símbolos de S, como $s_1 \dots s_n$, e considerar o produto como sendo a concatenação de palavras

$$
s_1 \dots s_n \cdot r_1 \dots r_m = s_1 \dots s_n r_1 \dots r_m \quad ,
$$

com $s_1, \dots, s_n, r_1, \dots, r_m \in S$. Temos, assim, a seguinte definição:

Definição 1.1.18. A *álgebra das palavras* gerada pelo conjunto S, denotada por $\mathbb{K}\{S\}$, é o espaço vetorial livre gerado pelas palavras finitas em S

$$
\mathbb{K}\{S\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, w_i = s_1 \dots s_{n_i} \right\} \ ,
$$

com o produto dado pela concatenação de palavras (e estendido por distributividade) e unidade dada pela palavra vazia, denotada por 1.

Não é difícil ver que a álgebra das palavras é, de fato, uma álgebra. Agora damos uma definição em termos de uma propriedade universal:

Definição 1.1.19. A *álgebra livre* gerada por S é o par (L_S, i_S) em que:

1. L_S é uma álgebra;
2. $i_S\colon S \to L$ é uma função;
3. vale a propriedade universal: dadas uma álgebra A e uma função $f\colon S \to A$, existe único morfismo de álgebras $\overline{f}\colon L_S \to A$ tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_S"'] & A \\ & L_S \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ i_S = f \ .$$

Veremos que a álgebra de palavras definida acima é uma álgebra livre.

Proposição 1.1.20. $\mathbb{K}\{S\}$ *com a inclusão canônica* $i_S\colon S \to \mathbb{K}\{S\}$ *é uma álgebra livre. Além disso, a álgebra livre é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Vamos mostrar a propriedade universal. Sejam A uma álgebra e $f\colon S \to A$ uma função. Defina $\overline{f}\colon \mathbb{K}\{S\} \to A$ por

$$\overline{f}(1) = 1_A$$
$$\overline{f}(s_1 \dots s_n) = f(s_1) \dots f(s_n) \ ,$$

para toda palavra $s_1 \dots s_n$, e estendida por linearidade. Em consequência da definição de $\overline{f}$, o mesmo é um morfismo de álgebras. Como $\overline{f}(s) = f(s)$ para todo $s \in S$ (à esquerda da igualdade, s é visto como palavra de uma letra só), temos que $\overline{f} \circ i_S = f$. Além disso, $\overline{f}$ é único. Seja outro morfismo de álgebras $\overline{g}\colon \mathbb{K}\{S\} \to A$ tal que $\overline{g} \circ i_S = f$. Então, para todos $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}\{S\}$, temos

$$\overline{g}(s_1 \dots s_n) = \overline{g}(s_1) \dots \overline{g}(s_n) = f(s_1) \dots f(s_n) = \overline{f}(s_1 \dots s_n) \ .$$

Resulta que $\overline{g} = \overline{f}$, já que são iguais nos elementos da base.

Resta verificar a unicidade da álgebra livre $(\mathbb{K}\{S\}, i_S)$. Seja (M, h)

outra álgebra livre gerada por S. Usando a propriedade universal, temos:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "i_S"'] & M \\ & \mathbb{K}\{S\} \arrow[u, "\overline{h}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "i_S"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{K}\{S\} \\ & M \arrow[u, "\overline{i_S}"] \end{tikzcd}$$

$$\exists \overline{h}\colon \overline{h} \circ i_S = h \qquad \exists \overline{i_S}\colon \overline{i_S} \circ h = i_S \quad .$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} h &= \overline{h} \circ \overline{i_S} \circ h \\ i_S &= \overline{i_S} \circ \overline{h} \circ i_S \ , \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i_S"] \arrow[dr, "i_S"'] & \mathbb{K}\{S\} \\ & \mathbb{K}\{S\} \arrow[u, "{\mathrm{Id},\ \overline{i_S}\circ\overline{h}}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h"'] & M \\ & M \arrow[u, "{\mathrm{Id},\ \overline{h}\circ\overline{i_S}}"'] \end{tikzcd}$$

e, pela unicidade, temos que $\mathrm{Id} = \overline{i_S} \circ \overline{h}$ e $\mathrm{Id} = \overline{h} \circ \overline{i_S}$. Assim, $\overline{h}$ e $\overline{i_S}$ são isomorfismos entre M e $\mathbb{K}\{S\}$. $\square$

Proposição 1.1.21. *Seja A uma álgebra. Então A é o quociente de uma álgebra livre por um ideal. Mais especificamente, $A \cong \frac{\mathbb{K}\{S\}}{I}$, em que $S \subseteq A$ é um conjunto gerador e I é o núcleo do único morfismo de álgebras $\overline{i}\colon \mathbb{K}\{S\} \to A$ tal que $\overline{i}(s) = s$, para todo $s \in S$.*

Em particular, fazendo $S = A$, temos $A \cong \frac{\mathbb{K}\{A\}}{I}$ para um ideal $I \subseteq \mathbb{K}\{A\}$.

Demonstração. Seja S um conjunto gerador de A como espaço vetorial, e $i\colon S \to A$ inclusão canônica. Pela propriedade universal da álgebra livre $\mathbb{K}\{S\}$, existe único morfismo de álgebras $\overline{i}\colon \mathbb{K}\{S\} \to A$ tal que $\overline{i} \circ i_S = i$, isto é, $\overline{i}(s) = i(s) = s$ para todo $s \in S$. Temos que $\overline{i}$ é sobrejetora, pois todo $a \in A$ pode ser escrito como

$$a = \sum_{s\in S} \lambda_s s = \sum_{s\in S} \lambda_s i(s) = \sum_{s\in S} \lambda_s \overline{i}(s) = \overline{i}\Big(\underbrace{\sum_{s\in S} \lambda_s s}_{\in \mathbb{K}\{S\}}\Big) \quad .$$

Portanto temos o isomorfismo de álgebras

$$A = \mathrm{Im}(f) \cong \frac{\mathbb{K}\{S\}}{I}$$

com $I = \ker(\bar{i})$. □

1.1.7 Álgebra tensorial

Na álgebra livre se constrói uma álgebra partindo de um conjunto, e essa álgebra satisfaz uma propriedade universal. É possível fazer algo parecido a partir de um espaço vetorial; obtemos a álgebra tensorial. Vamos começar por uma definição baseada numa propriedade universal.

Definição 1.1.22. Seja V um espaço vetorial. Uma *álgebra tensorial* é um par $(\mathcal{T}_V, i_V)$, em que:

1. $\mathcal{T}_V$ é uma álgebra;
2. $i_V : V \to \mathcal{T}_V$ é uma transformação linear;
3. vale a propriedade universal: dadas A álgebra e $f : V \to A$ transformação linear, existe único morfismo de álgebras $\overline{f} : \mathcal{T}_V \to A$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_V"'] & A \\ & \mathcal{T}_V \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ i_V = f \ .$$

Tentaremos, então, construir uma álgebra que satisfaça essa propriedade universal. A construção é parecida com a da álgebra de palavras. Vamos precisar de um produto que funcione como uma concatenação; um candidato que funciona é o produto tensorial.

Definição 1.1.23. Seja V um espaço vetorial. Defina:

$$V^{\otimes 0} := \mathbb{K} \ ,$$
$$V^{\otimes 1} := V \ ,$$
$$V^{\otimes n} := V \otimes \ldots \otimes V \ , \text{ o produto tensorial } n \text{ vezes.}$$

Agora defina $\mathcal{T}(V)$ e i_V por:

$$\mathcal{T}(V) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, w_i = v_{i,1} \otimes \ldots \otimes v_{i,n_i} \right\} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

$$\begin{aligned} i_V \colon V &\to \mathcal{T}(V) \\ v &\mapsto v = (v\delta_{n,1})_{n=0}^{\infty} \quad . \end{aligned}$$

A notação $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ representa uma soma formal de tensores elementares w_i; podemos pensar como uma sequência em $n \in \mathbb{N}$ de (somas de) tensores de grau n em $V^{\otimes n}$, tal que apenas uma quantidade finita de entradas é não-nula.

Frequentemente consideramos $\mathbb{K}, V, V^{\otimes n} \subseteq \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ via inclusões canônicas. Então escrevemos, por exemplo, $v \in V$ para denotar um elemento da forma $(v\delta_{1,n})_{n=0}^{\infty} \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$.

Agora defina um produto em $\mathcal{T}(V)$ dado pelo produto tensorial

$$(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m) \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$$

e estendido linearmente.

Não é difícil checar que $\mathcal{T}(V)$ é uma álgebra. Além disso, esta será a álgebra tensorial no sentido da definição 1.1.22.

Proposição 1.1.24. $(\mathcal{T}(V), i_V)$ *definidos acima formam uma álgebra tensorial.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra e $f \colon V \to A$ uma transformação linear. Seja $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ base de V.
Defina, para $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_n \colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n \text{ vezes}} \to A$ por

$$\tilde{f}_n(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n}) = f(e_{\lambda_1}) \ldots f(e_{\lambda_n})$$

e estenda linearmente em cada entrada. Como $\tilde{f}$ é n-linear, pela propriedade universal do produto tensorial, existe única transformação linear $f_n \colon V^{\otimes n} \to A$ dada por

$$f_n(e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_n}) = f(e_{\lambda_1}) \ldots f(e_{\lambda_n})$$

Defina também $f_0 \colon V^{\otimes 0} = \mathbb{K} \to A$ por $f_0(\alpha) = \alpha 1_A$.

Por propriedade da soma direta, existe única transformação linear $\bar{f}\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} \to A$ dada por[4]:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\right)\\
&=\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n} f_n(e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n})\\
&=\alpha 1_A + \sum_{n\geq 1}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n} f(e_{\lambda_1})\ldots f(e_{\lambda_n})\ .
\end{aligned}$$

$\bar{f}$ é morfismo de álgebras, pois:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}\left(\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\right)\otimes\left(\sum_{n'}\sum_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}} \beta_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}\ e_{\lambda'_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda'_n}\right)\right)\\
&=\bar{f}\left(\sum_{n,n'}\sum_{\substack{\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\beta_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\otimes e_{\lambda'_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda'_{n'}}\right)\\
&=\sum_{n,n'}\sum_{\substack{\lambda_1\ldots\lambda_n\\ \lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\beta_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}\ f(e_{\lambda_1})\ldots f(e_{\lambda_n})f(e_{\lambda'_1})\ldots f(e_{\lambda'_{n'}})\\
&=\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ f(e_{\lambda_1})\ldots f(e_{\lambda_n})\right)\left(\sum_{n'}\sum_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}} \beta_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}\ f(e_{\lambda'_1})\ldots f(e_{\lambda'_{n'}})\right)\\
&=\bar{f}\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\right)\bar{f}\left(\sum_{n'}\sum_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}} \beta_{\lambda'_1\ldots\lambda'_{n'}}\ e_{\lambda'_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda'_{n'}}\right)\ .
\end{aligned}$$

Além disso, temos que $\bar{f}\circ i_V = f$. De fato, para todo $v\in V$, escreva $v=\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda$ como combinação linear dos vetores da base acima. Temos:

$$\bar{f}(v)=\bar{f}\left(\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda\right)=\sum_\lambda \alpha_\lambda f(e_\lambda)=f\left(\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda\right)=f(v)\ .$$

Por fim, $\bar{f}$ é único com essa propriedade. Se existisse outro morfismo

[4] Considera-se que para $n=0$, a expressão $e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}$ significa $1_{\mathbb{K}}$.

de álgebras $\bar{g}\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} \to A$ com $\bar{g} \circ i_V = f$, teríamos

$$
\begin{aligned}
\bar{g}&\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\right)\\
&=\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\bar{g}(e_{\lambda_1})\ldots\bar{g}(e_{\lambda_n})\\
&=\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}f(e_{\lambda_1})\ldots f(e_{\lambda_n})\\
&=\bar{f}\left(\sum_{n}\sum_{\lambda_1\ldots\lambda_n} \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\ e_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_n}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Então $\bar{g} = \bar{f}$. □

Proposição 1.1.25. *Seja A uma álgebra. Então A é o quociente de uma álgebra tensorial por um ideal.*

Mais especificamente, $A \cong \frac{\mathcal{T}(A)}{I}$, em que A visto como espaço vetorial e I é o núcleo do único morfismo de álgebras $\bar{i}\colon \mathcal{T}(A) \to A$ tal que $\bar{i}(a) = a$, para todo $a \in A$

Demonstração. Considere A álgebra e $i = \mathrm{Id}\colon A \to A$ linear. Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe único morfismo de álgebras $\bar{i}$ tal que $\bar{i}(a) = a$, para todo $a \in A$. É imediato que $\bar{i}$ é sobrejetora. Então temos o isomorfismo de álgebras

$$
\frac{\mathcal{T}(A)}{I} \cong \mathrm{Im}(\bar{i}) = A\ ,
$$

com $I = \ker(\bar{i})$. □

1.2 Coálgebras

Nesta seção dualizaremos o conceito de álgebra. Obteremos as coálgebras, com toda a estrutura que a acompanha análoga à das álgebras. A dualização corresponde ao seguinte: ao escrevemos uma propriedade em termos de diagramas comutativos, a propriedade dual é obtida invertendo-se as flechas nos diagramas.

1.2.1 Definição e exemplos

Definição 1.2.1. Uma $\mathbb{K}$-*coálgebra* é uma tripla (C, Δ, ε), em que

1. C é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

2. $\Delta\colon C \to C \otimes C$ e $\varepsilon\colon C \to \mathbb{K}$ são transformações lineares;

3. e os diagramas a seguir comutam:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\ C \otimes \mathbb{K} \arrow[ur, "\varphi_r^{-1}", "\cong"'] & & \mathbb{K} \otimes C \arrow[ul, "\varphi_l^{-1}"', "\cong"] \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\mathrm{Id}\otimes\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon\otimes\mathrm{Id}"'] & \end{tikzcd}$$

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \qquad \begin{aligned} \varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id} \\ \varphi_r^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{Id} \ , \end{aligned}$$

em quem φ_l, φ_r são as mesmas da definição 1.1.1, e suas inversas são dadas por

$$\begin{aligned} {\varphi_l}^{-1}\colon \mathbb{K} \otimes C \to C \\ {\varphi_r}^{-1}\colon C \otimes \mathbb{K} \to C \ , \end{aligned}$$

com ${\varphi_l}^{-1}(1_{\mathbb{K}} \otimes c) = c$ e ${\varphi_r}^{-1}(c \otimes 1_{\mathbb{K}}) = c$ para todo $c \in C$.

Além disso, diz-se que a $\mathbb{K}$-coálgebra é *cocomutativa* se o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

$$\tau \circ \Delta = \Delta \ .$$

Para simplificar a notação, muitas vezes enunciamos que C é uma coálgebra e fica implícito o corpo $\mathbb{K}$. E os morfismos do coproduto e da counidade serão usualmente denotados por Δ e ε, ou Δ_C e ε_C se houver risco de confusão. Frequentemente definimos Δ e ε apenas nos elementos da base; fica implícito, então, que são estendidas a transformações lineares em todo o espaço C.

Proposição 1.2.2. *A counidade é única. Isto é, se* (C, Δ, ε) *e* $(C, \Delta, \varepsilon')$ *são coálgebras, então* $\varepsilon = \varepsilon'$*.*

Demonstração. Primeiramente, note que para todo $f\colon C \to \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_l^{-1} &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes f) \\ f \circ \varphi_r^{-1} &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \ . \end{aligned}$$

De fato, mostra-se que são iguais aplicando em elementos $c \otimes 1_{\mathbb{K}}$ e $1_{\mathbb{K}} \otimes c$ respectivamente, com $c \in C$. Obtém-se $f(c)$ nos dois lados, nas duas equações.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon' \circ \mathrm{Id}_C \\ &= \varepsilon' \circ \varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta \\ &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon') \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta \\ &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon') \circ \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon \circ \mathrm{Id}_C \\ &= \varepsilon \circ \varphi_r^{-1} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon') \circ \Delta \\ &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon') \circ \Delta \\ &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon') \circ \Delta \end{aligned}$$

Logo $\varepsilon = \varepsilon'$. □

Veremos alguns exemplos de coálgebras a seguir. Neste mesmo capítulo, em outra seção, serão apresentadas outras construções envolvendo coálgebras.

Exemplo 1.2.3 ($\mathbb{K}$ é uma coálgebra)**.** O corpo $\mathbb{K}$ é uma coálgebra com coproduto e counidade dados por

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{K}}(\alpha) &= \alpha(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\ \varepsilon_{\mathbb{K}}(\alpha) &= \alpha \quad . \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.4 (Uma estrutura de coálgebra para qualquer espaço vetorial)**.** Seja V um espaço vetorial. Defina as transformações lineares

$$\begin{aligned} \Delta\colon V &\to V \otimes V & \qquad \varepsilon\colon V &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto v \otimes v & v &\mapsto 1_{\mathbb{K}} \quad . \end{aligned}$$

Checamos abaixo a comutatividade dos diagramas de coálgebra:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(v) = v \otimes v \otimes v = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(v) \\
&{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(v) = \varepsilon(v)v = 1_{\mathbb{K}}v = v \\
&{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(v) = v\varepsilon(v) = v1_{\mathbb{K}} = v \ .
\end{aligned}$$

Dessa forma, V é uma coálgebra com a estrutura acima.

Exemplo 1.2.5 (Coálgebra da potência dividida)**.** Seja V um espaço vetorial com base $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$. Defina as transformações lineares $\Delta\colon V \to V \otimes V$ e $\varepsilon\colon V \to \mathbb{K}$ por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(c_m) &= \delta_{0,m} \\
\Delta(c_m) &= \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \\
&= c_0 \otimes c_m + c_1 \otimes c_{m-1} + \ldots + c_m \otimes c_0 \\
&= \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 0}} c_i \otimes c_j \ .
\end{aligned}$$

Vamos conferir a comutatividade dos diagramas de coálgebra. Basta fazer isso para os elementos da base:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c_m) &= \sum_{j+l=m} (\Delta \otimes \mathrm{Id})(c_j \otimes c_l) \\
&= \sum_{j+l=m} \sum_{i+k=j} c_i \otimes c_k \otimes c_l \\
&= \sum_{i+k+l=m} c_i \otimes c_k \otimes c_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(c_m) &= \sum_{i+j=m} (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(c_i \otimes c_j) \\
&= \sum_{i+j=m} \sum_{k+l=j} c_i \otimes c_k \otimes c_l \\
&= \sum_{i+k+l=m} c_i \otimes c_k \otimes c_l
\end{aligned}$$

$$\implies (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c_m) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(c_m)$$

$$\begin{aligned}
{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c_m) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \left(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i) \cdot c_{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \delta_{0,i} \cdot c_{m-i} \\
&= c_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c_m) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot \varepsilon(c_{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot \delta_{0,m-i} \\
&= c_m \ .
\end{aligned}$$

Portanto V é uma coálgebra. Com essa estrutura, V é chamada *coálgebra da potência dividida.*

Exemplo 1.2.6 (Coálgebra das matrizes)**.** Denote por M_n^c um espaço vetorial de dimensão n^2 e base $\{e_{ij} \colon 1 \leq i, j \leq n\}$. Defina o coproduto e a counidade nos elementos da base por:

$$\begin{array}{ll}
\Delta\colon M_n^c \to M_n^c \otimes M_n^c & \qquad \varepsilon\colon M_n^c \to \mathbb{K} \\
\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj} & \qquad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j} \ .
\end{array}$$

Vamos verificar a comutatividade dos diagramas. Novamente, como se tratam de transformações lineares, basta conferir para os elementos da base.

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(e_{ij}) &= \sum_{p=1}^{n} (\Delta \otimes \mathrm{Id})(e_{ip} \otimes e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} e_{iq} \otimes e_{qp} \otimes e_{pj}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(e_{ij}) &= \sum_{q=1}^{n} (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(e_{iq} \otimes e_{qj}) \\
&= \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} e_{iq} \otimes e_{qp} \otimes e_{pj}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \ .
$$

Além disso, temos:

$$
\begin{aligned}
{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(e_{ij}) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \left(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip}) \cdot e_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \delta_{i,p} \cdot e_{pj} \\
&= e_{ij} \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(e_{ij}) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \cdot \varepsilon(e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \cdot \delta_{p,j} \\
&= e_{ij} \ .
\end{aligned}
$$

1.2.2 Notação de Sweedler

A *notação de Sweedler* é uma maneira abreviada de se escrever o coproduto. Nessa notação, escreve-se o elemento $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1,i} \otimes c_{2,i} \in C \otimes C$ como

$$
\Delta(c) = \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)}
$$

Ás vezes escreve-se também $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ ou mesmo $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ para abreviar, quando não há confusão.

Devido à coassociatividade, os elementos de $C \otimes C \otimes C$

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c) = \sum_{c} \sum_{c_{(1)}} c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}$$
$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = \sum_{c} \sum_{c_{(2)}} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$$

são iguais, e na notação de Sweedler, são ambos escritos como

$$\Delta_2(c) = \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

em que $\Delta_2 = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Da mesma forma, usamos a coassociatividade diversas vezes e obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_3 :&= (\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= (\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \ ,\end{aligned}$$

então todos esses 6 morfismos, em que o Δ aparece 3 vezes, são iguais. E o elemento $\Delta_3(c)$ é denotado por

$$\Delta_3(c) = \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes c_{(4)} \ .$$

Defina

$$\begin{aligned}\Delta_1 :&= \Delta \\ \Delta_{n+1} :&= (\Delta \otimes \mathrm{Id}^n) \circ \Delta_n\end{aligned}$$

para $n \geq 1$ e $\mathrm{Id}^n = \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}$ (n vezes, e se $n = 0$, entende-se que o termo Id^n desaparece da expressão). Pode-se mostrar por indução que é possível reescrever Δ_n trocando a posição em que os Δ's aparecem, como fizemos com Δ_3.

Proposição 1.2.7. *Vale a coassociatividade generalizada:*

1. $\Delta_{n+1} = (\mathrm{Id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_n$, $\forall p = 0, 1, \ldots, n$, $\forall n \geq 1$

2. $\Delta_{n+1} = (\Delta_n \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta$, $\forall n \geq 1$

3. $\Delta_n = (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_i \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}$,
$\forall n \geq 2,\ \forall i = 1 \ldots n-1,\ \forall m = 0, \ldots n-i$.

Demonstração.

1. O caso $p = 0$ é a definição de Δ_{n+1}. O caso $n = 1$ segue da coassociatividade $\Delta_2 = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. Assumimos que a fórmula vale para $n-1$, com $n \geq 2$. Isto é,

   (HI) $\Delta_n = (\mathrm{Id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-1-p}) \circ \Delta_n$, $\forall p = 0, 1, \ldots, n-1$.

   Seja p entre 1 e n. Provaremos a fórmula para n. Temos $p-1$ entre 0 e $n-1$, e vale:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_n \\
&\quad = (\mathrm{Id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&\quad = \big(\mathrm{Id}^{p-1} \otimes (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \otimes \mathrm{Id}^{n-p}\big) \circ (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&\quad = \big(\mathrm{Id}^{p-1} \otimes ((\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes \mathrm{Id}^{n-p}\big) \circ \Delta_{n-1} \\
&\quad = \big(\mathrm{Id}^{p-1} \otimes ((\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta) \otimes \mathrm{Id}^{n-p}\big) \circ \Delta_{n-1} \\
&\quad = (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-(p-1)}) \circ (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&\quad = (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-(p-1)}) \circ \Delta_n \quad .
\end{aligned}$$

   Repetimos essa conta para qualquer p' entre 1 e p. Aplicando o resultado acima para $p' = p$, $p' = p-1$, ..., $p' = 1$, conseguimos trazemos o Δ à esquerda da composição para a esquerda das Id's até obtermos:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}^p \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-p}) \circ \Delta_n &= (\mathrm{Id}^{p-1} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-(p-1)}) \circ \Delta_n \\
&= (\mathrm{Id}^{p-2} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-(p-2)}) \circ \Delta_n \\
&\ \ \vdots \\
&= (\mathrm{Id}^1 \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-1}) \circ \Delta_n \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{Id}^n) \circ \Delta_n \\
&= \Delta_{n+1} \quad .
\end{aligned}$$

   Portanto, o item 1. fica provado.

2. Vamos provar por indução em n. O caso $n = 1$ recai na coassociatividade. Suponha válido para $n-1$, com $n \geq 2$, isto é,

   (HI) $\Delta_n = (\Delta_{n-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta$.

O caso n fica:

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= (\Delta \otimes \mathrm{Id}^n) \circ \Delta_n \\ &\overset{(\mathrm{HI})}{=} (\Delta \otimes \mathrm{Id}^n) \circ (\Delta_{n-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= (\Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_{n-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= \big(((\Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}) \otimes \mathrm{Id}\big) \circ \Delta \\ &\overset{\text{def.}}{=} (\Delta_n \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \ .\end{aligned}$$

3. Seja $n \geq 2$ fixo. Vamos provar, por indução em i, que a igualdade vale para qualquer $m = 0, \ldots, n-1$. De fato, para $i = 1$, recaímos no item 1. desta proposição. Assumimos que a igualdade seja válida para $i-1$, com $i \geq 2$:

   (HI) $\Delta_n = \big(\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m+1}\big) \circ \Delta_{n-i+1}$.

   Provamos agora que vale para i. Seja m entre 0 e $n-i$. Temos

$$\begin{aligned}\Delta_n &\overset{(\mathrm{HI})}{=} (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m+1}) \circ \Delta_{n-i+1} \\ &\overset{1.}{=} (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m+1}) \circ (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i} \\ &= (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}) \circ (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i} \\ &= \big(\mathrm{Id}^m \otimes ((\Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta) \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}\big) \circ \Delta_{n-i} \\ &\overset{2.}{=} (\mathrm{Id}^m \otimes \Delta_i \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i} \quad ,\end{aligned}$$

   e isso conclui a indução.

□

Essa proposição (item 3. aplicado a $m-1$) nos permite escrever:

$$\begin{aligned}&\sum_c c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n)} \\ &\quad = \Delta_n(c) \\ &\quad = (\mathrm{Id}^{m-1} \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-(m-1)}) \circ \Delta_{n-i}(c) \\ &\quad = (\mathrm{Id}^{m-1} \otimes \Delta_{i-1} \otimes \mathrm{Id}^{n-i-m+1}) \left(\sum_c c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(m)} \otimes \ldots \otimes c_{(n-i)} \right) \\ &\quad = \sum_c \sum_{c_{(m)}} c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(m-1)} \otimes c_{(m)(1)} \otimes \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots \otimes c_{(m)(i)} \otimes c_{(m+1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n-i)} \ ,\end{aligned}$$

com $1 \leq i-1 \leq n$ e $0 \leq m-1 \leq n-i$.

Assim, se temos uma expressão envolvendo $c_{(1)}, \ldots, c_{(n)}$ (resultante da composição de uma transformação linear com Δ_{n-1}), podemos reescrever os símbolos $c_{(i)}$'s mantendo $c_{(1)}, \ldots, c_{(m-1)}$ como estão, trocando $c_{(m)}, \ldots, c_{(m+i)}$ por $c_{(m)(1)}, \ldots, c_{(m)(i)}$ e trocando $c_{(m+i+1)}, \ldots, c_{(n)}$ por $c_{(m+1)}, \ldots, c_{(n-i)}$.

Com isso, podemos reescrever expressões envolvendo

$$\Delta_{n-1}(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n)} \ ,$$

como por exemplo:

$$\begin{aligned}
&\sum_c \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} \varepsilon(c_{(3)}) \\
&\quad = {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes {\varphi_r}^{-1}) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \right) \\
&\quad = {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes {\varphi_r}^{-1}) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{c, c_{(2)}} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \right) \\
&\quad = \sum_{c, c_{(2)}} \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)(1)} \varepsilon(c_{(2)(2)}) \\
&\quad = \sum_c \varepsilon(c_{(1)}) \left(\sum_{c_{(2)}} c_{(2)(1)} \varepsilon(c_{(2)(2)}) \right) \\
&\quad = \sum_c \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} \\
&\quad = c \quad .
\end{aligned}$$

As últimas igualdades seguem do axioma da counidade.

1.2.3 Subcoálgebras, coideais e morfismos

Dualizaremos os conceitos de subálgebra, ideal e morfismos, que foram escritos de maneira categórica. Obteremos desta forma as subcoálgebras, coideais e morfismos de coálgebras.

Definição 1.2.8. Seja C uma coálgebra. Uma *subcoálgebra* D de C é um subespaço vetorial tal que $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Observação 1.2.9. $(C, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ é uma coálgebra. Note que no caso das álgebras, nem sempre a subálgebra é, por si só, uma álgebra (com unidade), como visto na observação 1.1.10 da definição 1.1.9.

Definição 1.2.10. Seja C uma coálgebra. Um subespaço vetorial I de C é:

1. um *coideal à esquerda* de C se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$;
2. um *coideal à direita* de C se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$;
3. um *coideal* de C, se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$ e $\varepsilon(I) = 0$.

Observação 1.2.11. A condição $\varepsilon(I) = 0$ em 3. é imposta para que seja possível definir uma estrutura de coálgebra no quociente $\frac{C}{I}$. Essa estrutura é vista na seção 1.2.7.

Definição 1.2.12. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Uma função $\mathbb{K}$-linear $f\colon C \to D$ é um *morfismo de* $\mathbb{K}$*-coálgebras* se os diagramas abaixo comutarem:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C \qquad\qquad \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C \ .$$

Proposição 1.2.13. *Seja $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ uma coálgebra. Seja $I \subseteq C$ um subespaço de C. Então:*

$$I \text{ é coideal à direita e à esquerda de } C \quad \text{sse} \quad I \text{ é subcoálgebra} \ .$$

Demonstração. Basta observar que $(C \otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I$. Assim:

$$\begin{array}{l} \Delta(I) \subseteq C \otimes I \\ \Delta(I) \subseteq I \otimes C \end{array} \quad \text{sse} \quad \Delta(I) \subseteq I \otimes I \ .$$

□

Proposição 1.2.14. *Sejam C e D coálgebras e $f\colon C \to D$ morfismo de coálgebras. Então:*

1. $\mathrm{Im}(f)$ *é subcoálgebra de D;*

2. $\ker(f)$ *é coideal de C .*

Demonstração.

1. $\mathrm{Im}(f)$ é um subespaço vetorial de B. Seja $c \in C$. Como f é morfismo de coálgebras, $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$, e portanto

$$\Delta_D(f(c)) = f \otimes f(\Delta_C(c)) = f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \in \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(f) \ .$$

Dessa forma $\Delta_D\big(\mathrm{Im}(f)\big) \subseteq \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(f)$, e portanto $\mathrm{Im}(f)$ é subcoálgebra de D.

2. $ker(f)$ é subespaço vetorial de C.
Vamos mostrar que $\varepsilon(\ker(f)) = 0$. Seja $c \in \ker(f)$. Temos que

$$\varepsilon(c) = \varepsilon_D \circ f(c) = \varepsilon_C(0) = 0 \ .$$

Agora vamos verificar que $\Delta_C(\ker(f)) \subseteq \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f)$. Seja $c \in \ker(f)$. Temos

$$\Delta_D(f(c)) = \Delta_D(0) = 0 \ ,$$

portanto, como f é morfismo de coálgebras,

$$(f \otimes f)(\Delta_C(c)) = \Delta_D(f(c)) = 0 \ .$$

Assim, $\Delta_C(c) \in \ker(f \otimes f)$. Como $\ker(f \otimes f) = \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f)$, temos então $\Delta_C(c) \in \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f)$. Segue, portanto, que $\Delta_C(\ker(f)) \subseteq \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f)$.

Portanto, $\ker(f)$ é um coideal de C.

□

1.2.4 Teorema fundamental das coálgebras

As coálgebras têm uma finitude intrínseca, expressa pelo *teorema fundamental das coálgebras*. Esse teorema diz que todo elemento de uma coálgebra está contido numa subcoálgebra de dimensão finita. Para mostrar esse teorema, vamos começar com alguns lemas simples.

Lema 1.2.15. *Seja V um espaço vetorial. Seja $t \in V \otimes V \otimes V$. Podemos escrever t como uma soma finita*

$$t = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j \ ,$$

com $\{c_i\}$ e $\{d_j\}$ LI's.

Demonstração. Seja $t = \sum_k y_k \otimes z_k \otimes w_k$. Tome uma base $\{v_\alpha\}$ de V. Escrevendo os vetores y_k e w_k como combinação linear dos vetores da base, temos

$$t = \sum_k \sum_i \sum_j a_i(y_k) v_i \otimes z_k \otimes a_j(w_k) v_j \ .$$

Passando as constantes para a entrada tensorial do meio, temos a soma finita

$$t = \sum_{i,j} v_i \otimes \left(\sum_k a_i(y_k) a_j(w_k) z_k \right) \otimes v_j \ .$$

Escolhemos como c_i's os termos v_i da soma finita em i, como d_j's os finitos termos v_j e como x_{ij}'s os termos da entrada do meio do tensor. Temos então $t = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j$, com os c_i's LI e os d_j's LI. □

Lema 1.2.16. *Sejam U e V espaços vetoriais, e sejam $X \subseteq U$ e $Y \subseteq V$ subespaços. Considere um elemento $t \in U \otimes V$, que pode ser escrito como*

$$t = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k \in U \otimes V \ ,$$

com os $u_k \in U$ e $v_k \in V$. Então:

1. $t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k \in U \otimes Y$ *e u_k's LI* $\implies$ $v_k \in Y, \ \forall k$*;*

2. $t = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k \in X \otimes V$ *e v_k's LI* $\implies$ $u_k \in X, \ \forall k$*.*

Demonstração.

1. Estenda os u_k's a uma base $\{u_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de U. Então $U \otimes Y \cong Y^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} Y$ (soma direta externa), com isomorfismo $\Phi\left(\sum_\alpha u_\alpha \otimes x_\alpha\right) = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Logo, se $\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k \in U \otimes Y$, então temos $\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k\right) = (v_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in Y^{(\Lambda)}$, em que $v_\alpha = v_k$ se $u_\alpha = u_k$ e $v_\alpha = 0$ caso contrário. Dessa forma, $v_k \in Y$, para todo k.

2. É análogo ao anterior, estendendo os v_k's a uma base $\{u_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de V e considerando o isomorfismo $X \otimes V \cong X^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X$ (soma direta externa) dado por $\Phi\left(\sum_\alpha x_\alpha \otimes v_\alpha\right) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. $\square$

Teorema 1.2.17 (Teorema fundamental das coálgebras)**.** *Todo elemento $c \in C$ de uma coálgebra está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Escreva, pelo lema 1.2.15, $\Delta_2(c) = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j$, tomando os c_i's e d_j's LI. Denote por X o espaço vetorial de dimensão finita gerado pelos x_{ij}'s. Como temos $c = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id} \otimes \varepsilon)\big(\Delta_2(c)\big)$ (veja a seção 1.2.2, sobre notação de Sweedler), então $c = \sum_{i,j} \varepsilon(c_i) x_{ij} \varepsilon(d_j) \in X$.

Resta mostrar que X é uma subcoálgebra. Precisamos mostrar que para todo x_{ij}, tem-se $\Delta(x_{ij}) \in X \otimes X$. Note que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})(\Delta_2(c)) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Delta_2(c)) = (\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \Delta)(\Delta_2(c))$$

Vamos aplicar o lema 1.2.16, considerando $C \otimes C \otimes X \subseteq C \otimes C \otimes C$ e $C \otimes X \subseteq C \otimes C$ subespaços. Temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} c_i \otimes \Delta(x_{ij}) \otimes d_j = \sum_{i,j} \Delta(c_i) \otimes x_{ij} \otimes d_j \\
&\implies \sum_j \left(\sum_i c_i \otimes \Delta(x_{ij})\right) \otimes d_j = \sum_j \left(\sum_i \Delta(c_i) \otimes x_{ij}\right) \otimes d_j \in \big(C \otimes C \otimes X\big) \otimes C \\
&\overset{\text{lema 1.2.16}}{\implies} \sum_i c_i \otimes \Delta(x_{ij}) = \sum_i \Delta(c_i) \otimes x_{ij} \in C \otimes C \otimes X \ , \quad \forall j \\
&\implies \sum_i c_i \otimes \Delta(x_{ij}) \in C \otimes (C \otimes X) \ , \quad \forall j \\
&\overset{\text{lema 1.2.16}}{\implies} \Delta(x_{ij}) \in C \otimes X \ , \quad \forall i, j \ .
\end{aligned}$$

Também usamos o lema 1.2.16, considerando os subespaços $X \otimes C \otimes C \subseteq C \otimes C \otimes C$ e $X \otimes C \subseteq C \otimes C$. Temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} c_i \otimes \Delta(x_{ij}) \otimes d_j = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes \Delta(d_j) \\
&\implies \sum_i c_i \otimes \left(\sum_j \Delta(x_{ij}) \otimes d_j\right) = \sum_i c_i \otimes \left(\sum_j x_{ij} \otimes \Delta(d_j)\right) \in C \otimes \big(X \otimes C \otimes C\big) \\
&\overset{\text{lema 1.2.16}}{\implies} \sum_j \Delta(x_{ij}) \otimes d_j = \sum_j x_{ij} \otimes \Delta(d_j) \in X \otimes C \otimes C \ , \quad \forall i \\
&\implies \sum_j \Delta(x_{ij}) \otimes d_j \in (X \otimes C) \otimes C \ , \quad \forall i \\
&\overset{\text{lema 1.2.16}}{\implies} \Delta(x_{ij}) \in X \otimes C \ , \quad \forall i, j \ .
\end{aligned}$$

Note que $X \otimes C$ e $C \otimes X$ são subespaços de $C \otimes C$, por isso aplicamos o lema 1.2.16 acima. Logo $\Delta(x_{ij}) \in X \otimes X$, e X é uma subcoálgebra de C. $\square$

Observação 1.2.18. Para álgebras, não vale que todo elemento está contido numa subálgebra de dimensão finita. Basta considerar $A = \mathbb{K}[x]$, a álgebra dos polinômios na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$. Temos que $x \in \mathbb{K}[x]$, mas x não está em nenhuma subálgebra de dimensão finita de $\mathbb{K}[x]$. De fato, se estivesse em uma subálgebra X de dimensão finita, os polinômios $x^2, x^3, \ldots$ deveriam estar também em X, e teríamos um subconjunto LI infinito em X. Obtemos, então, uma contradição com o fato de X ter dimensão finita.

1.2.5 Coálgebra co-oposta

Seja C uma coálgebra. De forma dual ao caso da álgebra oposta, definimos o coproduto co-oposto

$$\Delta^{\mathrm{cop}} = \tau \circ \Delta$$

com $\tau\colon C \otimes C \to C \otimes C$ o operador de transposição, dado por $\tau(c_1 \otimes c_2) = c_2 \otimes c_1$. Vamos ver a seguir que $(C, \Delta^{\mathrm{cop}}, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Chamaremos, então, C^{cop} quando estivermos tratando C munido do coproduto co-oposto Δ_{cop}.

Vejamos a comutatividade dos diagramas:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} \otimes \Delta^{\mathrm{cop}}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} &= (\mathrm{Id} \otimes (\tau \circ \Delta)) \circ (\tau \circ \Delta) \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \tau \circ \Delta \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau) \circ \tau_{C \otimes C, C} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta^{\mathrm{cop}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} &= ((\tau \circ \Delta) \otimes \mathrm{Id}) \circ (\tau \circ \Delta) \\
&= (\tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau \circ \Delta \\
&= (\tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{C, C \otimes C} \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \ .
\end{aligned}$$

Assim $(\Delta^{\mathrm{cop}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} = (\mathrm{Id} \otimes \Delta^{\mathrm{cop}}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$. O diagrama da counidade fica:

$$\begin{aligned}\varphi_r^{-1} \circ (\mathrm{Id} \circ \varepsilon) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} &= \varphi_r^{-1} \circ (\mathrm{Id} \circ \varepsilon) \circ \tau \circ \Delta \\ &= \varphi_r^{-1} \circ \tau_{C,\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \circ \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= \varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon \circ \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= \mathrm{Id}\ ,\end{aligned}$$

e a comutatividade do outro diagrama da counidade é obtida de forma análoga. Repare que:

$$\begin{aligned}\varphi_l^{-1} \circ \tau_{C,\mathbb{K}} = (\tau_{C,\mathbb{K}}{}^{-1} \circ \varphi_l)^{-1} = (\tau_{\mathbb{K},C} \circ \varphi_l)^{-1} = \varphi_r^{-1} \\ \varphi_r^{-1} \circ \tau_{\mathbb{K},C} = (\tau_{\mathbb{K},C}{}^{-1} \circ \varphi_r)^{-1} = (\tau_{C,\mathbb{K}} \circ \varphi_r)^{-1} = \varphi_l^{-1}\ .\end{aligned}$$

1.2.6 Coálgebra do produto tensorial

Sejam C e D coálgebras. Definiremos uma estrutura de coálgebra para $C \otimes D$ a partir das estruturas de C e de D.

Defina o coproduto por

$$\Delta_{C\otimes D} = (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

e a counidade por

$$\varepsilon_{C\otimes D} = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)\ .$$

Aplicando em elementos, com $c \in C$ e $d \in D$, ficamos com:

$$\begin{aligned}\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) &= c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) &= \varepsilon_C(c) \cdot \varepsilon_D(d)\quad .\end{aligned}$$

Vamos checar a coassociatividade:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Id}_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D} \\ &= (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \Delta_C \otimes \Delta_D) \circ \\ &\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \\ &= (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ \\ &\qquad \circ \Big(\mathrm{Id}_C \otimes \big((\mathrm{Id}_D \otimes \Delta_C) \circ \tau_{C,D}\big) \otimes \Delta_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \\ &= (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ \\ &\qquad \circ \Big(\mathrm{Id}_C \otimes \big(\tau_{C\otimes C,D} \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_D)\big) \otimes \Delta_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \\ &= \tau_{\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6}} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C\otimes C,D} \otimes \mathrm{Id}_{D\otimes D}) \circ \\ &\qquad \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \\ &= \tau_{\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6}} \circ \tau_{\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{1\ 4\ 2\ 3\ 5\ 6}} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \\ &= \tau_{\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6}} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\ ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_{C\otimes D} \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D}\\
&= (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad \circ \Big(\Delta_C \otimes \big((\Delta_D \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \tau_{C,D}\big) \otimes \mathrm{Id}_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad \circ \Big(\Delta_C \otimes \big(\tau_{C,D\otimes D} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_D)\big) \otimes \mathrm{Id}_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{smallmatrix}\right)} \circ (\mathrm{Id}_{C\otimes C} \otimes \tau_{C,D\otimes D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \Delta_D \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{smallmatrix}\right)} \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&4&5&3&6\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \Delta_D \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&2&5&3&6\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \Delta_D \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\ .
\end{aligned}
$$

Assim $(\Delta_{C\otimes D} \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D} = (\mathrm{Id}_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D}$.

Para a counidade temos:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ (\varepsilon_{C\otimes D} \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D}\\
&= \varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ \Big(\big(\mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)\big) \otimes \mathrm{Id}_{C\otimes D}\Big) \circ \Delta_{C\otimes D}\\
&= \varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad \circ \Big(\varepsilon_C \otimes \big((\varepsilon_D \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \tau_{C,D}\big) \otimes \mathrm{Id}_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad \circ \Big(\varepsilon_C \otimes \big(\tau_{C,\mathbb{K}} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_D)\big) \otimes \mathrm{Id}_D\Big) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \varphi_{l\ C\otimes D}^{-1} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \tau_{C,\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_D) \circ\\
&\qquad\qquad \circ (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_D \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= (\varphi_{l\ C}^{-1} \otimes \varphi_{l\ D}^{-1}) \circ (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_D \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)\\
&= \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D = \mathrm{Id}_{C\otimes D}\ .
\end{aligned}
$$

O outro diagrama da counidade é análogo. Note que no final da seção 1.1.5, obtivemos

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \tau_{\mathbb{K},A} \otimes \mathrm{Id}_B) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B) \circ \varphi_{l\ A\otimes B} &= \varphi_{l\ A} \otimes \varphi_{l\ B}\\
(\mathrm{Id}_A \otimes \tau_{B,\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mathrm{Id}_B \otimes \Delta_{\mathbb{K}}) \circ \varphi_{r\ A\otimes B} &= \varphi_{r\ A} \otimes \varphi_{r\ B}\ ,
\end{aligned}
$$

onde $\Delta_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ é dada por $\Delta_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}})$. Invertendo essas relações (e trocando A por C e B por D), obtemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_l{}_{C\otimes D}^{-1} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \tau_{C,\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_D) &= \varphi_l{}_C^{-1} \otimes \varphi_l{}_D^{-1} \\
\varphi_r{}_{C\otimes D}^{-1} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_D \otimes \mu_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau_{\mathbb{K},D} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) &= \varphi_r{}_C^{-1} \otimes \varphi_r{}_D^{-1} ,
\end{aligned}$$

em que $\mu_{\mathbb{K}} = \Delta_{\mathbb{K}}^{-1}$, $\tau_{\mathbb{K},C}^{-1} = \tau_{C,\mathbb{K}}$ e $\tau_{D,\mathbb{K}}^{-1} = \tau_{\mathbb{K},D}$.

1.2.7 Coálgebra quociente

Dada uma coálgebra C e um ideal I, construiremos uma estrutura de coálgebra para o quociente $\frac{C}{I}$. Essa estrutura respeitará a projeção canônica, no sentido que a projeção será um morfismo de coálgebras.

Proposição 1.2.19. *Sejam C coálgebra, $I \subseteq C$ coideal e $\pi\colon C \to \frac{C}{I}$ o a projeção canônica, que é morfismo de espaços vetoriais. Então existe uma única estrutura de coálgebra em $\frac{C}{I}$ tal que a projeção canônica π seja um morfismo de coálgebras. Essa estrutura é dada por:*

$$\begin{aligned}
\Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}} \\
\varepsilon_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= \varepsilon(c) \ .
\end{aligned}$$

Demonstração. Vamos começar verificando que $\Delta_{\frac{C}{I}}$ e de $\varepsilon_{\frac{C}{I}}$ estão bem definidos. Considere as transformações lineares

$$\begin{aligned}
\pi \otimes \pi \circ \Delta_C \colon C &\to \tfrac{C}{I} \otimes \tfrac{C}{I} \\
\varepsilon_C \colon C &\to \mathbb{K} \ .
\end{aligned}$$

Temos que $I = \ker(\pi)$. Como I é coideal de C, temos que

$$\varepsilon_C(I) = 0 \implies I \subseteq \ker(\varepsilon_C)$$

e também

$$(\pi\otimes\pi)\circ\Delta_C(I) \subseteq (\pi\otimes\pi)(I\otimes C + C\otimes I) = 0 \implies I \subseteq \ker\big((\pi\otimes\pi)\circ\Delta_C\big) \ .$$

Como o coideal I é anulado por ε_C e por $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta_C$, podemos definir essas transformações lineares no espaço vetorial quociente $\frac{C}{I}$ e concluir que existem transformações lineares

$$\begin{aligned}
\Delta_{\frac{C}{I}} \colon \tfrac{C}{I} &\to \tfrac{C}{I} \otimes \tfrac{C}{I} \\
\varepsilon_{\frac{C}{I}} \colon \tfrac{C}{I} &\to \mathbb{K}
\end{aligned}$$

tais que:

$$\begin{aligned}\Delta_{\frac{C}{I}} \circ \pi &= (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_C \\ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= (\pi \otimes \pi)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) = \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\frac{C}{I}} \circ \pi &= \varepsilon_C \\ \varepsilon_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= \varepsilon_C(c) \ .\end{aligned}$$

Assim, os morfismos $\Delta_{\frac{C}{I}}$ e $\varepsilon_{\frac{C}{I}}$ estão bem definidos, e π satisfaz os diagramas comutativos da definição de morfismo de coálgebras.

Vamos verificar que satisfazem a coassociatividade e a counidade. Para a coassociatividade, basta ver que:

$$\begin{aligned}(\Delta_{\frac{C}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}}) \circ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= (\Delta_{\frac{C}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}})(\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}) \\ &= \overline{c_{(1)(1)}} \otimes \overline{c_{(1)(2)}} \otimes \overline{c_{(2)}} \\ &= (\pi \otimes \pi \otimes \pi)(c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}) \\ &= (\pi \otimes \pi \otimes \pi)(c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}) \\ &= \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)(1)}} \otimes \overline{c_{(2)(2)}} \\ &= \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}} \otimes \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}) \\ &= (\mathrm{Id}_{\frac{C}{I}} \otimes \Delta_{\frac{C}{I}}) \circ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) \ .\end{aligned}$$

Para a counidade,

$$\begin{aligned}\varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon_{\frac{C}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}}) \circ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) &= \varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon_{\frac{C}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}})(\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}) \\ &= \varepsilon_{\frac{C}{I}}(\overline{c_{(1)}}) \cdot \overline{c_{(2)}} \\ &= \varepsilon_C(c_{(1)}) \cdot \overline{c_{(2)}} \\ &= \overline{\varepsilon_C(c_{(1)}) \cdot c_{(2)}} \\ &= \overline{c} \ ,\end{aligned}$$

e de forma análoga

$$\varphi_l^{-1} \circ (\varepsilon_{\frac{C}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{C}{I}}) \circ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) = \overline{c} \ .$$

Por fim, verifiquemos a unicidade. Se $\tilde{\Delta}$ e $\tilde{\epsilon}$ são coproduto e counidade em $\frac{C}{I}$ tais que π é morfismo de coálgebras, então temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\overline{c}) &= \tilde{\Delta} \circ \pi(c) \\ &= (\pi \otimes \pi)\big(\Delta_C(c)\big) \\ &= \Delta_{\frac{C}{I}} \circ \pi(c) \\ &= \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\overline{c}) &= \tilde{\varepsilon} \circ \pi(c) \\
&= \varepsilon_C(c) \\
&= \varepsilon_{\frac{C}{I}} \circ \pi(c) \\
&= \varepsilon_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) \ .
\end{aligned}$$

□

Suponha que temos uma transformação linear $f\colon U \to V$ entre espaços vetoriais, e um subespaço $I \subseteq U$. Se f anular I, então é possível passar f ao quociente, ficando com $\overline{f}\colon \frac{U}{I} \to V$ tal que $f(\overline{u}) = f(u)$ para todo $u \in U$. A próxima proposição é uma versão desse resultado para morfismos de coálgebras.

Proposição 1.2.20. *Sejam C, D coálgebras, $I \subseteq C$ um coideal e $\pi\colon C \to \frac{C}{I}$ o a projeção canônica. Se $f\colon C \to D$ é um morfismo de coálgebras tal que $I \subseteq \ker(f)$, então existe um único morfismo de coálgebras $\overline{f}\colon \frac{C}{I} \to D$ tal que*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & D \\
 & \frac{C}{I} \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ \pi = f \ .$$

Demonstração. Como $f\colon C \to D$ é uma transformação linear com $I \subseteq \ker(f)$, então existe uma única transformação linear $\overline{f}$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$, isto é, $\overline{f}(\overline{c}) = f(c)$ para todo $c \in C$.

$\overline{f}$ é morfismo de coálgebras, pois:

$$\begin{aligned}
\Delta_D \circ \overline{f}(\overline{c}) &= \Delta_D \circ f(c) \\
&= (f \otimes f) \circ \Delta_C(c) \\
&= f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \\
&= \overline{f}(\overline{c_{(1)}}) \otimes \overline{f}(\overline{c_{(2)}}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f}) \circ \Delta_{\frac{C}{I}}(\overline{c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_D \circ \overline{f}(\overline{c}) &= \varepsilon_D \circ f(c) \\
&= \varepsilon_C(c) \\
&= \varepsilon_{\frac{C}{I}}(\overline{c}) \ .
\end{aligned}$$

Falta apenas verificar a unicidade da $\overline{f}$. Se $\overline{g}\colon \frac{C}{I} \to D$ for outro morfismo de coálgebras com $\overline{g} \circ \pi = f$, então

$$\overline{g}(\overline{c}) = \overline{g} \circ \pi(c) = f(c) = \overline{f}(\overline{c})$$

para todo $\overline{c} \in \frac{C}{I}$. Portanto $\overline{g} = \overline{f}$ e a unicidade fica provada. □

Corolário 1.2.21. *Sejam C, D coálgebras e $f\colon C \to D$ morfismo de coálgebras. Então*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \frac{C}{\ker(f)} &\to \mathrm{Im}(f) \\ \overline{a} &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

é isomorfismo de coálgebras, e portanto

$$\frac{C}{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f) \ .$$

Demonstração. Basta considerar $I = \ker(f)$ na proposição anterior, e $\overline{f}$ é morfismo de coálgebras. Para mostrar que é bijeção, a sobrejetividade é imediata e a injetividade vem de

$$\overline{f}(\overline{c}) = 0 \implies f(c) = 0 \implies c \in \ker(f) \implies \overline{c} = 0 \ .$$ □

1.3 Duais de álgebras e coálgebras

Álgebras e coálgebras são espaços vetoriais com estruturas adicionais. É possível tomar o dual, considerando-os do ponto de vista dos espaços vetoriais. Relembrando, o dual de um espaço vetorial V é o espaço vetorial das transformações lineares de V em $\mathbb{K}$, denotado por V^*, e a transposta de uma transformação linear $f\colon U \to V$ é a transformação linear $f^*\colon V^* \to U^*$ tal que $f^*(\phi) = \phi \circ f$. O conjunto das transformações lineares de U em V é denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$.

Acontece que o espaço dual também herda estruturas de álgebra ou coálgebra do seu espaço original, da seguinte forma:

- O dual de uma coálgebra é uma álgebra;
- O dual de uma álgebra é uma coálgebra (com certas ressalvas[5]).

[5] A álgebra deve ter dimensão finita, ou então, o dual considerado é o dual finito, a ser definido na seção 1.3.3.2.

A ideia para obter uma estrutura para o dual é transpor os morfismos das estruturas do espaço original. Por exemplo, dadas A álgebra e C coálgebra, temos

$$\begin{array}{ll} \mu : A \otimes A \to A & \mu^* : A^* \to (A \otimes A)^* \\ \eta : \mathbb{K} \to A & \eta^* : A^* \to \mathbb{K}^* \\ \Delta : C \to C \otimes C & \Delta^* : (C \otimes C)^* \to C^* \\ \varepsilon : C \to \mathbb{K} & \varepsilon^* : \mathbb{K}^* \to C^* \ . \end{array}$$

Ao transpor esses morfismos, as flechas são invertidas. Isso explica essa mudança de álgebra para coálgebra no dual e vice-versa, já que os morfismos que definem a coálgebra, por exemplo, são semelhantes aos da álgebra, mas apontam em sentido contrário. É necessário, no entanto, identificar $\mathbb{K}$ com $\mathbb{K}^*$ e $(A \otimes A)^*$ com $A^* \otimes A^*$. A primeira identificação é natural, via o isomorfismo

$$\begin{aligned} \xi \colon \mathbb{K} &\to \mathbb{K}^* \\ \lambda &\mapsto \mathrm{mult}_\lambda \ , \end{aligned}$$

em que $\mathrm{mult}_\lambda(\alpha) = \lambda \cdot \alpha$.

No entanto, a outra identificação $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$ trará algumas dificuldades e não será válida sempre. Veremos que há uma injeção $A^* \otimes A^* \hookrightarrow (A \otimes A)^*$, que nem sempre é sobrejeção. E no caso particular de $\dim(A)$ finita, essa injeção é um isomorfismo.

Lema 1.3.1. *Sejam M, N e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Considere as transformações lineares:*

$$\phi \colon M^* \otimes V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, V)$$
$$\phi(f \otimes v)(m) = f(m) \cdot v$$

$$\phi' \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N^*) \to (M \otimes N)^*$$
$$\phi'(g)(m \otimes n) = (g(m))(n)$$

$$\theta \colon M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$$
$$\theta(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \cdot g(n) \ .$$

Então:

1. *ϕ é injetora. Se V tem dimensão finita, então ϕ é bijetora.*

2. *ϕ' é bijeção.*

3. *θ é injetora. Se N tem dimensão finita, então θ é bijetora.*

Demonstração.

1. (ϕ é injetiva:)

   Seja $x \in \ker(\phi)$. Temos $x = \sum_k f_k \otimes v_k \in M^* \otimes v_k$, e podemos escolher os v_k's LI. Daí

$$\begin{aligned}
\phi(x) = 0 \implies 0 = \phi(x)(m) = \sum_k f_k(m) v_k \quad \forall m \in M \\
\overset{v_k\text{'s LI}}{\implies} f_k(m) = 0 \quad \forall k, \forall m \in M \\
\implies f_k = 0 \quad \forall k \\
\implies x = 0 \ .
\end{aligned}$$

   Logo ϕ é injetiva.

   (Se $\dim(V) < \infty$, então ϕ é bijetora:)

   Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Seja $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, V)$. Então temos $h(m) \in V$ e $h(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) v_i$, com únicos coeficientes $a_i(m) \in \mathbb{K}$. Esses coeficientes definem, na verdade, funcionais lineares $a_i \colon M \to \mathbb{K}$. A linearidade vem da linearidade de h:

$$\begin{aligned}
& h(m_1 + \lambda m_2) = h(m_1) + \lambda h(m_2) \\
& \implies \sum_i a_i(m_1 + \lambda m_2) v_i = \sum_i (a_i(m_1) + \lambda a_i(m_2)) v_i \\
& \implies a_i(m_1 + \lambda m_2) = a_i(m_1) + \lambda a_i(m_2), \forall i \ .
\end{aligned}$$

   Então, temos:

$$h(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) v_i = \sum_{i=1}^n \phi(a_i \otimes v_i)(m) = \phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i\right)(m) \ .$$

   Logo $h = \phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i\right) \in \mathrm{Im}(\phi)$.

2. (ϕ' é injetiva:)

   Seja $g \in \ker(\phi')$.

$$\begin{aligned}
\phi'(g) = 0 \implies 0 = \phi'(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \forall m \in M, \forall n \in N \\
\implies g(m) = 0, \forall m \in M \\
\implies g = 0 \ .
\end{aligned}$$

   ϕ' é sobrejetiva:
   Seja $h \in (M \otimes N)^*$. Defina $g \colon M \to N^*$ por $g(m)(n) := h(m \otimes n)$, para $m \in M$ e $n \in N$. Temos que $g(m) \in M^*$ e que $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N^*)$. Portanto $h = \phi'(g) \in \mathrm{Im}(\phi')$.

3. Segue de 1. e 2., com $V = N^*$ e $\theta = \phi' \circ \phi$. □

Corolário 1.3.2. *Sejam $M_1, \ldots M_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Seja:*

$$\theta_n \colon {M_1}^* \otimes \ldots \otimes {M_n}^* \to (M_1 \otimes \ldots \otimes M_n)^*$$
$$\theta_n(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = f_1(m_1) \cdots f_n(m_n) \ .$$

Então ϕ é injetora, e se todos os $M_1, \ldots M_n$ têm dimensão finita, ϕ é bijetora.

Demonstração. Por indução em n. O caso $n = 2$ foi visto no item 3. da proposição anterior e o passo de indução segue de $\theta_{n+1} = \theta_2 \circ (\theta_n \otimes \mathrm{Id})$:

$$\begin{tikzcd}
{M_1}^* \otimes \ldots \otimes {M_n}^* \otimes M_{n+1}^* \arrow[r, "\theta_n \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\theta_{n+1}"'] & (M_1 \otimes \ldots \otimes M_n)^* \otimes M_{n+1}^* \arrow[d, "\theta_2"] \\
& (M_1 \otimes \ldots \otimes M_n \otimes M_{n+1})^* \ .
\end{tikzcd}$$

□

1.3.1 Estrutura de álgebra para $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$

Sejam A uma álgebra e C uma coálgebra. O conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ das transformações lineares de C em A é um espaço vetorial, e podemos equipá-lo com uma estrutura de álgebra. Defina um produto $*$ em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, chamado de *produto de convolução*, por

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C$$

$$\begin{aligned} f * g(c) &= \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C(c) \\ &= \sum_c f(c_{(1)}) g(c_{(2)}) \ , \end{aligned}$$

com $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, e a unidade por

$$1_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C,A)} = \eta_A \circ \varepsilon_C \ .$$

Proposição 1.3.3. *Com as definições acima, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ é uma álgebra.*

Demonstração. Para todos $f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

(Bilinearidade do produto:)

$$\begin{aligned} f * (g + \lambda h) &= \mu_A \circ (f \otimes (g + \lambda h)) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C + \lambda\ \mu_A \circ (f \otimes h) \circ \Delta_C \\ &= f * g + \lambda\ f * h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + \lambda g) * h &= \mu_A \circ ((f + \lambda\ g) \otimes h) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ (f \otimes h) \circ \Delta_C + \lambda\ \mu_A \circ (g \otimes h) \circ \Delta_C \\ &= f * h + \lambda\ g * h\ . \end{aligned}$$

(Associatividade do produto:)

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \mu_A \circ \big((f * g) \otimes h\big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ \Big(\big((\mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C\big) \otimes h\Big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ \Big(\big((\mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C\big) \otimes (\mathrm{Id}_A \circ h \circ \mathrm{Id}_C)\Big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ (\mu_A \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \mu_A \circ \big(f \otimes (g * h)\big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ \Big(f \otimes \big(\mu_A \circ (g \otimes h) \circ \Delta_C\big)\Big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ \Big((\mathrm{Id}_A \circ f \circ \mathrm{Id}_C) \otimes \big(\mu_A \circ (g \otimes h) \circ \Delta_C\big)\Big) \circ \Delta_C \\ &= \mu_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_A) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C\ . \end{aligned}$$

Como valem

$$\begin{aligned} \mu_A \circ (\mu_A \otimes \mathrm{Id}_A) &= u_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mu_A) \\ (\Delta_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_C &= (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C\ , \end{aligned}$$

obtemos $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(Propriedade da unidade:)

Note que pela propriedade da unidade para A e da counidade para C, temos:

$$\begin{array}{rcl} \mu_A \circ (\eta_A \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \varphi_{l\ A} = \mathrm{Id}_A & & \mu_A \circ (\eta_A \otimes \mathrm{Id}_A) = \varphi_{l\ A}^{-1} \\ \mu_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \eta_A) \circ \varphi_{r\ A} = \mathrm{Id}_A & \Longrightarrow & \mu_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \eta_A) = \varphi_{r\ A}^{-1} \\ \varphi_{l\ C}^{-1} \circ (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_C = \mathrm{Id}_C & & (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_C = \varphi_{l\ C} \\ \varphi_{r\ C}^{-1} \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = \mathrm{Id}_C & & (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = \varphi_{r\ C}\ . \end{array}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
1_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C,A)} * f &= \mu_A \circ \big((\eta_A \circ \varepsilon_C) \otimes f\big) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ \big((\eta_A \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_C) \otimes (\mathrm{Id}_A \circ f \circ \mathrm{Id}_C)\big) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ (\eta_A \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes f) \circ (\varepsilon_C \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_C \\
&= \varphi_l{}_A^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes f) \circ \varphi_l{}_C \\
&= f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f * 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C,A)} &= \mu_A \circ \big(f \otimes (\eta_A \circ \varepsilon_C)\big) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ \big((\mathrm{Id}_A \circ f \circ \mathrm{Id}_C) \otimes (\eta_A \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_C)\big) \circ \Delta_C \\
&= \mu_A \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \eta_A) \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C \\
&= \varphi_r{}_A^{-1} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ \varphi_r{}_C \\
&= f \ .
\end{aligned}$$

□

1.3.2 Estrutura de álgebra para o dual de uma coálgebra

Dada uma coálgebra C, podemos fornecer uma estrutura para o dual $C^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, \mathbb{K})$ do mesmo modo que na seção anterior, usando a estrutura de álgebra padrão de $\mathbb{K}$. O produto (de convolução) $*$ fica definido, para quaisquer $f, g \in C^*$, por:

$$\begin{aligned}
f * g &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C \\
f * g(c) &= \sum_c f(c_{(1)}) \cdot g(c_{(2)}) \\
\mu_{C^*} &= \Delta_C^* \circ \theta \ ,
\end{aligned}$$

A unidade é dada por:

$$\begin{aligned}
1_{C^*} &= \eta_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_C = \mathrm{Id} \circ \varepsilon_C = \varepsilon_C \\
\eta_{C^*} &= \varepsilon_C^* \circ \xi \ .
\end{aligned}$$

Em cima, temos:

$$\begin{aligned}
&\theta \colon C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^* \\
&\xi \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*
\end{aligned}$$

dadas por $\theta(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c) \cdot g(d)$ e $\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda$, em que $\mathrm{mult}_l \in \mathbb{K}^*$ é a multiplicação por λ.

Além disso, há um resultado sobre a transposta de morfismos de álgebras.

Proposição 1.3.4. *Se $f\colon C \to D$ é morfismo de coálgebras, então $f^*\colon D^* \to C^*$ é morfismo de álgebras.*

Demonstração. Dados $p, q \in D^*$, temos

$$\begin{aligned} f^*(p * q) &= (p * q) \circ f \\ f^*(p) * f^*(q) &= (p \circ f) * (q \circ f) \ . \end{aligned}$$

Mas temos $(p * q) \circ f = (p \circ f) * (q \circ f)$. De fato, para todo $c \in C$,

$$\begin{aligned} \big((p \circ f) * (q \circ f)\big)(c) &= \sum_c (p \circ f)(c_{(1)})(q \circ f)(c_{(2)}) \\ &= \sum_{f(c)} p(f(c)_{(1)})q(f(c)_{(2)}) \\ &= (p * q)(f(c)) = (p * q) \circ f(c) \ . \end{aligned}$$

Além disso,

$$f^*(1_{D^*}) = 1_{D^*} \circ f = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C = 1_{C^*} \ .$$

□

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.3.5 (O dual da coálgebra das matrizes M_n^c é M_n)**.** M_n^c e M_n foram vistos nos exemplos 1.2.6 e 1.1.7, respectivamente.

Vamos calcular a álgebra dual da coálgebra M_n^c. Sejam $f, g \in (M_n^c)^*$. O produto (de convolução) e a unidade são:

$$\begin{aligned} f * g(e_{ij}) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta(e_{ij}) \\ &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \left(\sum_{k=1}^n e_{ik} \otimes e_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n f(e_{ik})g(e_{kj}) \\ \eta_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon(e_{ij}) &= \eta_{\mathbb{K}}(\delta_{ij}) = \delta_{ij} \ . \end{aligned}$$

O produto lembra um produto de matrizes e a unidade lembra a matriz identidade. Tentaremos exibir um isomorfismo entre essa álgebra dual e a álgebra das matrizes. Vamos definir, então, $\Phi\colon (M_n^c)^* \to M_n$ por $\Phi(h) = [h(e_{ij})]_{ij}$. Temos

$$\begin{aligned} \Phi(f * g) &= \Phi(f)\Phi(g) \\ \Phi(\eta_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon) &= \mathrm{Id} \ , \end{aligned}$$

portanto Φ é morfismo de álgebras. Além disso, Φ é um isomorfismo. De fato, é injetiva pois seu núcleo é nulo:

$$h \in \ker(\Phi) \implies [h(e_{ij})]_{ij} = [0]_{ij} \implies h(e_{ij}) = 0, \forall i, j \implies h = 0 \ .$$

E é sobrejetiva, pois qualquer matriz $[a_{ij}]_{ij}$ define um funcional $f \in (M_n^c)^*$ por $f(e_{ij}) = a_{ij}$, e temos $[a_{ij}]_{ij} = \Phi(f) \in M_n$.

Desse modo, $(M_n^c)^* \cong M_n$ como álgebras.

Exemplo 1.3.6 (O dual da coálgebra de potências é $\mathbb{K}[[x]]$)**.** Seja C a coálgebra da potência dividida, vista no exemplo 1.2.5. Seja $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ base de C. Temos

$$\begin{aligned} \Delta(c_m) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{m-i} \\ \varepsilon(c_m) &= \delta_{0,m} \ . \end{aligned}$$

Vamos explicitar a álgebra dual C^*. Dados $f, g \in C^*$, temos

$$\begin{aligned} f * g(c_m) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c_m) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(c_i) \cdot g(c_{n-i}) \\ 1_{C^*}(c_m) &= \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m} \ . \end{aligned}$$

Esse produto lembra o termo m-ésimo de um produto de séries de potência. Tentaremos encontrar um isomorfismo de C^* na álgebra das séries de potência formais $\mathbb{K}[[x]]$. Defina

$$\begin{aligned} \Phi\colon C^* &\to \mathbb{K}[[x]] \\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)\ x^n \ . \end{aligned}$$

Mostraremos que Φ é um isomorfismo de álgebras. A injetividade é consequência de

$$\Phi(f) = 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)\ x^n = 0 \implies f(c_n) = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f = 0 \ .$$

Para a sobrejetividade, seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{K}[[x]]$. Definindo a transformação linear nos elementos da base de C por $f(c_n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Phi(f)$ está na imagem de Φ. Resta, então, mostrar que é morfismo de álgebras. Isso ocorre porque dados $f, g \in C^*$, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi(f * g) &= \sum_{n=0}^{\infty} f * g(c_n)\ x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} f(c_i) g(c_j)\ x^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(c_i) x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} g(c_j) x^j \right) \\
&= \Phi(f) \cdot \Phi(g)\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(1_{C^*}) = \Phi(\varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(c_n)\ x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0,n}\ x^n = 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}[[x]]}\ .
\end{aligned}$$

Com isso, o dual da coálgebra da potência dividida é isomorfo à álgebra das séries de potências formais.

1.3.3 Estrutura de coálgebra para o dual de uma álgebra

1.3.3.1 Dimensão finita

Seja A uma álgebra de dimensão finita. Daremos uma estrutura de coálgebra para o dual A^*. Nesse caso, $\theta\colon A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ é bijeção linear, como visto no lema 1.3.1. É possível definir o coproduto e a counidade para A^* por

$$\begin{aligned}
\Delta_{A^*} &= \theta^{-1} \circ \mu_A^* \\
\varepsilon_{A^*} &= \xi^{-1} \circ \eta_A^*\ ,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
&\theta\colon C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^* \\
&\xi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*
\end{aligned}$$

são dadas por $\theta(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c) \cdot g(d)$ e $\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda$ ($\mathrm{mult}_\lambda \in \mathbb{K}^*$ é a multiplicação por λ).

Verificaremos posteriormente que satisfazem a coassociatividade e a propriedade da counidade. Primeiramente, precisaremos de um lema:

Lema 1.3.7. *Seja $f \in A^*$. Temos*

$$\Delta_{A^*}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$$

para alguns $g_i, h_i \in A^*$. Então:

1. $f(a \cdot b) = \sum_i g_i(a) \cdot h_i(b),\ \forall a, b \in A$.
2. *Se tivermos $f(a \cdot b) = \sum_j g'_j(a) \cdot h'_j(b),\ \forall a, b \in A$ para outros $g'_j, h'_j \in A^*$, então*
$$\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j\ .$$

Demonstração.

1. Para todos $a, b \in A$, temos:
$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f \circ \mu_A(a \otimes b) \\ &= \big(\mu_A^*(f)\big)(a \otimes b) \\ &= \big(\theta \circ \theta^{-1} \circ \mu_A^*(f)\big)(a \otimes b) \\ &= \theta(\Delta_{A^*}(f))(a \otimes b) \\ &= \theta\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right)(a \otimes b) \\ &= \sum_i g_i(a) \cdot h_i(b)\ . \end{aligned}$$

2. Se $f(a \cdot b) = \sum_i g_i(a) \cdot h_i(b) = \sum_j g'_j(a) \cdot h'_j(b),\ \forall a, b \in A$, então:
$$f(a \cdot b) = \theta\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right)(a \otimes b) = \theta\left(\sum_j g'_j \otimes h'_j\right)(a \otimes b),\ \forall a, b \in A$$
$$\Longrightarrow\ \theta\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right) = \theta\left(\sum_j g'_j \otimes h'_j\right)$$
$$\Longrightarrow\ \sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j\ ,$$
pois θ é uma bijeção.

$\square$

Agora checaremos a coassociatividade e a propriedade da counidade, e com isso obteremos que A^* é uma coálgebra.

Proposição 1.3.8. *Se A é uma álgebra de dimensão finita, então A^* é uma coálgebra, com coproduto e counidade definidos por*

$$\begin{aligned} \Delta_{A^*} &= \theta^{-1} \circ \mu_A^* \\ \varepsilon_{A^*} &= \xi^{-1} \circ \eta_A^* \ , \end{aligned}$$

como no começo desta seção.

Demonstração.
(Coassiciatividade:) Seja $f \in A^*$. Vamos denotar:

$$\begin{aligned} \Delta_{A^*}(f) &= \sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)} \\ \Delta_{A^*}(f_i^{(1)}) &= \sum_j f_{ij}^{(1)(1)} \otimes f_{ij}^{(1)(2)} \\ \Delta_{A^*}(f_i^{(2)}) &= \sum_j f_{ij}^{(2)(1)} \otimes f_{ij}^{(2)(2)} \ . \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} (\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{A^*}(f) &= \sum_{i,j} f_{ij}^{(1)(1)} \otimes f_{ij}^{(1)(2)} \otimes f_i^{(2)} \\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f) &= \sum_{i,j} f_i^{(1)} \otimes f_{ij}^{(2)(1)} \otimes f_{ij}^{(2)(2)} \ . \end{aligned}$$

Considere a bijeção linear (pelo corolário do lema 1.3.1)

$$\begin{gathered} \theta_3 \colon A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^* \\ \theta_3(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = g_1(a_1) g_2(a_2) g_3(a_3) \ , \end{gathered}$$

para todos $g_1, g_2, g_3 \in A^*$ e $a_1, a_2, a_3 \in A$. Com isso, pelo lema 1.3.7, obtemos:

$$\begin{aligned} &\theta_3\big((\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{A^*}(f)\big)(a \otimes b \otimes c) \\ &= \sum_i \left(\sum_j f_{ij}^{(1)(1)}(a) f_{ij}^{(1)(2)}(b) \right) f_i^{(2)}(c) \\ &\overset{1.3.7}{=} \sum_i f_i^{(1)}(a \cdot b) f_i^{(2)}(c) \\ &\overset{1.3.7}{=} f((a \cdot b) \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_3\big((\mathrm{Id}\otimes\Delta_{A^*})\circ\Delta_{A^*}(f)\big)(a\otimes b\otimes c)\\
&= \sum_i \left(\sum_j f_i^{(1)}(a) f_{ij}^{(2)(1)}(b)\right) f_{ij}^{(2)(2)}(c)\\
&\overset{1.3.7}{=} \sum_i f_i^{(1)}(a) f_i^{(2)}(b\cdot c)\\
&\overset{1.3.7}{=} f(a\cdot(b\cdot c))\ .
\end{aligned}$$

Portanto $\theta_3\big((\Delta_{A^*}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_{A^*}(f)\big)=\theta_3\big((\mathrm{Id}\otimes\Delta_{A^*})\circ\Delta_{A^*}(f)\big)$ e logo,

$$(\Delta_{A^*}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_{A^*}=(\mathrm{Id}\otimes\Delta_{A^*})\circ\Delta_{A^*}\ .$$

(Counidade:) Temos:

$$\varepsilon_{A^*}(g)=\xi^{-1}\circ\eta_A^*(g)=\xi^{-1}(\eta_A\circ g)=g\circ\eta_A(1)=g(1_A),\ \forall g\in A^*\ .$$

Seja $f\in A^*$. Usando a mesma notação de antes para $\Delta_{A^*}(f)$, temos:

$$\begin{aligned}
\big({\varphi_l}^{-1}\circ(\varepsilon_{A^*}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_{A^*}\big)(f) &= {\varphi_l}^{-1}\left(\sum_i \varepsilon_{A^*}(f_i^{(1)})\otimes f_i^{(2)}\right)\\
&= {\varphi_l}^{-1}\left(\sum_i f_i^{(1)}(1_A)\otimes f_i^{(2)}\right)\\
&= \sum_i f_i^{(1)}(1_A)\cdot f_i^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big({\varphi_r}^{-1}\circ(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon_{A^*})\circ\Delta_{A^*}\big)(f) &= {\varphi_r}^{-1}\left(\sum_i f_i^{(1)}\otimes\varepsilon_{A^*}(f_i^{(2)})\right)\\
&= {\varphi_r}^{-1}\left(\sum_i f_i^{(1)}\otimes f_i^{(2)}(1_A)\right)\\
&= \sum_i f_i^{(1)}\cdot f_i^{(2)}(1_A)\ .
\end{aligned}$$

Logo, aplicando em $a\in A$, temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\big({\varphi_l}^{-1}\circ(\varepsilon_{A^*}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta_{A^*}\big)(f)\Big)(a) &= \sum_i f_i^{(1)}(1_A)\cdot f_i^{(2)}(a)\\
&\overset{1.3.7}{=} f(1_A\cdot a)\\
&= f(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\big({\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}\big)(f)\Big)(a) &= \sum_i f_i^{(1)}(a) \cdot f_i^{(2)}(1_A) \\ &\overset{1.3.7}{=} f(a \cdot 1_A) \\ &= f(a)\ .\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon_{A^*} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{A^*} &= \mathrm{Id} \\ {\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} &= \mathrm{Id}\ .\end{aligned}$$

□

Observação 1.3.9. Se A tem dimensão finita, pode-se expressar a comultiplicação da coálgebra A^* em termos da base dual. Seja $\{e_i\}$ base de A e $\{e_i^*\}$ a respectiva base dual em A^*. Temos que $\{e_i^* \otimes e_j^*\}$ é base para $A^* \otimes A^*$. Segue que para dado $f \in A^*$, $\Delta(f) = \sum_{k,l} a_{kl} e_k^* \otimes e_l^*$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}f(e_i e_j) &= f \circ \mu(e_i \otimes e_j) = \mu^*(f)(e_i \otimes e_j) = \theta(\Delta(f))(e_i \otimes e_j) \\ &= \sum_{k,l} a_{kl} e_k^*(e_i) e_l^*(e_j) = \sum_{k,l} a_{kl} \delta_{k,i} \delta_{l,j} = a_{ij}\ .\end{aligned}$$

Portanto, obtemos $\Delta(f)$ expresso em termos da base dual:

$$\Delta(f) = \sum_{k,l} f(e_k e_l) e_k^* \otimes e_l^*\ .$$

Vamos a um exemplo.

Exemplo 1.3.10 (O dual de M^n é a coálgebra das matrizes M_n^c)**.** Sejam M_n e M_n^c como nos exemplos 1.2.6 e 1.1.7, respectivamente.

Seja $\{E_{ij}\}$ base canônica de M_n, com E_{ij} a matriz com entrada ij igual a 1 e outras entradas nulas. Seja $\{E_{ij}^*\}$ a base dual em M_n^*. Temos, que para todo $f \in M_n^*$, pela observação anterior:

$$\begin{aligned}\Delta_{M_n^*}(f) &= \sum_{i,j,k,l} f(E_{ij} E_{kl}) E_{ij}^* \otimes E_{kl}^* \\ &= \sum_{i,j,k,l} f(\delta_{kj} E_{il}) E_{ij}^* \otimes E_{kl}^* \\ &= \sum_{i,j,l} f(E_{il}) E_{ij}^* \otimes E_{jl}^*\ .\end{aligned}$$

Portanto, para E_{ij}^*, temos:

$$\begin{aligned}\Delta_{M_n^*}(E_{ij}^*) &= \sum_{k,l,p} E_{ij}^*(E_{kp})E_{kl}^* \otimes E_{lp}^* \\ &= \sum_{k,l,p} \delta_{ik}\delta_{jp}E_{kl}^* \otimes E_{lp}^* \\ &= \sum_{l} E_{il}^* \otimes E_{lj}^* \ .\end{aligned}$$

A counidade é dada por

$$\varepsilon_{M_n^*}(f) = f(1) = f(\mathrm{Id}) \ ,$$

para $f \in M_n^*$, e

$$\varepsilon_{M_n^*}(E_{ij}^*) = E_{ij}^*(\mathrm{Id}) = \sum_l E_{ij}^*(E_{ll}) = \sum_l \delta_{il}\delta_{jl} = \delta_{ij} \ ,$$

para E_{ij}^*.

Considerando o isomorfismo de espaços vetoriais[6] $\Phi\colon M_n^* \to M_n^c$ dado por $\Phi(E_{ij}^*) = E_{ij}$, temos

$$\Delta_{M_n^c} \circ \Phi(E_{ij}^*) = \Delta_{M_n^c}(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj}$$

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{M_n^*}(E_{ij}^*) = (\Phi \otimes \Phi)\left(\sum_k E_{ik}^* \otimes E_{kj}^*\right) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj} \ .$$

Portanto $\Delta_{M_n^c} \circ \Phi = (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{M_n^*}$. Além disso,

$$\varepsilon_{M_n^c} \circ \Phi(E_{ij}^*) = \varepsilon_{M_n^c}(E_{ij}) = \delta_{ij} = \varepsilon_{M_n^*}(E_{ij}^*) \ .$$

Dessa forma, Φ é um isomorfismo de coálgebras, e $M_n^* \cong M_n^c$ como coálgebras.

Como no caso do dual de uma coálgebra, temos uma proposição sobre a transposta de um morfismo de álgebras.

Proposição 1.3.11. *Sejam A, B duas álgebras de dimensão finita. Se $f\colon A \to B$ é um morfismo de álgebras, então $f^*\colon B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.*

[6] Note que é bijetora pois leva uma base do domínio a uma base do contradomínio.

Demonstração. Seja $p \in B^*$. Então

$$\begin{aligned}\Delta_{A^*} \circ f^*(p) &= \Delta_{A^*}(p \circ f)\\ &= \sum_{p\circ f}(p \circ f)_{(1)} \otimes (p \circ f)_{(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}(p) &= f^* \otimes f^* \left(\sum_p p_{(1)} \otimes p_{(2)}\right)\\ &= \sum_p f^*(p_{(1)}) \otimes f^*(p_{(2)})\\ &= \sum_p (p_{(1)} \circ f) \otimes (p_{(2)} \circ f)\end{aligned}$$

Mas temos

$$\sum_{p\circ f}(p \circ f)_{(1)} \otimes (p \circ f)_{(2)} = \sum_p (p_{(1)} \circ f) \otimes (p_{(2)} \circ f) \ .$$

De fato, para todos $a, b \in A$, podemos usar o item 1. do lema 1.3.7 e obter:

$$\begin{aligned}\sum_{p\circ f}(p \circ f)_{(1)}(a) \cdot (p \circ f)_{(2)}(b) &\overset{1.3.7}{=} p \circ f(a \cdot b)\\ &= p(f(a) \cdot f(b))\\ &\overset{1.3.7}{=} \sum_p p_{(1)}(f(a)) \cdot p_{(2)}(f(b))\\ &= \sum_p (p_{(1)} \circ f)(a) \cdot (p_{(2)} \circ f)(b) \ ,\end{aligned}$$

Novamente, pelo lema 1.3.7, item 2., temos:

$$\sum_{p\circ f}(p \circ f)_{(1)} \otimes (P \circ f)_{(2)} = \sum_p p_{(1)} \circ f \otimes p_{(2)} \circ f \ .$$

Dessa forma, temos $\Delta_{A^*} \circ f^* = (f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*}$.
Resta, então, calcular:

$$\varepsilon_{A^*} \circ f^*(p) = \varepsilon_{A^*}(p \circ f) = p \circ f(1_A) = p(1_B) = \varepsilon_{B^*}(p) \ .$$

Obtemos $\varepsilon_{A^*} \circ f^* = \varepsilon_{B^*}$. $\square$

1.3.3.2 Dual finito

Agora consideramos o caso mais geral em que A é uma álgebra que não necessariamente tem dimensão finita. Como a transformação linear $\theta\colon A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ vista antes nem sempre é bijetora, nem sempre é possível definir uma estrutura de coálgebra no dual como feito na seção anterior. Entretanto, podemos considerar um subespaço de A^* no qual o coproduto esteja bem definido. É isso que faremos nessa seção.

Primeiramente, será necessário um lema sobre espaços vetoriais. Lembramos que dado um espaço vetorial V e um subespaço $X \subseteq V$, a codimensão de X é definida por $\mathrm{codim} X = \dim \frac{V}{X}$.

Lema 1.3.12. *Seja V um espaço vetorial. Sejam $X, Y \subseteq V$ subespaços. Então:*

$$\mathrm{codim}(X \cap Y) \leq \mathrm{codim} X + \mathrm{codim} Y \ .$$

Demonstração. Seja $\gamma\colon V \to \frac{V}{X} \times \frac{V}{Y}$ transformação linear dada por $\gamma(v) = (v + X, v + Y)$. Temos que $\ker(\gamma) = X \cap Y$ e que

$$\tfrac{V}{X \cap Y} = \tfrac{V}{\ker(\gamma)} \cong \mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \tfrac{V}{X} \times \tfrac{V}{Y} \ .$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \mathrm{codim}(X \cap Y) = \dim\left(\tfrac{V}{\ker(\gamma)}\right) &\leq \dim(\tfrac{V}{X}) + \dim(\tfrac{V}{Y}) \\ &= \mathrm{codim}(X) + \mathrm{codim}(Y) \ . \end{aligned}$$ □

Veremos abaixo um teorema que nos permitirá definir o dual finito por meio de várias propriedades equivalentes.

Teorema 1.3.13. *Sejam A uma álgebra e $f \in A^*$. Seja*

$$\begin{aligned} &\theta\colon A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^* \\ &\theta(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

a transformação linear injetiva vista no lema 1.3.1. São equivalentes:

1. $\exists f_i, g_i \in A^* \ (i = 1, \ldots, n) \ : \ \forall a, b \in A, \ f(a \cdot b) = \sum_i f_i(a) g_i(b)$.
2. $\mu_A^*(f) \in \theta(A^* \otimes A^*)$.
3. $\exists I \subseteq \ker(f)$ *ideal à esquerda de A com codimensão finita.*
4. $\exists J \subseteq \ker(f)$ *ideal à direita de A com codimensão finita.*
5. $\exists K \subseteq \ker(f)$ *ideal de A com codimensão finita.*

Demonstração. Mostraremos 1. $\Leftrightarrow$ 2., 3. $\Leftrightarrow$ 4. $\Leftrightarrow$ 5. e 2. $\Leftrightarrow$ 5.

(1. $\Longrightarrow$ 2.)
Sejam $a, b \in A$. Temos:

$$\mu_A^*(f)(a \otimes b) = f(a \cdot b) = \sum_i f_i(a) g_i(b) = \theta\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)(a \otimes b) \ .$$

Daí $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right) \in \theta\left(A^* \otimes A^*\right)$.

(1. $\Longleftarrow$ 2.)
Se $\mu_A^*(f) \in \theta\left(A^* \otimes A^*\right)$, então existem $f_i, g_i \in A^*$, com $i = 1, \ldots, n$, tais que $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)$. Assim, para todos $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} \mu_A^*(f)(a \otimes b) &= \theta\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)(a \otimes b) \\ \Longrightarrow \ f(a \cdot b) &= \sum_i f_i(a) g_i(b) \ . \end{aligned}$$

Para fazer 3. $\Longrightarrow$ 5. e 4. $\Longrightarrow$ 5., usaremos a seguinte notação. Para uma álgebra A, $\operatorname{End}^l(A)$ refere-se à algebra de endomorfismos em A. Isto é, $\operatorname{End}^l(A)$ é o conjunto de transformações lineares $A \to A$, que é um espaço vetorial, e é uma álgebra com o produto dado pela composição de funções. Quando usamos o sobrescrito l, consideramos que a função atua pela esquerda do elemento, e a composição obedece a ordem a seguir. Se temos $\phi, \psi \in \operatorname{End}^l(A)$ e $a \in A$, então denotamos ϕ aplicado em a por $\phi(a)$, e se quisermos aplicar ψ, teremos $\psi\big(\phi(a)\big)$. Consideramos o produto $\psi \cdot \phi$ como sendo a composição $\psi \circ \phi$.

A notação $\operatorname{End}^r(A)$ também refere-se à álgebra de endomorfismos em A. Mas desta vez, o produto é dado pelo produto oposto da composição. Isto é, $\operatorname{End}^r(A) = \operatorname{End}^r(A)^{\mathrm{op}}$ como álgebras. Se considerarmos que as funções atuam pela direita dos elementos de A, ficamos com uma notação mais natural para essa álgebra de endomorfismos. Se temos $\phi, \psi \in \operatorname{End}^l(A)$ e $a \in A$, então denotamos ϕ aplicado em a por $(a)\phi$, e se quisermos aplicar ψ, teremos $\big((a)\phi\big)\psi$. O produto $\phi \cdot \psi$ é igual a $\psi \circ \phi$, mas fica mais natural de se pensar com a notação à direita. Por isso acrescenta-se o sobrescrito r.

Essa distinção será importante pois usaremos os morfismos multiplicação à direita e multiplicação à esquerda

$$\begin{aligned} \lambda\colon A &\to \mathrm{End}^l\left(\tfrac{A}{I}\right) \\ \big(\lambda(a)\big)(b+I) &= ab+I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho\colon A &\to \mathrm{End}^r\left(\tfrac{A}{I}\right) \\ (b+I)\big((a)\rho\big) &= ba+I \ , \end{aligned}$$

que são morfismos de álgebras quando tomamos a álgebra de endomorfismos adequada em cada caso.

(3. $\Longrightarrow$ 5.)

Seja $I \trianglelefteq_E A$, $I \subseteq \ker(f)$ e com $\operatorname{codim}(I) < \infty$. Considere a multiplicação à esquerda

$$\begin{aligned} \lambda\colon A &\to \mathrm{End}^l\left(\tfrac{A}{I}\right) \\ \big(\lambda(a)\big)(b+I) &= ab+I \ , \end{aligned}$$

que é um morfismo de álgebras. Seja $K = \ker(\lambda)$. Temos que K é um ideal de A. Mostraremos que possui codimensão finita. De fato, temos o isomorfismo

$$\tfrac{A}{K} \cong \mathrm{Im}(\lambda) \subseteq \mathrm{End}^l\left(\tfrac{A}{I}\right) \ .$$

Então,

$$\begin{aligned} &\dim\left(\tfrac{A}{K}\right) = \dim \mathrm{Im}(\lambda) \leq \dim\left(\mathrm{End}^l\left(\tfrac{A}{I}\right)\right) = \left(\dim\left(\tfrac{A}{I}\right)\right)^2 \\ &\Longrightarrow \ \operatorname{codim}(K) \leq \operatorname{codim}(I)^2 < \infty \ . \end{aligned}$$

(4. $\Longrightarrow$ 5.)

Seja $J \trianglelefteq_D A$, $J \subseteq \ker(f)$ e $\operatorname{codim}(J) < \infty$. Considere a multiplicação à direita

$$\begin{aligned} \rho\colon A &\to \mathrm{End}^r\left(\tfrac{A}{I}\right) \\ (b+I)\big((a)\rho\big) &= ba+I \ , \end{aligned}$$

vista como uma função que atua à direita do elemento. Considerando a álgebra de morfismos atuando à direita, temos que ρ é um morfismo de álgebras. Faça $K = \ker(\rho)$, que é um ideal de A. Mostraremos que possui codimensão finita. De fato, temos o isomorfismo

$$\tfrac{A}{K} \cong \mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mathrm{End}^r\left(\tfrac{A}{J}\right) \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\dim\left(\tfrac{A}{K}\right) = \dim \operatorname{Im}(\rho) \leq \dim\left(\operatorname{End}^r\left(\tfrac{A}{J}\right)\right) = \left(\dim\left(\tfrac{A}{J}\right)\right)^2\\ &\implies \operatorname{codim}(K) \leq \operatorname{codim}(J)^2 < \infty \ .\end{aligned}$$

(3. $\Longleftarrow$ 5. e 4. $\Longleftarrow$ 5.)
São imediatos, visto que um ideal (bilateral) é um ideal à esquerda e um ideal à direita simultaneamente.

(2. $\Longrightarrow$ 5.)
É suficiente mostrar que 2. $\Longrightarrow$ 3., já que 3 $\Longleftrightarrow$ 5. já foi provado. Como $\mu_A^*(f) \in \theta(A^* \otimes A^*)$, existem $g_i, h_i \in A^*$ tais que $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right)$. Podemos assumir que os g_i's são LI e os h_i's são não nulos. Seja $I := \cap_i \ker(h_i)$.

($I \trianglelefteq_E A$:)
De fato, basta mostrar que $A \cdot I \subseteq I$. Sejam $b \in A, c \in I$. Temos, para todo $a \in A$,

$$0 = \sum_i g_i(ab) \underbrace{h_i(c)}_{=0} = f(abc) = \sum_i g_i(a) h_i(bc) \ .$$

Como os g_i's são LI, existem[7] v_i's tais que $g_i(v_j) = \delta_{ij}$. Fazendo $a = v_j$ acima, temos

$$0 = \sum_i g_i(v_j) h_i(bc) = \sum_i \delta_{ij} h_i(bc) = h_j(bc) \ .$$

Portanto $bc \in \ker(h_j)$ para todo j, logo e $bc \in \cap_j \ker(h_j) = I$.

(I tem codimensão finita:)
Temos, pelo lema 1.3.12, que

$$\operatorname{codim}(I) = \operatorname{codim}\left(\cap_i \ker(h_i)\right) \leq \sum_i \operatorname{codim}\ \ker(h_i) < \infty \ ,$$

já que a quantidade de índices i's é finita e

$$\operatorname{codim}\ \ker(h_i) = \dim\left(\frac{A}{\ker(h_i)}\right) = \dim \operatorname{Im}(h_i) = \dim \mathbb{K} = 1 \ .$$

[7] Esse é um resultado clássico da teoria de espaços vetoriais duais. É uma versão um pouco mais forte do que o resultado sobre existência de base dual de um espaço de dimensão finita.

2. $\Longleftarrow$ 5.
Seja $K \trianglelefteq A$ com $K \subseteq \ker(f)$ e $\mathrm{codim} K < \infty$. Seja $\pi\colon A \to \frac{A}{K}$ projeção canônica. Vamos mostrar que $\mu_A^*(f) \in \mathrm{Im}(\theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*)) \subseteq \theta(A^* \otimes A^*)$.

Temos

$$\mu_A^*(f)\colon A \otimes A \to \mathbb{K} \ .$$

Como

$$\mu_A^*(f)(A \otimes K + K \otimes A) = f(\mu_A(A \otimes K + K \otimes A)) \subseteq f(K) = 0 \ ,$$

então $\mu_A^*(f)$ pode ser fatorada[8] pela projeção canônica $p\colon A \otimes A \to \frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}$. Isto é, existe uma transformação linear

$$\nu(f)\colon \tfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} \to \mathbb{K}$$

tal que $\nu(f) \circ p = \mu_A^*(f)$.

Além disso, $\frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} \cong \frac{A}{K} \otimes \frac{A}{K}$ via o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} \phi\colon & \frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A} \to \frac{A}{K} \otimes \frac{A}{K} \\ & \phi(a \otimes b + A \otimes K + K \otimes A) = (a + K) \otimes (b + K) \ . \end{aligned}$$

Também $\left(\frac{A}{K}\right)^* \otimes \left(\frac{A}{K}\right)^* \cong \left(\frac{A}{K} \otimes \frac{A}{K}\right)^*$ via o isomorfismo θ', do lema 1.3.1 aplicado a $\frac{A}{K}$. Garantimos que θ' é isomorfismo pois $\dim \frac{A}{K} = \mathrm{codim}(A) < \infty$.

Assim, temos

$$\left(\tfrac{A}{K}\right)^* \otimes \left(\tfrac{A}{K}\right)^* \xrightarrow[\theta']{\cong} \left(\tfrac{A}{K} \otimes \tfrac{A}{K}\right)^* \xrightarrow[\phi^*]{\cong} \left(\tfrac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}\right)^*$$

Afirmação: Temos $\theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*) = p^* \circ \phi^* \circ \theta'$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \left(\frac{A}{K}\right)^* \otimes \left(\frac{A}{K}\right)^* \arrow[r, "\phi^* \circ \theta'", "\cong"'] \arrow[d, "\pi^* \otimes \pi^*"'] & \left(\frac{A \otimes A}{A \otimes K + K \otimes A}\right)^* \arrow[d, "p^*"] \\ A^* \otimes A^* \arrow[r, "\theta"'] & (A \otimes A)^* \end{tikzcd}$$

[8] Essa é a versão para espaços vetoriais da proposições 1.1.16 e 1.2.20.

Prova da afirmação. De fato, dados $g, h \in \left(\frac{A}{K}\right)^*$, e $a, b \in A$, temos

$$\begin{aligned}
\big(p^* \circ \phi^* \circ \theta'(g \otimes h)\big)(a \otimes b) &= \big(\theta'(g \otimes h) \circ \phi \circ p\big)(a \otimes b) \\
&= \big(\theta'(g \otimes h)\big)\big(\phi \circ p(a \otimes b)\big) \\
&= \big(\theta'(g \otimes h)\big)\big(\phi(a \otimes b + A \otimes K + K \otimes A)\big) \\
&= \big(\theta'(g \otimes h)\big)\big((a + K) \otimes (b + K)\big) \\
&= g(a + K)h(b + K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big(\theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*)(g \otimes h)\big)(a \otimes b) &= \theta((g \circ \pi) \otimes (h \circ \pi))(a \otimes b) \\
&= (g \circ \pi)(a)(h \circ \pi)(b) \\
&= g(a + K)h(b + K) \ .
\end{aligned}$$

Portanto $\theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*) = p^* \circ \phi^* \circ \theta'$. ⌟

Voltando à prova do teorema, temos $p^* = \theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*) \circ (\phi^* \circ \theta')^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
\mu_A^*(f) &= \nu(f) \circ p \\
&= p^*(\nu(f)) \\
&= \theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*)\big((\phi^* \circ \theta')^{-1}(\nu(f))\big) \\
&\in \operatorname{Im}(\theta \circ (\pi^* \otimes \pi^*)) \ .
\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.14. Seja A uma álgebra. O *dual finito* de A é o subconjunto

$$A^\circ = \{f \in A^* \mid \mu_A^*(f) \in \theta(A^* \otimes A^*)\} \subseteq A^*$$

dos funcionais $f \in A^*$ que satisfazem as condições equivalentes do teorema 1.3.13.

Veremos a seguir que o dual finito A° é tem a estrutura de coálgebra dual análoga à do caso do dual de uma álgebra de dimensão finita.

Lema 1.3.15. *A° é subespaço vetorial de A^*.*

Demonstração. $0 \in A^\circ$, porque $0(ab) = 0 = 0(a) \cdot 0(b)$ para todos $a, b \in A$, e logo 0 satisfaz a condição 1. do teorema, já que $0 \in A^*$.

Dados $f, g \in A^\circ$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que f e g satisfazem a condição 1. do teorema 1.3.13, portanto existem $f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, g_j^{(1)}, g_j^{(2)} \in A^*$ tais que

$$f(ab) = \sum_i f_i^{(1)}(a) f_i^{(2)}(b)$$

$$g(ab) = \sum_j g_j^{(1)}(a) g_j^{(2)}(b)$$

para todos $a, b \in A$. Portanto

$$(f + \lambda g)(ab) = \sum_i f_i^{(1)}(a) f_i^{(2)}(b) + \sum_j (\lambda g_j^{(1)})(a) g_j^{(2)}(b), \ \forall a, b \in A$$

e $f + \lambda g$ satisfaz a condição 1. do teorema. Logo $f + \lambda g \in A^\circ$. $\square$

Proposição 1.3.16. *Seja A uma álgebra, e A° seu dual finito. Então A° é uma coálgebra, com coproduto e counidade*

$$\begin{aligned} \Delta_{A^\circ} &: A^\circ \to A^\circ \otimes A^\circ \\ \varepsilon_{A^\circ} &: A^\circ \to \mathbb{K} \end{aligned}$$

dados por

$$\begin{aligned} \Delta_{A^\circ} &= \theta^{-1} \circ \mu_A^* \\ \varepsilon_{A^\circ} &= \xi^{-1} \circ \eta_A^* \end{aligned}$$

restritos a A°. Observe que podemos escrever θ^{-1} acima, pois estamos nos referindo a $\theta \colon A^* \otimes A^* \to \theta(A^* \otimes A^*) \subseteq (A \otimes A)^*$, que é bijeção.

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\Delta_{A^\circ} : A^\circ \to A^\circ \otimes A^\circ$ é um morfismo bem definido. Isto é, mostraremos que a imagem de Δ_{A° está contida em $A^\circ \otimes A^\circ$ (a princípio, temos apenas que está contida em $A^* \otimes A^*$).

Seja $f \in A^\circ$. Como $\mu_A^*(f) \in \theta(A^* \otimes A^*)$, então existem $g_i, h_i \in A^*$ tais que $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right)$. Logo

$$\begin{aligned} \Delta_{A^\circ}(f) &= \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i \\ f(ab) = \mu_A^*(f)(a \otimes b) &= \sum_i g_i(a) h_i(b) \ , \end{aligned}$$

em que $a, b \in A$.

Afirmação: $\Delta_{A^\circ}(f) \in A^* \otimes A^\circ$.

Prova da afirmação. Podemos escrever $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i g_i' \otimes h_i'\right)$ com os g_i''s

LI. Sejam v_i's tais que $g'_i(v_j) = \delta_{ij}$. Assim, dado i,

$$\begin{aligned} h_i(ab) &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} h'_j(ab) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g'_j(v_i) h'_j(ab) \\ &= f(v_i ab) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g'_j(v_i a) h'_j(b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (g'_j \circ \lambda_{v_i})(a) h'_j(b) \end{aligned}$$

Portanto $h'_i \in A^\circ$ e $\Delta_{A^\circ}(f) = \sum_{i=1}^{n} g'_i \otimes h'_i \in A^* \otimes A^\circ$. ⌟

Afirmação: $\Delta_{A^\circ}(f) \in A^\circ \otimes A^*$.

Prova da afirmação. Também podemos escrever $\mu_A^*(f) = \theta\left(\sum_i g''_i \otimes h''_i\right)$ com os h''_i's LI. Sejam w_i's tais que $h''_i(w_j) = \delta_{ij}$. Assim, dado i,

$$\begin{aligned} g''_i(ab) &= \sum_{j=1}^{n} g''_j(ab) \delta_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} g''_j(ab) h''_j(w_i) \\ &= f(abw_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g''_j(a) h''_j(bw_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g''_j(a)(h''_j \circ \rho_{w_i})(b) \end{aligned}$$

Portanto $g''_i \in A^\circ$ e $\Delta_{A^\circ}(f) = \sum_{i=1}^{n} g''_i \otimes h''_i \in A^\circ \otimes A^*$. ⌟

Dessa forma, temos

$$\Delta_{A^\circ}(f) \in (A^\circ \otimes A^*) \cap (A^* \otimes A^\circ) = (A^* \cap A^\circ) \otimes (A^\circ \cap A^*) = A^\circ \otimes A^\circ \ .$$

Resta apenas mostrar a comutatividade dos diagramas da coassociatividade e counidade, mas as contas são análogas às do caso de dimensão finita, na proposição 1.3.8. □

Com respeito aos morfismos, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.17. *Seja $f: A \to B$ um morfismo de álgebras. Então*

$$f^\circ : B^\circ \to A^\circ \ ,$$

definido por $f^\circ(p) = f^*(p)$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração. Mostraremos que f° está bem definido, isto é, $f^*(p) \in A^\circ$ para todo $p \in B^\circ$. Temos, para todos $a, b \in B$,

$$\begin{aligned} f^*(p)(a \cdot b) &= p \circ f(a \cdot b) = p(f(a) \cdot f(b)) \\ &= \sum_p p_{(1)}(f(a))p_{(2)}(f(b)) \\ &= \sum_p (p_{(1)} \circ f)(a)(p_{(2)} \circ f)(b) \ . \end{aligned}$$

Assim, temos $f^*(p) \in B^\circ$, pois satisfaz a condição 1. do teorema 1.3.13.

Estando bem definido, as contas para mostrar que f° é morfismo de coálgebras são idênticas às do caso de dimensão finita, na proposição 1.3.11. $\square$

1.4 Biálgebras

Vamos considerar um conjunto que tenha tanto estrutura de álgebra quanto de coálgebra. Então tudo que estudamos até então sobre álgebras e coálgebras valeria para um tal conjunto. Para obter outros resultados, que "misturem" os conceitos de álgebra e coálgebra, seria bom que essas estruturas tivessem alguma relação de compatibilidade.

Nesta seção estudaremos o que acontece quando Δ e ε são *morfismos de álgebras*, o que não é consequência das estruturas de álgebra e de coálgebra apenas. Isso será a compatibilidade entre as duas estruturas.

1.4.1 Definição e exemplos

Proposição 1.4.1. *Seja $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma quíntupla em que (B, μ, η) é uma álgebra e (B, Δ, ε) é uma coálgebra. São equivalentes:*

1. *Δ, ε são morfismos de álgebras.*

2. *μ, η são morfismos de coálgebras.*

Demonstração. Temos que μ e η são morfismos de coálgebras se e somente se os diagramas abaixo comutam:

(1)

$$\begin{tikzcd} B\otimes B \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\Delta_{B\otimes B}"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[r, "\mu_B\otimes\mu_B"'] & B\otimes B \end{tikzcd}$$

$$\Delta_B \circ \mu_B = (\mu_B \otimes \mu_B) \circ \Delta_{B\otimes B}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} B\otimes B \arrow[rr, "\mu_B"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B\otimes B}"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_B \circ \mu_B = \varepsilon_{B\otimes B}$$

(3)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{K}}"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ \mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "\eta_B\otimes\eta_B"'] & B\otimes B \end{tikzcd}$$

$$\Delta_B \circ \eta_B = (\eta_B \otimes \eta_B) \circ \Delta_{\mathbb{K}}$$

(4)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta_B"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathbb{K}}"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_B \circ \eta_B = \varepsilon_{\mathbb{K}}\ .$$

Também temos que Δ e ϵ são morfismos de álgebras se, e somente se, os diagramas abaixo comutam:

(1′)

$$\begin{tikzcd} B\otimes B \arrow[r, "\Delta_B\otimes\Delta_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[d, "\mu_{B\otimes B}"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"'] & B\otimes B \end{tikzcd}$$

$$\mu_{B\otimes B} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B) = \Delta_B \circ (\mu_B \otimes \mu_B)$$

(2′)

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\Delta_B"] & & B\otimes B \\ & \mathbb{K} \arrow[ul, "\eta_B"] \arrow[ur, "\eta_{B\otimes B}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Delta_B \circ \eta_B = \eta_{B\otimes B}$$

$$(3')\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\mu_{\mathbb{K}}"] \\
B \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad (4')\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varepsilon_B"] & & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K} \arrow[ul, "\eta_B"] \arrow[ur, "\eta_{\mathbb{K}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mu_B \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B) = \varepsilon_B \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \qquad\qquad \varepsilon_B \circ \eta_B = \eta_{\mathbb{K}} \ .$$

Nota-se que:

(1) comuta sse (1′) comuta, porque

$$\begin{aligned}(\mu_B \otimes \mu_B) \circ \Delta_{B \otimes B} &= (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{Id}_B \circ \tau \circ \mathrm{Id}_B) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B) \\ &= \mu_{B \otimes B} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B) \ .\end{aligned}$$

(3) comuta sse (2′) comuta, pois

$$\eta_{B \otimes B} = (\eta_B \otimes \eta_B) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \ .$$

(2) comuta sse (3′) comuta, já que

$$\varepsilon_{B \otimes B} = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B) \ .$$

(4) comuta sse (4′) comuta, pois

$$\eta_{\mathbb{K}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \varepsilon_{\mathbb{K}} \ .$$

Portanto a comutatividade dos diagramas (1), (2), (3), (4) equivale à comutatividade dos diagramas (1′), (2′), (3′), (4′).

□

Definição 1.4.2. Uma *biálgebra* é uma quíntupla $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ em que (B, μ, η) é uma álgebra e (B, Δ, ε) é uma coálgebra e uma das condições equivalentes é satisfeita

1. Δ, ε são morfismos de álgebra;

2. μ, η são morfismos de coálgebra.

Enumeramos alguns exemplos de biálgebras.

Exemplo 1.4.3 ($\mathbb{K}$ é uma biálgebra)**.** Para o corpo $\mathbb{K}$, consideramos, como antes,

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{K}}(\alpha \otimes \beta) &= \alpha \cdot \beta \\ \eta_{\mathbb{K}}(1_{\mathbb{K}}) &= 1_{\mathbb{K}} \\ \Delta_{\mathbb{K}}(\alpha) &= \alpha(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) \\ \varepsilon_{\mathbb{K}}(\alpha) &= \alpha \ ,\end{aligned}$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Note que temos $\mu_{\mathbb{K}} = \Delta_{\mathbb{K}}^{-1}$.

Com essa estrutura, $\mathbb{K}$ é uma álgebra e uma coálgebra. Se valer a compatibilidade, será uma biálgebra também. Vamos checar que Δ e ε são morfismos de álgebras. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Temos

$$\begin{aligned}&\Delta(\alpha \cdot \beta) = \alpha\beta(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \alpha(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) \cdot \beta(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \Delta(\alpha) \cdot \Delta(\beta) \\ &\Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} \\ &\varepsilon(\alpha \cdot \beta) = \alpha\beta = \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta) \\ &\varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \ .\end{aligned}$$

Portanto $\mathbb{K}$ é uma biálgebra.

Exemplo 1.4.4 ($\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{T}(V)$, $\mathbb{K}G$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ são biálgebras)**.** Esses exemplos serão vistos com mais detalhes nas seções 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4, onde veremos que também são álgebras de Hopf.

1.4.2 Sub-biálgebras, bi-ideais e morfismos

Como no caso das álgebras e coálgebras, definiremos sub-biálgebras, bi-ideais e morfismos de biálgebras.

Definição 1.4.5. Seja B uma biálgebra. Uma *sub-biálgebra* é um subespaço C de B que é uma subálgebra e uma subcoálgebra. Ou seja:

1. $\mu(C \otimes C) \subseteq C$;

2. $\Delta(C) \subseteq C \otimes C$.

Observação 1.4.6. Seja $C \subseteq B$ uma sub-biálgebra. Então C é uma coálgebra por si só.
E se $1_B \in C$, então C é uma álgebra por si só. Como vale a compatibilidade entre álgebra e coálgebra, pois vale em B, temos que se $1_B \in C$, então C é uma biálgebra por si só.

Definição 1.4.7. Seja B uma biálgebra. Um subespaço I de B é um *bi-ideal* de B se é um ideal e um coideal de B, isto é,

1. $\mu(B \otimes I + I \otimes B) \subseteq B$

2. $\Delta(B) \subseteq (B \otimes I + I \otimes B)$ e $\varepsilon(I) = 0$.

Definição 1.4.8. Sejam B e H biálgebras. Uma transformação linear $f\colon B \to H$ é um *morfismo de biálgebras* se for um morfismo de álgebras e também for um morfismo de coálgebras. Isto é, se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_B"'] & H \otimes H \arrow[d, "\mu_H"] \\ B \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] & & H \\ & \mathbb{K} \arrow[ul, "\eta_B"] \arrow[ur, "\eta_H"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mu_H \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_B \qquad\qquad f \circ \eta_B = \eta_H$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & H \arrow[d, "\Delta_H"] \\ B \otimes B \arrow[r, "f\otimes f"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_B"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon_H"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

$$\Delta_H \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_B \qquad\qquad \varepsilon_H \circ f = \varepsilon_B$$

Proposição 1.4.9. *Seja $f\colon B \to H$ morfismo de biálgebras. Então*

1. $\ker(f)$ *é um bi-ideal de B*

2. $\mathrm{Im}(f)$ *é uma sub-biálgebra de H*

Demonstração. Segue dos resultados já vistos para álgebra e coálgebra (proposições 1.1.14 e 1.2.14). □

1.4.3 Biálgebras oposta, co-oposta, e oposta-co-oposta

Seja B uma biálgebra. Considere o produto oposto μ^{op} e o coproduto co-oposto Δ^{cop}. Sabemos que B^{op} é uma álgebra e B^{cop} é uma coálgebra. Vamos provar nessa seção que B^{op} e B^{cop} são, na verdade, biálgebras. Também consideraremos as duas estruturas opostas ao mesmo tempo, obtendo a biálgebra oposta-co-oposta $B^{\text{op,cop}}$. O detalhe a se observar é a compatibilidade entre álgebra e coálgebra.

Proposição 1.4.10. *$(B, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, e é denotada por B^{op}.*

Demonstração. $\Delta\colon B^{\text{op}} \to B^{\text{op}} \otimes B^{\text{op}}$ é morfismo de álgebras, pois:

$$\Delta \circ \eta = \eta_{B\otimes B} = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\eta \otimes \eta) = \eta_{B^{\text{op}}\otimes B^{\text{op}}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \mu^{\text{op}} &= \Delta \circ \mu \circ \tau \\
&= \mu_{B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ \tau \\
&= \mu_{B\otimes B} \circ \tau_{B\otimes B, B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= (\mu \otimes \mu) \circ (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id}) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= (\mu \otimes \mu) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= (\mu \otimes \mu) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= ((\mu \circ \tau) \otimes (\mu \circ \tau)) \circ (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\
&= \mu_{B^{\text{op}}\otimes B^{\text{op}}} \circ (\Delta \otimes \Delta) \ .
\end{aligned}$$

$\varepsilon\colon B^{\text{op}} \to \mathbb{K}$ é morfismo de álgebras:

$$\varepsilon \circ \eta = \eta_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \circ \mu^{\text{op}} &= \varepsilon \circ \mu \circ \tau \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) \otimes \tau \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ \tau \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) \ .
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.11. *$(B, \mu, \eta, \Delta^{\text{cop}}, \varepsilon)$ é uma biálgebra, denotada por B^{cop}.*

Demonstração. $\Delta^{\mathrm{cop}}\colon B^{\mathrm{cop}} \to B^{\mathrm{cop}} \otimes B^{\mathrm{cop}}$ é morfismo de álgebras, pois:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{cop}} \circ \eta &= \tau \circ \Delta \circ \eta \\ &= \tau \circ \eta_{B\otimes B} \\ &= \tau \circ (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \\ &= (\eta \otimes \eta) \circ \tau \circ \Delta_{\mathbb{K}} \\ &= (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \\ &= \eta_{B^{\mathrm{cop}}\otimes B^{\mathrm{cop}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{cop}} \circ \mu &= \tau \circ \Delta \circ \mu \\ &= \tau \circ \mu_{B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= \tau \circ (\mu \otimes \mu) \otimes (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ \tau_{B\otimes B, B\otimes B} \otimes (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= \mu_{B^{\mathrm{cop}}\otimes B^{\mathrm{cop}}} \circ (\Delta^{\mathrm{cop}} \otimes \Delta^{\mathrm{cop}}) \ .\end{aligned}$$

Já que a multiplicação não foi alterada, continuamos tendo $\varepsilon \circ \eta = \eta_{\mathbb{K}}$ e $\varepsilon \circ \mu = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$, e portanto $\varepsilon\colon B^{\mathrm{cop}} \to \mathbb{K}$ é morfismo de álgebras. $\square$

Proposição 1.4.12. *$(B, \mu^{\mathrm{op}}, \eta, \Delta^{\mathrm{cop}}, \varepsilon)$ é uma biálgebra, denotada por $B^{\mathrm{op,cop}}$.*

Demonstração. $\Delta^{\mathrm{cop}}\colon B^{\mathrm{op,cop}} \to B^{\mathrm{op,cop}} \otimes B^{\mathrm{op,cop}}$ é morfismo de álgebras, pois:

$$\Delta^{\mathrm{cop}} \circ \eta = (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}} = (\eta_{B^{\mathrm{op,cop}}} \otimes \eta_{B^{\mathrm{cop}}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}} = \eta_{B^{\mathrm{op,cop}}\otimes B^{\mathrm{op,cop}}} \ ,$$

da mesma forma que na proposição anterior, e

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{cop}} \circ \mu^{\mathrm{op}} &= \tau \circ \Delta \circ \mu \circ \tau \\ &= \tau \circ \mu_{B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ \tau \\ &= \tau \circ (\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{B\otimes B, B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ \tau_{B\otimes B, B\otimes B} \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{B\otimes B, B\otimes B} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= (\mu \otimes \mu) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ &= ((\mu \circ \tau) \otimes (\mu \circ \tau)) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ ((\tau \circ \Delta) \otimes (\tau \circ \Delta)) \\ &= \mu_{B^{\mathrm{op,cop}}\otimes B^{\mathrm{op,cop}}} \circ (\Delta^{\mathrm{cop}} \otimes \Delta^{\mathrm{cop}}) \ .\end{aligned}$$

Obtemos que $\varepsilon\colon B^{\mathrm{op}} \to \mathbb{K}$ é morfismo de álgebras fazendo as mesmas contas que na proposição sobre B^{op}. $\square$

1.4.4 Biálgebra do produto tensorial

Sejam B e H duas biálgebras. Já definimos estrutura de álgebra e de coálgebra para o produto tensorial $B \otimes H$. Vamos checar a compatibilidade dessas estruturas e ver que, de fato, $B \otimes H$ é uma biálgebra. Relembrando, as estruturas de álgebra e de coálgebra de $B \otimes H$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\mu_{B\otimes H} &= (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \\
\eta_{B\otimes H} &= (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \\
\Delta_{B\otimes H} &= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
\varepsilon_{B\otimes H} &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H)\ ,
\end{aligned}$$

em que

$$\mu_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$\mu_{\mathbb{K}}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \cdot \beta$$

$$\Delta_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$$
$$\Delta_{\mathbb{K}}(\alpha) = \alpha(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}})$$

e $\mu_{\mathbb{K}} = \Delta_{\mathbb{K}}^{-1}$.

Vamos checar que $\Delta_{B\otimes H}$ é morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{B\otimes H} \circ \mu_{B\otimes H} \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \circ (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mu_{B\otimes B} \otimes \mu_{H\otimes H}) \circ \big((\Delta_B \otimes \Delta_B) \otimes (\Delta_H \otimes \Delta_H)\big) \circ \\
&\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mu_B \otimes \mu_B \otimes \mu_H \otimes \mu_H) \circ \\
&\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \\
&\qquad\qquad \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \\
&= (\mu_B \otimes \mu_H \otimes \mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id}_{B\otimes B} \otimes \tau_{B\otimes B, H\otimes H} \otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}) \\
&\quad \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id}_{B\otimes B} \otimes \tau_{H\otimes H, B\otimes B} \otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}) \circ \\
&\qquad\qquad \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mu_B \otimes \mu_H \otimes \mu_B \otimes \mu_H) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&3&7&2&6&4&8\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H)\\
&= (\mu_B \otimes \mu_H \otimes \mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ\\
&\qquad\qquad \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&5&7&2&4&6&8\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H)\\
&= (\mu_{B\otimes H} \otimes \mu_{B\otimes H}) \circ \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&5&7&2&4&6&8\end{smallmatrix}\right)} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H)\\
&= (\mu_{B\otimes H} \otimes \mu_{B\otimes H}) \circ (\mathrm{Id}_{B\otimes H} \otimes \tau_{B\otimes H, B\otimes H} \otimes \mathrm{Id}_{B\otimes H}) \circ\\
&\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H \otimes \Delta_B \otimes \Delta_H)\\
&= \mu_{B\otimes H\otimes B\otimes H} \circ (\Delta_{B\otimes H} \otimes \Delta_{B\otimes H})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{B\otimes H} \circ \eta_{B\otimes H} &= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \circ (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\eta_{B\otimes B} \otimes \eta_{H\otimes H}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\eta_B \otimes \eta_B \otimes \eta_H \otimes \eta_H) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \Delta_{\mathbb{K}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= (\eta_B \otimes \eta_H \otimes \eta_B \otimes \eta_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \Delta_{\mathbb{K}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= (\eta_B \otimes \eta_H \otimes \eta_B \otimes \eta_H) \circ (\Delta_{\mathbb{K}} \otimes \Delta_{\mathbb{K}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= (\eta_{B\otimes H} \otimes \eta_{B\otimes H}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= \eta_{B\otimes H\otimes B\otimes H}\ .
\end{aligned}
$$

Com relação a $\varepsilon_{B\otimes H}$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{B\otimes H} \circ \mu_{B\otimes H} &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mu_{\mathbb{K}}) \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id})\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mu_{\mathbb{K}}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_B \otimes \varepsilon_H)\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mu_{\mathbb{K}} \otimes \mu_{\mathbb{K}}) \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_B \otimes \varepsilon_H)\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_{B\otimes H} \otimes \varepsilon_{B\otimes H})\\
&= \varepsilon_{B\otimes H\otimes B\otimes H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{B\otimes H} \circ \eta_{B\otimes H} &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \circ (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\eta_{\mathbb{K}} \otimes \eta_{\mathbb{K}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}) \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ \Delta_{\mathbb{K}}\\
&= \mathrm{Id} = \eta_{\mathbb{K}}\ .
\end{aligned}
$$

1.4.5 Biálgebra quociente

Da mesma forma que com álgebras e biálgebras, é possível definir uma estrutura de biálgebra para o quociente. E essa estrutura se comporta bem com relação à projeção canônica.

Proposição 1.4.13. *Sejam B biálgebra, $I \subset B$ bi-ideal. Considere $\pi\colon B \to \frac{B}{I}$ a projeção canônica, que é morfismo de espaços vetoriais. Então existe uma única estrutura de biálgebra em $\frac{B}{I}$ que faz com que π seja um morfismo de biálgebras. Essa estrutura é dada por:*

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{a \cdot b} & \qquad \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{b}) &= \overline{b_{(1)}} \otimes \overline{b_{(2)}} \\ 1_{\frac{B}{I}} &= \overline{1_B} & \varepsilon_{\frac{B}{I}}(\overline{b}) &= \varepsilon_B(b) \ . \end{aligned}$$

Demonstração. Das proposições 1.1.15 e 1.2.19, temos que:

> $\frac{B}{I}$ tem uma única estrutura de álgebra, a enunciada na proposição, tal que π é morfismo de álgebras;
>
> $\frac{B}{I}$ tem uma única estrutura de coálgebra, a enunciada na proposição, com π morfismo de coálgebras.

Resta checar a compatibilidade entre essas estruturas de álgebra e de coálgebra. Precisamos então verificar que $\Delta_{\frac{B}{I}}$ e $\varepsilon_{\frac{B}{I}}$ são morfismos de álgebras.

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{B}{I}}(1_{\frac{B}{I}}) &= \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{1_B}) \\ &= \Delta_{\frac{B}{I}} \circ \pi(1_B) \\ &= (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_B(1_B) \\ &= (\pi \otimes \pi)(1_B \otimes 1_B) \\ &= 1_{\frac{B}{I}} \otimes 1_{\frac{B}{I}} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{a} \cdot \overline{b}) &= \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{ab}) \\ &= \Delta_{\frac{B}{I}} \circ \pi(ab) \\ &= (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_B(ab) \\ &= (\pi \otimes \pi)\big(\Delta_B(a)\Delta_B(b)\big) \\ &= \big((\pi \otimes \pi) \circ \Delta_b(a)\big) \cdot \big((\pi \otimes \pi) \circ \Delta_B(b)\big) \\ &= \big(\Delta_{\frac{B}{I}} \circ \pi(a)\big) \cdot \big(\Delta_{\frac{B}{I}} \circ \pi(b)\big) \\ &= \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{a}) \cdot \Delta_{\frac{B}{I}}(\overline{b}) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\frac{B}{I}}(1_{\frac{B}{I}}) &= \varepsilon_B(1_B) \\ &= 1 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\frac{B}{I}}(\overline{a}\cdot\overline{b}) &= \varepsilon_{\frac{B}{I}}(\overline{ab}) \\
&= \varepsilon_B(ab) \\
&= \varepsilon_B(a)\cdot\varepsilon_B(b) \\
&= \varepsilon_{\frac{B}{I}}(\overline{a})\cdot\varepsilon_{\frac{B}{I}}(\overline{b}) \ .
\end{aligned}$$

Em diversas passagens nessas contas usamos que π é morfismo de álgebras e de coálgebras, e que Δ_B e ε_B são morfismos de álgebras (pois B é biálgebra). □

Proposição 1.4.14. *Sejam B, H biálgebras, $I \subseteq B$ bi-ideal e $\pi\colon B \to \frac{B}{I}$ o a projeção canônica. Se $f\colon B \to H$ é um morfismo de biálgebras tal que $I \subseteq \ker(f)$, então existe um único morfismo de biálgebras $\overline{f}\colon \frac{B}{I} \to H$ tal que*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & H \\
& \frac{B}{I} \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

$$\overline{f}\circ\pi = f \ .$$

Demonstração. É consequência das proposições 1.1.16 e 1.2.20. □

Corolário 1.4.15. *Seja $f\colon B \to H$ morfismo de biálgebras. Então*

$$\begin{aligned}
\overline{f}\colon \frac{B}{\ker(f)} &\to \mathrm{Im}(f) \\
\overline{a} &\mapsto f(a)
\end{aligned}$$

é isomorfismo de biálgebras, e portanto

$$\frac{B}{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f) \ .$$

Demonstração. Usar $I = \ker(f)$ na proposição anterior, e $\overline{f}$ é morfismo de biálgebras. Da mesma maneira que para álgebra e coálgebra, a injetividade segue de

$$\overline{f}(\overline{b}) = 0 \implies f(b) = 0 \implies b \in \ker(f) \implies \overline{b} = 0$$

e a sobrejetividade é evidente. □

1.4.6 Biálgebra dual

1.4.6.1 Dimensão finita

Seja B uma biálgebra com dimensão finita. O dual B^* tem estrutura de coálgebra e de álgebra, pelo fato de B ser álgebra e coálgebra. Entretanto, não é claro a princípio se a compatibilidade entre as duas estruturas continua válida no dual. É isso que veremos nessa seção.

Aqui precisaremos dos morfismos θ e ξ definidos na seção de 1.3. Relembrando, temos

$$\begin{aligned}
&\xi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^* \\
&\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda\ ,
\end{aligned}$$

em que mult_λ é a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{K}$, e

$$\begin{aligned}
&\theta\colon B^* \otimes B^* \to (B \otimes B)^* \\
&\theta(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)\ .
\end{aligned}$$

Proposição 1.4.16. *B^* tem estrutura de biálgebra, com as operações definidas nas seções 1.3.2 e 1.3.3. Isto é,*

$$\begin{array}{ll}
\mu_{B^*} = \Delta_B^* \circ \theta & \qquad \Delta_{B^*} = \theta^{-1} \circ \mu_B^* \\
f * g = \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B & \\
f * g(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)}) & \\
& \\
\eta_{B^*} = \varepsilon_B^* \circ \xi & \qquad \varepsilon_{B^*} = \xi^{-1} \circ \eta_B^*\ . \\
1_{B^*} = \varepsilon_B &
\end{array}$$

Demonstração. Só resta mostrar que Δ_{B^*} e ε_{B^*} são morfismos de álgebras. (Δ_{B^*} é morfismo de álgebras:) Primeiramente, temos:

$$\begin{aligned}
\theta\big(\Delta_{B^*}(f * g)\big)(a \otimes b) &= \big(\mu_B^*(f * g)\big)(a \otimes b) \\
&= (f * g)(a \cdot b) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B(a \cdot b) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g)(\Delta_B(a) \cdot \Delta_B(b)) \\
&= \sum_{a,b} f(a_{(1)} \cdot b_{(1)}) \cdot g(a_{(2)} \cdot b_{(2)})\ .
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\mu_B^*(f) = f \circ \mu_B = \theta \circ \Delta_{B^*}(f) = \theta\left(\sum_f f_{(1)} \otimes f_{(2)}\right)$$
$$\Longrightarrow \quad f(a \cdot b) = \sum_f f_{(1)}(a) \cdot f_{(2)}(b) \ ,$$

e o mesmo vale para g. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
&\theta\big(\Delta_{B^*}(f) * \Delta_{B^*}(g)\big)(a \otimes b) \\
&= \theta\left(\sum_f f_{(1)} \otimes f_{(2)} \ * \ \sum_g g_{(1)} \otimes g_{(2)}\right)(a \otimes b) \\
&= \theta\left(\sum_{f,g} (f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)})\right)(a \otimes b) \\
&= \sum_{f,g} (f_{(1)} * g_{(1)})(a) \cdot (f_{(2)} * g_{(2)})(b) \\
&= \sum_{f,g} \sum_{a,b} f_{(1)}(a_{(1)}) g_{(1)}(a_{(2)}) f_{(2)}(b_{(1)}) g_{(2)}(b_{(2)}) \\
&= \sum_{a,b} \left(\sum_f f_{(1)}(a_{(1)}) f_{(2)}(b_{(1)})\right)\left(\sum_g g_{(1)}(a_{(2)}) g_{(2)}(b_{(2)})\right) \\
&= \sum_{a,b} f(a_{(1)} \cdot b_{(1)}) g(a_{(2)} \cdot b_{(2)}) \ .
\end{aligned}$$

Portanto $\theta\big(\Delta_{B^*}(f * g)\big) = \theta\big(\Delta_{B^*}(f) * \Delta_{B^*}(g)\big)$, e temos

$$\Delta_{B^*}(f * g) = \Delta_{B^*}(f) * \Delta_{B^*}(g) \ .$$

Com relação à unidade, temos:

$$\begin{aligned}
\theta\big(\Delta_{B^*}(1_{B^*})\big)(a \otimes b) &= \mu_B^*(1_{B^*})(a \otimes b) \\
&= 1_{B^*} \circ \mu_B(a \otimes b) \\
&= \varepsilon_B(a \cdot b) \\
&= \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\big(1_{B^*} \otimes 1_{B^*}\big)(a \otimes b) &= \theta\big(\varepsilon_B \otimes \varepsilon_B\big)(a \otimes b) \\
&= \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b) \ .
\end{aligned}$$

Assim, $\theta(\Delta_{B^*}(1_{B^*})) = \theta(1_{B^*} \otimes 1_{B^*})$ e então

$$\Delta_{B^*}(1_{B^*}) = 1_{B^*} \otimes 1_{B^*} \ .$$

(ε_{B^*} é morfismo de álgebras:) Temos que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{B^*}(f * g) &= \xi^{-1} \circ \eta_B^*(f * g) \\
&= \xi^{-1}((f * g) \circ \eta_B) \\
&= (f * g)(\eta_B(1)) \\
&= f * g(1_B) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B(1_B) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g)(1_B \otimes 1_B) \\
&= f(1_B)g(1_B) \\
&= \big(f \circ \eta_B(1)\big)\big(g \circ \eta_B(1)\big) \\
&= \Big((\eta_B^*(f))(1)\Big) \cdot \Big((\eta_B^*(f))(1)\Big) \\
&= \xi^{-1}\big(\eta_B^*(f)\big) \cdot \xi^{-1}\big(\eta_B^*(g)\big) \\
&= \varepsilon_{B^*}(a)\varepsilon_{B^*}(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{B^*}(1_{B^*}) &= \xi^{-1}\big(\eta_B^*(\varepsilon_B)\big) \\
&= \xi^{-1}(\varepsilon_B \circ \eta_B) \\
&= \varepsilon_B \circ \eta_B(1_{\mathbb{K}}) \\
&= \varepsilon(1_B) \\
&= 1_{\mathbb{K}} \ .
\end{aligned}$$

□

Quanto às transpostas de morfismos, temos a proposição abaixo.

Proposição 1.4.17. *Sejam B e H biálgebras de dimensão finita e $f\colon B \to H$ um morfismo de biálgebras. Então a transposta*

$$f^*\colon H^* \to B^*$$

é um morfismo de biálgebras, em que B^* e H^* estão equipados com a estrutura de biálgebra dual definida acima.

Demonstração. É consequência das proposições 1.3.4 e 1.3.11 que f^* é morfismo de álgebras e de coálgebras. Portanto é morfismo de biálgebras.

□

1.4.6.2 Dual finito

Seja B é biálgebra, não necessariamente de dimensão finita. Enxergando B apenas como álgebra, podemos construir seu dual finito B°, conforme seção 1.3.3.2. Sabemos então que B° é uma coálgebra e é subconjunto da álgebra de convolução B^*. A partir dessas informações, consegue-se verificar que B° é uma biálgebra, como segue.

Proposição 1.4.18. *Seja B uma biálgebra. O dual finito B° é uma biálgebra, com estrutura dada por:*

$$\begin{array}{ll} \mu_{B^\circ} = \Delta_B^* \circ \theta & \Delta_{B^\circ} = \theta^{-1} \circ \mu_B^* \\ f * g = \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B & \\ f * g(c) = \sum_c f(c_{(1)}) g(c_{(2)}) & \\ & \\ \eta_{B^\circ} = \varepsilon_B^* \circ \xi & \varepsilon_{B^\circ} = \xi^{-1} \circ \eta_B^* \ . \\ 1_{B^*} = \varepsilon_B & \end{array}$$

Acima, temos:

$$\xi \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$$
$$\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda \ ,$$

$$\theta \colon B^* \otimes B^* \to (B \otimes B)^*$$
$$\theta(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) g(b) \ .$$

Além disso, θ é injetiva, e considerando a restrição do contradomínio $\theta \colon B^* \otimes B^* \to \theta(B^* \otimes B^*)$, temos θ bijetora, de modo que faz sentido a fórmula em que aparece θ^{-1}.

Demonstração. Como argumentamos acima, B° é uma coálgebra e é um subconjunto da álgebra de convolução B^*. Se mostrarmos que $\mu_{B^*}(B^\circ \otimes B^\circ) \subseteq B^\circ$ e que $1_{B^*} \in B^\circ$, então teremos que B° é uma álgebra, com estrutura herdada de B^*. Então, poderemos definir $\mu_{B^\circ} \colon B^\circ \otimes B^\circ \to B^\circ$ pela restrição de μ_{B^*}, como no enunciado acima.

Temos $1_{B^*} \in B^\circ$ porque dados $a, b \in B$,

$$1_{B^*}(a \otimes b) = \varepsilon_B(a \cdot b) = \varepsilon_B(a) \varepsilon_B(b) \ ,$$

e logo, 1_{B^*} satisfaz a condição 1. das condições equivalentes em 1.3.13. Dessa forma, $1_{B^*} \in B^\circ$, como queríamos.

Ao mesmo tempo, temos $\mu_{B^*}(B^\circ \otimes B^\circ) \subseteq B^\circ$. De fato, para todos $f, g \in B^\circ$ e $a, b \in B$, temos pelo lema 1.3.7 que:

$$f(a \cdot b) = \sum_f f_{(1)}(a) f_{(2)}(b)$$
$$g(a \cdot b) = \sum_g g_{(1)}(a) g_{(2)}(b).$$

Então, dados $f, g \in B^\circ$ e $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
f * g(a \cdot b) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B(a \cdot b) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g)(\Delta_B(a) \cdot \Delta_B(b)) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \left(\sum_{a,b} a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)} \right) \\
&= \sum_{a,b} f(a_{(1)} b_{(1)}) g(a_{(2)} b_{(2)}) \\
&= \sum_{a,b} \left(\sum_f f_{(1)}(a_{(1)}) f_{(2)}(b_{(1)}) \right) \cdot \left(\sum_g g_{(1)}(a_{(2)}) g_{(2)}(b_{(2)}) \right) \\
&= \sum_{f,g} \left(\sum_a f_{(1)}(a_{(1)}) g_{(1)}(a_{(2)}) \right) \cdot \left(\sum_b f_{(2)}(b_{(1)}) g_{(2)}(b_{(2)}) \right) \\
&= \sum_{f,g} f_{(1)} * g_{(1)}(a) \cdot f_{(2)} * g_{(2)}(b) \ .
\end{aligned}$$

Portanto $f * g$ satisfaz a condição 1. das condições equivalentes no teorema 1.3.13, e dessa forma, $f * g \in B^\circ$.

Assim, B° é uma álgebra e uma coálgebra. As contas para se mostrar que B° é biálgebra são idênticas ao caso $B^\circ = B^*$ com B de dimensão finita, na proposição 1.4.16. Assim, temos que B° é uma biálgebra. □

Também há um resultado para a "transposta finita" de um morfismo.

Proposição 1.4.19. *Sejam B e H biálgebras e $f\colon B \to H$ um morfismo de biálgebras. Então a transposta finita*

$$f^\circ\colon H^\circ \to B^\circ \ ,$$

com $f^\circ(p) = f^*(p)$, é um morfismo de biálgebras, em que B° e H° são os duais finitos de B e H, respectivamente.

Demonstração. É consequência da proposição 1.3.17 que f° está bem definida e é morfismo de coálgebras. Da proposição 1.3.4, temos que f^* é morfismo de álgebras. Como $f^\circ = f^*$ em H°, temos que f° é morfismo de álgebras. Portanto f° é morfismo de biálgebras. $\square$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

De posse dos conceitos de álgebra, coálgebra e biálgebra, podemos definir as álgebras de Hopf. Estas álgebras são biálgebras com uma propriedade adicional: admitem um morfismo que funciona como uma "inversão" da identidade (num sentido que veremos com mais precisão posteriormente).

2.1 Definição

Anteriormente vimos que para dadas A álgebra e C coálgebra, há uma estrutura de álgebra para $\mathrm{Hom}(C, A)$, o conjunto das transformações lineares de C para A, dada por:

produto de convolução:

$$f * g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C, \quad \forall f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$$

$$f * g(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \quad \forall f, g \in \mathrm{Hom}(C, A), \quad \forall c \in C$$

$$\mu_{\mathrm{Hom}(C,A)} = \mu_A \circ \Delta_C^* \ .$$

unidade:

$$1_{\mathrm{Hom}(C,A)} = \eta_A \circ \varepsilon_C \ .$$

Se H é uma biálgebra, podemos dar uma estrutura de álgebra de convolução para $\mathrm{Hom}(H, H)$ dessa mesma maneira. Nessa álgebra, temos $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(H, H)$, mas pode acontecer ou não que Id tenha inverso multiplicativo com relação ao produto de convolução.

Definição 2.1.1. Seja H uma biálgebra. Uma transformação linear $S\colon H \to H$ é chamada *antípoda* de H se é a inversa de Id com relação ao produto de convolução. Temos $S * \mathrm{Id} = \mathrm{Id} * S = \eta \circ \varepsilon$.

Observação 2.1.2. A antípoda, se existir, é única, pois é um elemento inverso numa álgebra.

Assim, se a biálgebra H admitir uma antípoda $S \in \mathrm{Hom}(H, H)$, isto é, se $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(H, H)$ for inversível em relação ao produto de convolução, dizemos que H é uma álgebra de Hopf.

Definição 2.1.3. Uma *álgebra de Hopf* é uma sextupla $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ em que:

1. $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra;
2. S é uma antípoda em H.

A propriedade da antípoda

$$S * \mathrm{Id} = \mathrm{Id} * S = 1_{\mathrm{Hom}(H,H)} \ ,$$

ou seja,

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$
$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

pode ser escrita como a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{Id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Em termos de elementos, e usando a notação de Sweedler, também podemos escrever essa propriedade como:

$$\sum_h S(h_{(1)}) \cdot h_{(2)} = \varepsilon(h)\, 1_H$$
$$\sum_h h_{(1)} \cdot S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)\, 1_H$$

Definição 2.1.4. Como no caso das álgebras, coálgebras e biálgebras, diz-se que a álgebra de Hopf é

1. *comutativa*, se $\mu \circ \tau = \mu$;

2. *cocomutativa*, se $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Veremos alguns exemplos de álgebras de Hopf na próxima seção.

2.2 Exemplos de álgebras de Hopf

2.2.1 Álgebra das funções $\mathcal{F}(G)$ de um grupo finito

Seja G um grupo finito, com operação denotada pela justaposição ou por $\cdot$, ou ainda, por $m\colon G \times G \to G$, quando for conveniente. Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das funções do grupo G no corpo $\mathbb{K}$

$$\mathcal{F}(G) = \{f\colon G \to \mathbb{K}\} \ ,$$

com a estrutura de álgebra dada por

$$\begin{aligned} f \cdot h\colon G &\to \mathbb{K} \\ g &\mapsto f(g) \cdot h(g) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1_{\mathcal{F}(G)}\colon G &\to \mathbb{K} \\ g &\mapsto 1_{\mathbb{K}} \ . \end{aligned}$$

Daremos uma estrutura de coálgebra a esse conjunto. Para definir um coproduto, usaremos a estrutura de multiplicação do grupo.

Repare que uma função $f\colon G \to \mathbb{K}$ define uma outra função $\tilde{f}\colon G \times G \to \mathbb{K}$ por $\tilde{f}(g,h) = f(gh)$, para todo $g, h \in G$. Isto é, $\tilde{f} = f \circ m$. Temos então uma função

$$\begin{aligned} m^*\colon \mathcal{F}(G) &\to \mathcal{F}(G \times G) \\ f &\mapsto \tilde{f} = f \circ m \ . \end{aligned}$$

Para se conseguir definir um coproduto a partir de m^*, devemos observar qual seria a relação entre $\mathcal{F}(G \times G)$ e $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$. Acontece que quando G é um grupo finito, temos um isomorfismo de álgebras $\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$, como veremos no lema abaixo.

Lema 2.2.1. *Seja G um grupo finito. Então*

$$\begin{aligned} &\theta\colon \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G \times G) \\ &\theta(f \otimes f')(g, g') = f(g) f'(g') \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração.
(θ é bem definida e é linear:) Observamos, primeiramente, que θ está bem definida e é linear. De fato, temos que a transformação

$$\overline{\theta}\colon \mathcal{F}(G)\times\mathcal{F}(G)\to\mathcal{F}(G\times G)$$

dada por $\theta(f,f')(g,g') = f(g)f'(g')$ é bilinear, e pela propriedade universal do produto tensorial, se fatora por uma transformação linear θ tal que $\overline{\theta}(f,f') = \theta(f\otimes f')$, para todos $f,f'\in\mathcal{F}(G)$.

(θ é bijeção:) Mostraremos que θ é bijeção. O espaço vetorial $\mathcal{F}(G)$ tem dimensão[1] $|G|$. Então $\mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G)$ tem dimensão $|G|^2$. Além disso, $\mathcal{F}(G\times G)$ tem dimensão $|G\times G| = |G|^2$. Dessa forma, para mostrar que θ é bijetora, basta mostrar que é injetora, isto é, que seu núcleo contém apenas o vetor nulo.

Seja $\sum_i f_i\otimes f_i'\in\ker\theta$, e escolha os f_i''s LI. Então $\theta\left(\sum_i f_i\otimes f_i'\right)=0$, e dados $g,g'\in G$ quaisquer,

$$\theta\left(\sum_i f_i\otimes f_i'\right)(g\otimes g') = \sum_i f_i(g)f_i'(g') = 0\ .$$

Fixado $g\in G$ qualquer, temos $\sum_i f_i(g)f_i' = 0$, e como os f_i' 's são LI, temos $f_i(g)=0$. Como isso vale para todo $g\in G$, temos $f_i=0$ para todo i. Portanto $\sum_i f_i\otimes f_i' = 0$, o que prova a injetividade de θ.

(θ é morfismo de álgebras:) Por último, mostramos que θ é morfismo de álgebras. Temos:

$$\theta(1\otimes 1)(g,g') = 1(g)\cdot 1(g') = 1_{\mathbb{K}}\cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} = 1(g,g')\ .$$

Além disso, dados $\sum_i f_i\otimes f_i', \sum_j t_j\otimes t_j'\in\mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G)$, temos:

[1] É gerado pelas funções $x_g\colon G\to\mathbb{K}$, com $g\in G$, dadas por $x_g(h)=\delta_{g,h}$.

$$\begin{aligned}
\theta\left(\sum_i f_i \otimes f_i' \cdot \sum_j t_j \otimes t_j'\right)&(g,g') \\
&= \theta\left(\sum_i \sum_j f_i t_j \otimes f_i' t_j'\right)(g,g') \\
&= \sum_i \sum_j f_i(g) t_j(g) \cdot f_i'(g') t_j'(g') \\
&= \sum_i f_i(g) f_i'(g') \cdot \sum_j t_j(g) t_j'(g') \\
&= \theta\left(\sum_i f_i \otimes f_i'\right)(g,g') \cdot \theta\left(\sum_j t_j \otimes t_j'\right)(g,g') \ ,
\end{aligned}$$

para todos $g, g' \in G$. Portanto

$$\theta\left(\sum_i f_i \otimes f_i' \cdot \sum_j t_j \otimes t_j'\right) = \theta\left(\sum_i f_i \otimes f_i'\right) \cdot \theta\left(\sum_j t_j \otimes t_j'\right) \ .$$

Desse modo, θ é morfismo de álgebras, e terminamos a prova do lema. $\square$

Com a ajuda do lema acima, podemos definir o coproduto por:

$$\begin{gathered}
\Delta\colon \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \\
\Delta = \theta^{-1} \circ m^* \ .
\end{gathered}$$

Note que para quaisquer $f \in \mathcal{F}(G)$ e $g, g' \in G$, temos:

$$\big(\theta \circ \Delta(f)\big)(g,g') = m^*(f)(g,g') \implies \sum_f f_{(1)}(g) f_{(2)}(g') = f(gg') \ .$$

A counidade é dada pela avaliação na identidade do grupo:

$$\begin{gathered}
\varepsilon\colon \mathcal{F}(G) \to \mathbb{K} \\
\varepsilon(f) = f(1_G) \ .
\end{gathered}$$

Proposição 2.2.2. *$\mathcal{F}(G)$ é uma coálgebra com o coproduto e a counidade dados acima.*

Demonstração.
(Coassociatividade:) A coassociatividade decorre da associatividade de G,

como veremos a seguir. Considere o isomorfismo[2]

$$\begin{aligned}
&\theta_3 \colon \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G \times G \times G)\\
&\theta(f \otimes f' \otimes f'')(g, g', g'') = f(g)f'(g')f''(g'') \ .
\end{aligned}$$

Dados $g, g', g'' \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\theta_3\big((\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(f)\big)(g, g', g'') &= \sum_f \sum_{f_{(2)}} f_{(1)}(g) f_{(2)(1)}(g') f_{(2)(2)}(g'')\\
&= \sum_f f_{(1)}(g) f_{(2)}(g'g'')\\
&= f(g(g'g'')) \ .
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que:

$$\begin{aligned}
\theta_3\big((\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f)\big)(g, g', g'') &= \sum_f \sum_{f_{(1)}} f_{(1)(1)}(g) f_{(1)(2)}(g') f_{(2)}(g'')\\
&= \sum_f f_{(1)}(gg') f_{(2)}(g'')\\
&= f((gg')g'') \ .
\end{aligned}$$

Da associatividade da operação de grupo, temos

$$\theta_3\big((\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(f)\big) = \theta_3\big((\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f)\big) \ ,$$

e como θ_3 é bijeção, temos

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(f) = (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f) \ .$$

(Propriedade da counidade:) Seja $f \in \mathcal{F}(G)$. Temos

$$\begin{aligned}
{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \left(\sum_f f_{(1)} \otimes f_{(2)} \right)\\
&= \sum_f \varepsilon\big(f_{(1)}\big) \ f_{(2)}\\
&= \sum_f f_{(1)}(1_G) \ f_{(2)}
\end{aligned}$$

[2]Para se mostrar que θ_3 é isomorfismo de álgebras, procede-se por indução no caso do $\theta_2 = \theta$.

$$
\begin{aligned}
{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f) &= {\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_f f_{(1)} \otimes f_{(2)} \right) \\
&= \sum_f f_{(1)}\ \varepsilon\big(f_{(2)}\big) \\
&= \sum_f f_{(1)}\ f_{(2)}(1_G)
\end{aligned}
$$

Aplicando em $g \in G$, temos:

$$
\begin{aligned}
\big({\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f)\big)(g) &= \sum_f f_{(1)}(1_G) f_{(2)}(g) = f(1_G g) = f(g) \\
\big({\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f)\big)(g) &= \sum_f f_{(1)} f_{(2)}(1_G) = f(g 1_G) = f(g)\ .
\end{aligned}
$$

Dessa forma, conseguimos

$$
{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f) = f = {\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f)\ ,
$$

e a propriedade da counidade fica demonstrada. □

Proposição 2.2.3. *$\mathcal{F}(G)$ é uma biálgebra.*

Demonstração. Devemos apenas mostrar que Δ e ε são morfismos de álgebras.

(Δ é um morfismo de álgebras:) De fato, temos:

$$
\begin{aligned}
\big(\theta \circ \Delta(1_{\mathcal{F}(G)})\big)(g, g') &= 1_{\mathcal{F}(G)}(gg') \\
&= 1_{\mathbb{K}} \\
&= 1_{\mathcal{F}(G)}(g) \cdot 1_{\mathcal{F}(G)}(g') \\
&= \big(\theta(1_{\mathcal{F}(G)} \otimes 1_{\mathcal{F}(G)})\big)(g, g')\ .
\end{aligned}
$$

Portanto $\theta \circ \Delta(1_{\mathcal{F}(G)}) = \theta(1_{\mathcal{F}(G)} \otimes 1_{\mathcal{F}(G)})$, e pela injetividade da θ, segue que $\Delta(1_{\mathcal{F}(G)}) = 1_{\mathcal{F}(G)} \otimes 1_{\mathcal{F}(G)}$.

Além disso, dadas $f, t \in \mathcal{F}(G)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\big(\theta\big(\Delta(f \cdot t)\big)\big)(g, g') &= f \cdot t(gg') \\
&= f(gg')t(gg') \\
&= \big(\theta(\Delta(f))\big)(g, g') \cdot \big(\theta(\Delta(t))\big)(g, g') \\
&= \big(\theta(\Delta(f)) \cdot \theta(\Delta(t))\big)(g, g') \\
&= \big(\theta\big(\Delta(f) \cdot \Delta(t)\big)\big)(g, g')\ .
\end{aligned}
$$

Obtemos $\theta\big(\Delta(f \cdot t)\big) = \theta\big(\Delta(f) \cdot \Delta(t)\big)$ e usando a injetividade de θ, temos $\Delta(f \cdot t) = \Delta(f) \cdot \Delta(t)$.

(ε é um morfismo de álgebras:) Vale:

$$\varepsilon(1_{\mathcal{F}(G)}) = 1_{\mathcal{F}(G)}(1_G) = 1_{\mathbb{K}} \ .$$

Com relação ao produto, temos o seguinte. Dados $f, t \in \mathcal{F}(G)$:

$$\varepsilon(f \cdot t) = f \cdot t(1_G) = f(1_G) \cdot t(1_G) = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(t) \ .$$

Com isso, ε é morfismo de álgebras. $\square$

Para conseguirmos uma estrutura de álgebra de Hopf, resta apenas definir uma antípoda para $\mathcal{F}(G)$. Faça:

$$\begin{aligned} S \colon \mathcal{F}(G) &\to \mathcal{F}(G) \\ S(f)(g) &= f(g^{-1}) \ . \end{aligned}$$

Proposição 2.2.4. *S é uma antípoda para $\mathcal{F}(G)$. Portanto, o espaço das funções de um grupo finito G no corpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}(G)$, é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. Vamos mostrar que S satisfaz a propriedade da antípoda, isto é, que é a inversa da Id com respeito ao produto de convolução.

$$\begin{aligned} \big(S * \mathrm{Id}(f)\big)(g) &= \left(\sum_f S(f_{(1)})f_{(2)}\right)(g) \\ &= \sum_f S(f_{(1)})(g) f_{(2)}(g) \\ &= \sum_f f_{(1)}(g^{-1}) f_{(2)}(g) \\ &= f(g^{-1}g) \\ &= f(1_G) \\ &= \varepsilon(f)1_{\mathbb{K}} \\ &= \big(\eta \circ \varepsilon(f)\big)(g) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Id} * S(f)\big)(g) &= \left(\sum_f f_{(1)} S(f_{(2)})\right)(g) \\ &= \sum_f f_{(1)}(g) S(f_{(2)})(g) \\ &= \sum_f f_{(1)}(g) f_{(2)}(g^{-1}) \\ &= f(gg^{-1}) \\ &= f(1_G) \\ &= \varepsilon(f) 1_{\mathbb{K}} \\ &= \big(\eta \circ \varepsilon(f)\big)(g)\ .\end{aligned}$$

□

2.2.2 Álgebra de grupo $\mathbb{K}G$

Seja G um grupo, escrito na notação de produto, e com unidade e. A *álgebra de grupo* $\mathbb{K}G$ é definida por

$$\mathbb{K}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \colon a_g \in \mathbb{K} \text{ e } a_g\text{'s quase todos nulos} \right\} = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\ .$$

A soma formal $\sum_{g \in G} a_g g$ pode ser identificada como uma sequência de elementos $(a_g)_{g \in G}$, com $a_g \in \mathbb{K}$. Tem-se que $\mathbb{K}G$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Geralmente consideramos $G \subseteq \mathbb{K}G$ via a inclusão canônica

$$\begin{aligned} i_G \colon G &\to \mathbb{K}G \\ g &\mapsto \sum_{h \in G} \delta_{g,h}\ h = g\ . \end{aligned}$$

Com essa notação, temos que G é base do espaço vetorial $\mathbb{K}G$.

A estrutura de álgebra de $\mathbb{K}G$ é dada por:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h\ gh \qquad 1 = \sum_{g \in G} \delta_{g,e}\ g = e\ .$$

E a estrutura de coálgebra é dada pelas transformações lineares definidas por:

$$\begin{aligned} &\Delta(g) = g \otimes g && \varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}} \\ &\Delta\left(\sum_{g \in G} a_g\ g\right) = \sum_{g \in G} a_g\ g \otimes g && \varepsilon\left(\sum_{g \in G} a_g\ g\right) = \sum_{g \in G}\ a_g\ . \end{aligned}$$

Proposição 2.2.5. *$\mathbb{K}G$ é uma álgebra e uma coálgebra.*

Demonstração. Para mostrar que é uma álgebra, verificamos a associatividade e a unidade. Basta mostrar que os morfismos que definem o produto e a unidade satisfazem suas respectivas propriedades nos elementos da base. A associatividade segue da associatividade do grupo:

$$g \cdot_{\mathbb{K}G} (h \cdot_{\mathbb{K}G} k) = g(hk) = (gh)k = (g \cdot_{\mathbb{K}G} h) \cdot_{\mathbb{K}G} k \quad \forall g, h, k \in G \ .$$

A unidade também segue da unidade do grupo:

$$1_{\mathbb{K}G} \cdot g = eg = g \ , \quad g \cdot_{\mathbb{K}G} 1_{\mathbb{K}G} = ge = g \ , \quad \forall g \in G \ .$$

Quanto ao fato de ser coálgebra, verificamos abaixo a coassociatividade e a counidade:

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(g) = g \otimes g \otimes g = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(g) \\
&{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(g) = \varepsilon(g)g = 1_{\mathbb{K}}g = g \\
&{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(g) = g\varepsilon(g) = g1_{\mathbb{K}} = g \ , \quad \forall g \in G \ .
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.6. *$\mathbb{K}G$ é uma biálgebra.*

Demonstração. O coproduto e a counidade são morfismos de álgebras, e portanto $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta(1_{\mathbb{K}G}) = \Delta(e) &= e \otimes e = 1_{\mathbb{K}G} \otimes 1_{\mathbb{K}G} \\
\varepsilon(1_{\mathbb{K}G}) &= \varepsilon(e) = 1_{\mathbb{K}} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\left(\sum_g a_g g\right) \cdot \left(\sum_h b_h h\right)\right) &= \Delta\left(\sum_{g,h} a_g b_h \ gh\right) \\
&= \sum_{g,h} a_g b_h \Delta(gh) \\
&= \sum_{g,h} a_g b_h \ gh \otimes gh \\
&= \sum_{g,h} a_g b_h \ (g \otimes g)(h \otimes h) \\
&= \left(\sum_g a_g \ g \otimes g\right)\left(\sum_h b_h \ h \otimes h\right) \\
&= \Delta\left(\sum_g a_g g\right) \Delta\left(\sum_h b_h h\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\left(\sum_g a_g g\right)\cdot\left(\sum_h b_h h\right)\right) &= \varepsilon\left(\sum_{g,h} a_g b_h\ gh\right)\\
&= \sum_{g,h} a_g b_h\\
&= \left(\sum_g a_g\right)\left(\sum_h b_h\right)\\
&= \varepsilon\left(\sum_g a_g g\right)\cdot\varepsilon\left(\sum_h b_h h\right)\ .
\end{aligned}$$

□

A antípoda de $\mathbb{K}G$ é obtida pela operação de inversão no grupo. Defina

$$S\colon \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G\ ,$$

pondo $S(g) = g^{-1}$ e estendendo linearmente.

Proposição 2.2.7. *S é uma antípoda para $\mathbb{K}G$. Portanto a álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. Vejamos que S é uma antípoda. Temos, para todo $g \in G \subseteq \mathbb{K}G$, que

$$\begin{aligned}
S * \mathrm{Id}(g) &= \mu\circ(S\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(g) = S(g)g = g^{-1}g = e = \varepsilon(g)e = \eta\circ\varepsilon(g)\\
\mathrm{Id} * S(g) &= \mu\circ(\mathrm{Id}\otimes S)\circ\Delta(g) = gS(g) = gg^{-1} = e = \varepsilon(g)e = \eta\circ\varepsilon(g)\ .
\end{aligned}$$

Dessa maneira, $\mathbb{K}G$ tem estrutura de álgebra de Hopf. □

2.2.3 Álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$

Na seção 1.1.7 vimos a estrutura de álgebra da álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ de um espaço vetorial V. Relembrando, temos

$$\mathcal{T}(V) := \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \mid n\in\mathbb{N}, \lambda_i\in\mathbb{K}, w_i = v_{i,1}\otimes\ldots\otimes v_{i,n_i}\right\} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}\ ,$$

em que $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$, $V^{\otimes 1} := V$ e $V^{\otimes n} = V\otimes\ldots\otimes V$ (n vezes).

O produto e a unidade são dados por:

$$\begin{gathered}
(u_1\otimes\ldots\otimes u_m)\otimes(v_1\otimes\ldots\otimes v_n) = u_1\otimes\ldots\otimes u_m\otimes v_1\otimes\ldots\otimes v_n\\
1_{\mathcal{T}(V)} = 1_{\mathbb{K}}\ .
\end{gathered}$$

Às vezes denotaremos o produto como $\cdot$ ou mesmo como a justaposição, ao invés de $\otimes$, quando não houver confusão.

Quando trabalhamos com morfismos de álgebras partindo de $\mathcal{T}(V)$, podemos concluir que são iguais fazendo as contas para V apenas e usando a unicidade na propriedade universal da álgebra tensorial. Isso será usado com frequência a seguir.

Defina o coproduto e a counidade da seguinte forma, para $v \in V$:

$$\begin{array}{ll} \Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} & \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \\ \Delta(v) = v \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v & \varepsilon(v) = 0 \ , \end{array}$$

e estenda a morfismos de álgebras usando a propriedade universal da álgebra tensorial, dada em 1.1.22. A coassociatividade e o axioma da counidade são verificados a seguir. Basta fazermos as contas para $v \in V$; o caso geral é consequência da propriedade universal da álgebra tensorial. Temos:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(v) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(v \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v) \\ &= v \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes v \\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(v) &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(v \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v) \\ &= v \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} \otimes v \\ {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(v) &= \varepsilon(v)1_{\mathbb{K}} + \varepsilon(1_{\mathbb{K}})v = v = \mathrm{Id}(v) \\ {\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(v) &= v\varepsilon(1_{\mathbb{K}}) + 1_{\mathbb{K}}\varepsilon(v) = v = \mathrm{Id}(v) \ . \end{aligned}$$

Pela unicidade na propriedade universal da álgebra tensorial, temos

$$\begin{aligned} &(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ &{\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id} \\ &{\varphi_r}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{Id} \ . \end{aligned}$$

Como Δ e ε são morfismos de álgebras (por definição), a álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ é uma biálgebra. Veremos a seguir que a álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ admite uma antípoda, e portanto é uma álgebra de Hopf. Defina $S^{\mathrm{op}} \colon V \to \mathcal{T}(V)^{\mathrm{op}}$ por $S^{\mathrm{op}}(v) = -v$ em $v \in V$ e estenda a um morfismo de álgebras pela propriedade universal da álgebra tensorial. Então temos $S^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)^{\mathrm{op}}$ morfismo de álgebras dado por

$$\begin{aligned} &S^{\mathrm{op}}(v_1 \dots v_n) = (-1)^n v_1 \cdot_{\mathrm{op}} \dots \cdot_{\mathrm{op}} v_n \\ &S^{\mathrm{op}}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \ . \end{aligned}$$

Fazendo $S \colon \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)$ com $S = S^{\mathrm{op}}$, tem-se que S é antimorfismo de álgebras, e

$$\begin{aligned} &S(v_1 \dots v_n) = (-1)^n v_n \cdot \ldots \cdot v_1 \\ &S(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \ . \end{aligned}$$

Para conferir a propriedade da antípoda, seja $v \in V$. Temos que os seguintes morfismos de álgebras coincidem em V:

$$\mu \circ (S^{\mathrm{op}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(v) = S(v)1_{\mathbb{K}} + S(1_{\mathbb{K}})v = -v + v = 0 = \eta \circ \varepsilon(v)$$
$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{\mathrm{op}}) \circ \Delta(v) = vS(1_{\mathbb{K}}) + 1_{\mathbb{K}}S(v) = +v - v = 0 = \eta \circ \varepsilon(v)\ .$$

Usamos novamente a propriedade universal da álgebra tensorial para obter que

$$\mu \circ (S^{\mathrm{op}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$
$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{\mathrm{op}}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon\ .$$

Como $S = S^{\mathrm{op}}$, o mesmo vale para S, e portanto S é antípoda para $\mathcal{T}(V)$.

2.2.4 Álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

O recobrimento universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Hopf. A definição de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ será vista em 3.1.1, e a definição do recobrimento $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, na seção 3.2. Por hora, adiantamos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial munido de uma operação bilinear $[,] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ com certas propriedades. E seu recobrimento é $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$, em que $I \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é o ideal gerado pelos elementos $ab - ba - [a,b] \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Então, em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, identificamos os elementos $ab - ba$ e $[a,b]$ da álgebra tensorial.

Por completeza, exibiremos aqui, também, a estrutura de álgebra de Hopf de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. As demonstrações de todas as propriedades são feitas na seção 3.2.2. A projeção $\overline{g_1 \dots g_n} = \overline{g_1} \dots \overline{g_n}$ de $g_1 \dots g_n \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é denotada apenas por $g_1 \dots g_n$. Temos:

$$g \cdot_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} h = g \cdot_{\mathcal{T}(\mathfrak{g})} h = gh \qquad 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} = 1_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta(g) = g \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g & \varepsilon(g) = 0 \\ \Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} & \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \\ S(g_1 \dots g_n) = (-1)^n g_n \dots g_1\ , \end{array}$$

com $g, h, g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2.3 Hopf-subálgebras, Hopf-ideais e morfismos

Nesta seção, veremos os conceitos de ideal, subálgebra e morfismo para o caso das álgebras de Hopf.

Definição 2.3.1. Seja H uma álgebra de Hopf. Um subespaço B de H é uma *Hopf-subálgebra* se:

1. B é subálgebra de H, isto é, $\mu(B \otimes B) \subseteq B$;

2. B é subcoálgebra de H, isto é, $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$;

3. $S(B) \subseteq B$.

Observação 2.3.2. Se $1_H \in B$, então temos $\eta\colon \mathbb{K} \to B$. Assim, obtemos que $(B, \mu|_{B\otimes B}, \eta, \Delta|_B, \varepsilon|_B, S_B)$ é uma álgebra de Hopf por si só.

Definição 2.3.3. Seja H uma álgebra de Hopf. Um subespaço $I \subseteq H$ é um *Hopf-ideal* se:

1. I é um ideal da álgebra H, isto é, $\mu(H \otimes I + I \otimes H) \subseteq H$;

2. I é um coideal da coálgebra H, isto é, $\Delta(H) \subseteq H \otimes I + I \otimes H$ e $\varepsilon(I) = 0$;

3. $S(I) \subseteq I$.

Definição 2.3.4. Sejam H_1 e H_2 duas álgebras de Hopf. Uma transformação linear $f\colon H_1 \to H_2$ é um *morfismo de álgebras de Hopf* se:

1. f é um morfismo de biálgebras, isto é:

$$\begin{aligned}
f \circ \mu_1 &= \mu_2 \circ (f \otimes f) \\
f \circ \eta_1 &= \eta_2 \\
(f \otimes f) \circ \Delta_1 &= \Delta_2 \circ f \\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 \circ f
\end{aligned}$$

2. f preserva a antípoda:

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S_1"'] & H_2 \arrow[d, "S_2"] \\
H_1 \arrow[r, "f"'] & H_2
\end{tikzcd}$$

$$f \circ S_1 = S_2 \circ f$$

Veremos que o item 2 é, na verdade, automaticamente satisfeito para morfismos de biálgebras entre duas álgebras de Hopf.

Proposição 2.3.5. *Sejam H_1 e H_2 duas álgebras de Hopf. Seja $f\colon H_1 \to H_2$ um morfismo de biálgebras. Então $f \circ S_1 = S_2 \circ f$, e f é automaticamente um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Vamos mostrar que tanto $f \circ S_1$ quanto $S_2 \circ f$ são inversas de f em relação ao produto de convolução em $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$, que é uma álgebra. Portanto, pela unicidade do inverso multiplicativo, teríamos $f \circ S_1 = f \circ S_2$. Vejamos que $f \circ S_1$ é o inverso multiplicativo de f:

$$\begin{aligned}
(f \circ S_1) * f &= \mu_2 \circ ((f \circ S_1) \otimes f) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (f \otimes f) \circ (S_1 \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_1 \\
&= f \circ \mu_1 \circ (S_1 \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_1 \\
&= f \circ (S_1 * \mathrm{Id}) \\
&= f \circ \eta_1 \circ \varepsilon_1 \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f * (f \circ S_1) &= \mu_2 \circ (f \otimes (f \circ S_1)) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (f \otimes f) \circ (\mathrm{Id} \otimes S_1) \circ \Delta_1 \\
&= f \circ \mu_1 \circ (\mathrm{Id} \otimes S_1) \circ \Delta_1 \\
&= f \circ (\mathrm{Id} * S_1) \\
&= f \circ \eta_1 \circ \varepsilon_1 \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_1 \ .
\end{aligned}$$

Vejamos agora que $S_2 \circ f$ é o inverso multiplicativo de f:

$$\begin{aligned}
(S_2 \circ f) * f &= \mu_2 \circ ((S_2 \circ f) \otimes f) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (S_2 \otimes \mathrm{Id}) \circ (f \otimes f) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (S_2 \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_2 \circ f \\
&= (S_2 * \mathrm{Id}) \circ f \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_2 \circ f \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f * (S_2 \circ f) &= \mu_2 \circ (f \otimes (S_2 \circ f)) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (\mathrm{Id} \otimes S_2) \circ (f \otimes f) \circ \Delta_1 \\
&= \mu_2 \circ (\mathrm{Id} \otimes S_2) \circ \Delta_2 \circ f \\
&= (\mathrm{Id} * S_2) \circ f \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_2 \circ f \\
&= \eta_2 \circ \varepsilon_1 \ .
\end{aligned}$$

Em várias passagens, usamos que f é morfismo de biálgebras. Assim o resultado fica provado. □

2.4 Algumas propriedades da antípoda

Já obtivemos na observação 2.1.2 que a antípoda de uma álgebra de Hopf é única. Veremos também que a antípoda é um antimorfismo de álgebras e de coálgebras, e algumas outras propriedades relacionadas com a antípoda.

Proposição 2.4.1. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então:*

1. *S é um* antimorfismo de álgebras. *Isto é, $S\colon H \to H^{\mathrm{op}}$ é morfismo de álgebras, ou, equivalentemente, $S\colon H^{\mathrm{op}} \to H$ é morfismo de álgebras. Em outras palavras*[3]*,*

$$\begin{aligned}
S \circ \mu &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) \qquad & S \circ \mu^{\mathrm{op}} &= \mu \circ (S \otimes S) \\
S \circ \eta &= \eta & S \circ \eta &= \eta \ .
\end{aligned}$$

2. *S é um* antimorfismo de coálgebras,. *Isto é, $S\colon H \to H^{\mathrm{cop}}$ é morfismo de coálgebras, ou, equivalentemente, $S\colon H^{\mathrm{cop}} \to H$ é morfismo de coálgebras. Em outras palavras*[4]*,*

$$\begin{aligned}
\Delta \circ S &= (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \qquad & \Delta^{\mathrm{cop}} \circ S &= (S \otimes S) \circ \Delta \\
\varepsilon \circ S &= \varepsilon & \varepsilon \circ S &= \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Demonstração.

1. ($S \circ \mu = \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S)$:) Considere $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ com o produto de convolução $*$ e unidade $1_{\mathrm{Hom}(H\otimes H,H)} = \eta \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Vamos mostrar

[3]Passamos de $S \circ \mu = \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S)$ a $S \circ \mu^{\mathrm{op}} = \mu \circ (S \otimes S)$, e vice-versa, aplicando τ à direita dos dois lados, e usando que $(S \otimes S) \circ \tau = \tau \circ (S \otimes S)$.

[4]Passamos de $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$ a $\Delta^{\mathrm{cop}} \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta$, e vice-versa, aplicando τ à esquerda dos dois lados, e usando que $(S \otimes S) \circ \tau = \tau \circ (S \otimes S)$.

que tanto $S \circ \mu$ quanto $\mu^{op} \circ (S \otimes S)$ são inversas de $\mu \in \operatorname{Hom}(H \otimes H, H)$ com relação ao produto de convolução.

Vejamos que $S \circ \mu$ é inversa de μ:

$$\begin{aligned}
\mu * (S \circ \mu) &= \mu \circ (\mu \otimes (S \circ \mu)) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \circ \mu = (\mathrm{Id} * S) \circ \mu \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ \mu = \eta \circ \varepsilon_{H \otimes H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S \circ \mu) * \mu &= \mu \circ ((S \circ \mu) \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes H} \\
&= \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \circ \mu = (S * \mathrm{Id}) \circ \mu \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ \mu = \eta \circ \varepsilon_{H \otimes H} \ .
\end{aligned}$$

Agora, verifiquemos que $\mu^{op} \circ (S \otimes S)$ é inversa de μ. Sejam $h, g \in H$. Temos:

$$\begin{aligned}
&\big(\mu * (\mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S))\big)(h \otimes g) \\
&\quad = \sum_{h,g} \mu(h_{(1)} \otimes g_{(1)}) \cdot \big(\mu^{op} \circ (S \otimes S)\big)(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) \\
&\quad = \sum_{g,h} h_{(1)} \cdot g_{(1)} \cdot S(g_{(2)}) \cdot S(h_{(2)}) \\
&\quad = \sum_{h} h_{(1)} \cdot \left(\sum_{g} g_{(1)} \cdot S(g_{(2)}) \right) \cdot S(h_{(2)}) \\
&\quad = \sum_{h} h_{(1)} \cdot (\mathrm{Id} * S)(g) \cdot S(h_{(2)}) \\
&\quad = \sum_{h} h_{(1)} \cdot (\eta \circ \varepsilon)(g) \cdot S(h_{(2)}) \\
&\quad = \sum_{h} h_{(1)} \cdot (\varepsilon(g) 1_H) \cdot S(h_{(2)}) \\
&\quad = \varepsilon(g) \sum_{h} h_{(1)} \cdot S(h_{(2)}) = \varepsilon(g)(\mathrm{Id} * S)(h) \\
&\quad = \varepsilon(g)(\eta \circ \varepsilon)(h) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) 1_H \\
&\quad = \eta\big(\varepsilon(g)\varepsilon(h)\big) = \eta \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\big((\mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S)) * \mu\big)(h \otimes g) \\
&\qquad = \sum_{h,g} \big(\mu^{op} \circ (S \otimes S)\big)(h_{(1)} \otimes g_{(1)}) \cdot \mu(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) \\
&\qquad = \sum_{g,h} S(g_{(1)}) \cdot S(h_{(1)}) \cdot h_{(2)} \cdot g_{(2)} \\
&\qquad = \sum_{g} S(g_{(1)}) \cdot \left(\sum_{h} S(h_{(1)}) \cdot h_{(2)} \right) \cdot g_{(2)} \\
&\qquad = \sum_{g} S(g_{(1)}) \cdot (S * \mathrm{Id})(h) \cdot g_{(2)} \\
&\qquad = \sum_{g} S(g_{(1)}) \cdot (\eta \circ \varepsilon)(h) \cdot g_{(2)} \\
&\qquad = \sum_{g} S(g_{(1)}) \cdot (\varepsilon(h) 1_H) \cdot g_{(2)} \\
&\qquad = \varepsilon(h) \sum_{g} S(g_{(1)}) \cdot g_{(2)} = \varepsilon(h)(S * \mathrm{Id})(g) \\
&\qquad = \varepsilon(h)(\eta \circ \varepsilon)(g) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) 1_H \\
&\qquad = \eta\big(\varepsilon(g)\varepsilon(h)\big) = \eta \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) \ .
\end{aligned}
$$

Portanto $\mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S)$ e $S \circ \mu$ são inversas de $\mu \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ com relação ao produto de convolução na álgebra $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$. Como o elemento inverso é único numa álgebra, temos que

$$\mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) = S \circ \mu \ .$$

($S(1_H) = 1_H$:) De fato, temos:

$$
\begin{aligned}
S * \mathrm{Id}(1_H) &= \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(1_H) = \eta \circ \varepsilon(1_H) \\
\implies & S(1_H) \cdot 1_H = \varepsilon(1_H) 1_H = 1_{\mathbb{K}} 1_H \\
\implies & S(1_H) = 1_H \ .
\end{aligned}
$$

2. ($\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$:) Considere $\mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ com o produto de convolução $*$ e unidade $\eta_{H \otimes H} \circ \varepsilon$. Vamos mostrar que $\Delta \circ S$ e $(S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$ são inversas de $\Delta \in \mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ com relação ao produto de convolução.

Verificando que $\Delta \circ S$ é inversa de Δ:

$$\begin{aligned}
\Delta * (\Delta \circ S) &= \mu_{H\otimes H} \circ (\Delta \otimes (\Delta \circ S)) \circ \Delta \\
&= \mu_{H\otimes H} \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \\
&= \Delta \circ \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ (\mathrm{Id} * S) \\
&= \Delta \circ \eta \circ \varepsilon = \eta_{H\otimes H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ S) * \Delta &= \mu_{H\otimes H} \circ ((\Delta \circ S) \otimes \Delta) \circ \Delta \\
&= \mu_{H\otimes H} \circ (\Delta \otimes \Delta) \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= \Delta \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \Delta \circ (S * \mathrm{Id}) \\
&= \Delta \circ \eta \circ \varepsilon = \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Verificando que $(S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}$ é inversa de Δ:

$$\begin{aligned}
&\Big(\Delta * \big((S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}\big)\Big)(h) \\
&\quad = \sum_h \Delta(h_{(1)}) \cdot \big((S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}}\big)(h_{(2)}) \\
&\quad = \sum_h \left(\sum_{h_{(1)}} h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)} \right) \cdot \left(\sum_{h_{(2)}} S(h_{(2)(2)}) \otimes S(h_{(2)(1)}) \right) \\
&\quad = \sum_{h,h_{(1)},h_{(2)}} h_{(1)(1)} S(h_{(2)(2)}) \otimes h_{(1)(2)} S(h_{(2)(1)}) \\
&\quad = \sum_h h_{(1)} S(h_{(4)}) \otimes h_{(2)} S(h_{(3)}) \\
&\quad = \sum_{h,h_{(2)}} h_{(1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)(1)} S(h_{(2)(2)}) \\
&\quad = \sum_h h_{(1)} S(h_{(3)}) \otimes \underbrace{(\mathrm{Id} * S)(h_{(2)})}_{(\eta\circ\varepsilon)(h_{(2)})} \\
&\quad = \left(\sum_h \varepsilon(h_{(2)}) h_{(1)} S(h_{(3)}) \right) \otimes 1_H \\
&\quad = \left(\sum_h h_{(1)} S(h_{(2)}) \right) \otimes 1_H = \underbrace{(\mathrm{Id} * S)(h)}_{(\eta\circ\varepsilon)(h)} \otimes 1_H \\
&\quad = \varepsilon(h) 1_H \otimes 1_H = \eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon(h)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\big((S\otimes S)\circ\Delta^{\mathrm{cop}}\big)*\Delta\Big)(h)\\
&\quad=\sum_h \big((S\otimes S)\circ\Delta^{\mathrm{cop}}\big)(h_{(1)})\cdot\Delta(h_{(2)})\\
&\quad=\sum_h\left(\sum_{h_{(1)}} S(h_{(1)(2)})\otimes S(h_{(1)(1)})\right)\cdot\left(\sum_{h_{(2)}} h_{(2)(1)}\otimes h_{(2)(2)}\right)\\
&\quad=\sum_{h,h_{(1)},h_{(2)}} S(h_{(1)(2)})h_{(2)(1)}\otimes S(h_{(1)(1)})h_{(2)(2)}\\
&\quad=\sum_h S(h_{(2)})h_{(3)}\otimes S(h_{(1)})h_{(4)}\\
&\quad=\sum_{h,h_{(2)}} S(h_{(2)(1)})h_{(2)(2)}\otimes S(h_{(1)})h_{(3)}\\
&\quad=\sum_h \underbrace{(S*\mathrm{Id})(h_{(2)})}_{(\eta\circ\varepsilon)(h_{(2)})}\otimes S(h_{(1)})h_{(4)}\\
&\quad=1_H\otimes\left(\sum_h S(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})h_{(3)}\right)\\
&\quad=1_H\otimes\left(\sum_h S(h_{(1)})h_{(2)}\right)=1_H\otimes\underbrace{(S*\mathrm{Id})(h)}_{(\eta\circ\varepsilon)(h)}\\
&\quad=\varepsilon(h)1_H\otimes 1_H=\eta_{H\otimes H}\circ\varepsilon(h)\ .
\end{aligned}
$$

Dessa forma, $(S\otimes S)\circ\Delta^{\mathrm{cop}}$ e $\Delta\circ S$ são inversas de $\Delta\in\mathrm{Hom}(H,H\otimes H)$ com relação ao produto de convolução da álgebra $\mathrm{Hom}(H,H\otimes H)$. Pela unicidade do elemento inverso numa álgebra, temos:

$$(S\otimes S)\circ\Delta^{\mathrm{cop}}=\Delta\circ S\ .$$

($\varepsilon\circ S=\varepsilon$:) Seja $h\in H$. Então temos:

$$(\mathrm{Id}*S)(h)=\eta\circ\varepsilon(h)\implies\sum_h h_{(1)}S(h_{(2)})=\varepsilon(h)1_H\ .$$

Aplicando ε, e como ε é morfismo de álgebras, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_h \varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(S(h_{(2)})) &= \varepsilon(h)\underbrace{\varepsilon(1_H)}_{1_{\mathbb{K}}} \\
\Longrightarrow \sum_h \varepsilon\Big(S\big(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\big)\Big) &= \varepsilon(h) \\
\Longrightarrow (\varepsilon \circ S)\left(\sum_h \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right) &= \varepsilon(h) \\
\Longrightarrow (\varepsilon \circ S)(h) &= \varepsilon(h) \ .
\end{aligned}
$$

Portanto $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. □

Proposição 2.4.2. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

1. $\sum_h S(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$;
2. $\sum_h h_{(2)}S(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H$ *para todo* $h \in H$;
3. $S^2 = \mathrm{Id}$.

Demonstração.
$(1. \Longrightarrow 3.)$:
Como Id é a inversa de S com relação ao produto de convolução, basta mostrar que S^2 também é a inversa de S com relação ao produto de convolução. De fato, temos:

$$
\begin{aligned}
(S * S^2)(h) &= \sum_h S(h_{(1)}) \cdot S^2(h_{(2)}) \\
&= S\left(\sum_h S(h_{(2)}) \cdot h_{(1)}\right) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)S(1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \\
&= \eta \circ \varepsilon(h) \ .
\end{aligned}
$$

Assim, como sabemos que S é inversível e temos que S^2 é inversa à direita de S, temos que S^2 deve ser a inversa de S, que é Id.

$(3. \implies 1.)$:
Pela definição da antípoda, temos, para todo $h \in H$, que

$$\sum_h S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H \ .$$

Aplicando S dos dois lados, e usando que S é antimorfismo de álgebras, obtemos

$$\sum_h S(h_{(2)})S^2(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H \implies \sum_h S(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H \ .$$

$(2. \implies 3.)$:
Da mesma forma que em $1. \implies 3.$, vamos mostrar que S^2 é a inversa de S com relação ao produto de convolução. De fato:

$$\begin{aligned}
(S^2 * S)(h) &= \sum_h S^2(h_{(1)})S(h_{(2)}) \\
&= S\left(\sum_h h_{(2)}S(h_{(1)})\right) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H \\
&= \eta \circ \varepsilon(h) \ .
\end{aligned}$$

Portanto, como sabemos que S é inversível e temos que S^2 é inversa à esquerda de S, devemos ter $\mathrm{Id} = S^2$.

$(3. \implies 2.)$:
Considere $h \in H$. Pela definição de antípoda, temos:

$$\sum_h h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H \ .$$

Aplique S dos dois lados da equação, e como S é antimorfismo de álgebras, temos:

$$\sum_h S^2(h_{(2)})S(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H \implies \sum_h h_{(2)}S(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H \ .$$

$\square$

Corolário 2.4.3. *Se H é uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa, então*

$$S^2 = \mathrm{Id} \ .$$

Demonstração. Se H é comutativa, então

$$\sum_h h_{(1)} S(h_{(2)}) = \varepsilon(h) 1_H \implies \sum_h S(h_{(2)}) h_{(1)} = \varepsilon(h) 1_H \ ,$$

e pela proposição 2.4.2, temos que $S^2 = \mathrm{Id}$.

Se H é cocomutativa, então

$$\sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \sum_h h_{(2)} \otimes h_{(1)}$$
$$\implies \varepsilon(h) 1_H = \sum_h h_{(1)} S(h_{(2)}) = \sum_h h_{(2)} S(h_{(1)}) \ ,$$

e pela proposição 2.4.2, temos que $S^2 = \mathrm{Id}$. □

2.5 Álgebras de Hopf oposta, co-oposta e oposta-co-oposta

Seja H uma álgebra de Hopf, e considere o produto oposto μ^{op} e o coproduto cooposto Δ^{cop}. Na seção 1.4.3 foi visto que H^{op}, H^{cop} e $H^{\mathrm{op,cop}}$ são biálgebras também. Veremos nessa seção que a antípoda de H também fornece uma antípoda para $S^{\mathrm{op,cop}}$ e que em determinadas situações também temos uma antípoda para H^{op} e H^{cop}.

Proposição 2.5.1. *Seja H uma álgebra de Hopf. A biálgebra $H^{\mathrm{op,cop}}$ é uma álgebra de Hopf, com antípoda S.*

Demonstração. Dados $f, g \colon H \to H$, o produto em $\mathrm{Hom}(H^{\mathrm{op,cop}}, H^{\mathrm{op,cop}})$, chamado de produto de convolução, é dado por:

$$f *_{\mathrm{op,cop}} g = \mu^{\mathrm{op}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \ .$$

Sabemos que $H^{\mathrm{op,cop}}$ é uma biálgebra, pela proposição 1.4.12. Resta verificar a propriedade da antípoda. Temos que:

$$\begin{aligned} S *_{\mathrm{op,cop}} \mathrm{Id} &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\ &= \mu \circ \tau \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau \circ \Delta \\ &= \mu \circ \tau \circ \tau \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= \eta \circ \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Da mesma forma, mostra-se que $\mathrm{Id} *_{\mathrm{op,cop}} S = \eta \circ \varepsilon$. Portanto $H^{\mathrm{op,cop}}$ é uma álgebra de Hopf, com antípoda S. □

Proposição 2.5.2. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então são equivalentes:*

1. *S é inversível com relação à composição de funções;*
2. *a biálgebra H^{op} é uma álgebra de Hopf.*

Caso sejam verdadeiras, a antípoda de H^{op} é $S' = S^{-1}$.

Demonstração.
$(1. \implies 2.)$:
Como S é antimorfismo de coálgebras, pela proposição 2.4.1, temos

$$\mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) = S \circ \mu$$
$$S \circ \eta = \eta \ .$$

O mesmo vale para S^{-1}, pois podemos aplicar $(S^{-1} \otimes S^{-1})$ à direita e S^{-1} à esquerda na primeira equação, e S^{-1} à esquerda na segunda. Obtemos

$$S^{-1} \circ \mu^{\mathrm{op}} = \mu \circ (S^{-1} \otimes S^{-1})$$

e

$$(*) \qquad \eta = S^{-1} \circ \eta \ .$$

Aplicando a transposição τ à direita na equação de cima, temos

$$(**) \qquad S^{-1} \circ \mu = \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \ ,$$

já que $(S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \tau = \tau \circ (S^{-1} \otimes S^{-1})$.

Considere $\mathrm{Hom}(H^{\mathrm{op}}, H^{\mathrm{op}})$, com o produto de convolução dado por

$$f *_{\mathrm{op}} g = \mu^{\mathrm{op}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta \ ,$$

para $f, g \in \mathrm{Hom}(H^{\mathrm{op}}, H^{\mathrm{op}})$.

Vamos mostrar a propriedade da antípoda para S^{-1}:

$$\begin{aligned} S^{-1} *_{\mathrm{op}} \mathrm{Id} &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\ &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \\ &\overset{(**)}{=} S^{-1} \circ \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon \\ &\overset{(*)}{=} \eta \circ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} *_{\mathrm{op}} S^{-1} &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{-1}) \circ \Delta \\
&= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&\overset{(**)}{=} S^{-1} \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon \\
&\overset{(*)}{=} \eta \circ \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Portanto S^{-1} é antípoda para H^{op}.

$(2. \implies 1.)$:
Temos que:

$$\begin{aligned}
(S \circ S') * S &= \mu \circ \big((S \circ S') \otimes S\big) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (S \otimes S) \circ (S' \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= S \circ \mu^{\mathrm{op}} \circ (S' \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= S \circ \eta \circ \varepsilon \\
&= \eta \circ \varepsilon \ , \\
S * (S' \circ S) &= \mu \circ \big(S \otimes (S' \circ S)\big) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S') \circ (S \otimes S) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S') \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \circ S \\
&= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S' \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \circ S \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ S \\
&= \eta \circ \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Como S é inversível com respeito ao produto de convolução, com inversa Id, temos $S \circ S' = \mathrm{Id} = S' \circ S$. Portanto S é inversível com relação à composição de funções, com inversa $S' = S^{-1}$. □

Proposição 2.5.3. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então são equivalentes:*

1. *S é inversível com relação à composição de funções;*
2. *a biálgebra H^{cop} é uma álgebra de Hopf.*

Caso sejam ambas verdadeiras, a antípoda de H^{cop} é $S' = S^{-1}$.

Demonstração.
$(1. \implies 2.)$:
Sabemos da proposição 2.4.1 que S é antimorfismo de coálgebras. Então:

$$(S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} = \Delta \circ S$$

$$\varepsilon \circ S = \varepsilon$$

Da mesma forma que antes, podemos aplicar $(S^{-1} \otimes S^{-1})$ à esquerda e S^{-1} à direita na primeira equação e S^{-1} à direita na segunda. Ficamos com S^{-1} antimorfismo de coálgebras:

$$\Delta^{\mathrm{cop}} \circ S^{-1} = (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \Delta$$

e

$$(*) \qquad \varepsilon = \varepsilon \circ S^{-1} \ .$$

Aplicamos a transposição τ à esquerda na equação de cima, e ficamos com

$$(**) \qquad \Delta \circ S^{-1} = (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \ ,$$

posto que $\tau \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) = (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \tau$.

Agora considamos $\mathrm{Hom}(H^{\mathrm{cop}}, H^{\mathrm{cop}})$, com o produto de convolução dado por

$$f *_{\mathrm{cop}} g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \ ,$$

para $f, g \in \mathrm{Hom}(H^{\mathrm{cop}}, H^{\mathrm{cop}})$. Passamos, então, à propriedade da antípoda para S^{-1}:

$$\begin{aligned}
S^{-1} *_{\mathrm{cop}} \mathrm{Id} &= \mu \circ (S^{-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\
&\overset{(**)}{=} \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S) \circ \Delta \circ S^{-1} \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ S^{-1} \\
&\overset{(*)}{=} \eta \circ \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} *_{\mathrm{cop}} S^{-1} &= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{-1}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\
&= \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\
&\overset{(**)}{=} \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \circ S^{-1} \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ S^{-1} \\
&\overset{(*)}{=} \eta \circ \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Portanto, temos que S^{-1} é antípoda de H^{cop}.

(2. $\Longrightarrow$ 1.) :
Temos que:

$$
\begin{aligned}
(S \circ S') * S &= \mu \circ \big((S \circ S') \otimes S\big) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (S \otimes S) \circ (S' \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= S \circ \mu^{\mathrm{op}} \circ (S' \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta \\
&= S \circ \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S') \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \\
&= S \circ \eta \circ \varepsilon \\
&= \eta \circ \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S * (S' \circ S) &= \mu \circ \big(S \otimes (S' \circ S)\big) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S') \circ (S \otimes S) \circ \Delta \\
&= \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S') \circ \Delta^{\mathrm{cop}} \circ S \\
&= \eta \circ \varepsilon \circ S \\
&= \eta \circ \varepsilon
\end{aligned}
$$

Como S é inversível com respeito ao produto de convolução, com inversa Id, temos $S \circ S' = \mathrm{Id} = S' \circ S$. Portanto S é inversível com relação à composição de funções, com inversa $S' = S^{-1}$. □

2.6 Álgebra de Hopf do produto tensorial

Sejam B e H duas álgebras de Hopf. Na seção 1.4.4 vimos que $B \otimes H$ é uma biálgebra, com as operações

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_{B\otimes H} & = & (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \\
\eta_{B\otimes H} & = & (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \\
\Delta_{B\otimes H} & = & (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
\varepsilon_{B\otimes H} & = & \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H)\ ,
\end{array}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\
&\mu_{\mathbb{K}}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \cdot \beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\
&\Delta_{\mathbb{K}}(\alpha) = \alpha(1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}})
\end{aligned}
$$

e, além disso, $\mu_{\mathbb{K}} = \Delta_{\mathbb{K}}^{-1}$.

Resta tentar obter uma antípoda para $B \otimes H$. Defina

$$S_{B\otimes H} = S_B \otimes S_H \ .$$

Conferindo a propriedade da antípoda:

$$\begin{aligned}
&\mu_{B\otimes H} \circ (S_{B\otimes H} \otimes \mathrm{Id}_{B\otimes H}) \circ \Delta_{B\otimes H} \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (S_B \otimes S_H \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \circ \tau \circ \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \circ \tau \circ \mathrm{Id}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \circ (S_B \otimes \mathrm{Id} \otimes S_H \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (S_B \otimes \mathrm{Id} \otimes S_H \otimes \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = \big(\mu_B \circ (S_B \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_B\big) \otimes \big(\mu_H \circ (S_H \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_H\big) \\
&\qquad = (\eta_B \circ \varepsilon_B) \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H) \\
&\qquad = (\eta_B \otimes \eta_H) \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \\
&\qquad = (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \circ \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \\
&\qquad = \eta_{B\otimes H} \circ \varepsilon_{B\otimes H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{B\otimes H} \circ (\mathrm{Id}_{B\otimes H} \otimes S_{B\otimes H}) \circ \Delta_{B\otimes H} \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes S_B \otimes S_H) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \circ \tau \circ \mathrm{Id}) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \circ \tau \circ \mathrm{Id}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \circ (\mathrm{Id} \otimes S_B \otimes \mathrm{Id} \otimes S_H) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{Id} \otimes S_B \otimes \mathrm{Id} \otimes S_H) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_H) \\
&\qquad = \big(\mu_B \circ (\mathrm{Id} \otimes S_B) \circ \Delta_B\big) \otimes \big(\mu_H \circ (\mathrm{Id} \otimes S_H) \circ \Delta_H\big) \\
&\qquad = (\eta_B \circ \varepsilon_B) \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H) \\
&\qquad = (\eta_B \otimes \eta_H) \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \\
&\qquad = (\eta_B \otimes \eta_H) \circ \Delta_{\mathbb{K}} \circ \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_H) \\
&\qquad = \eta_{B\otimes H} \circ \varepsilon_{B\otimes H}
\end{aligned}$$

Com isso, $B \otimes H$ é uma álgebra de Hopf.

2.7 Álgebra de Hopf quociente

Daremos uma estrutura de álgebra de Hopf para o quociente $\frac{H}{I}$ de uma álgebra de Hopf H por um Hopf-ideal I. Observe que a definição de Hopf-ideal é tal que possibilita transportar a estrutura de H para $\frac{H}{I}$, da mesma forma que ocorre com as álgebras, coálgebras e biálgebras.

Proposição 2.7.1. *Sejam H álgebra de Hopf, $I \subset H$ Hopf-ideal. Considere $\pi\colon B \to \frac{B}{I}$ a projeção canônica. Então existe uma única estrutura de álgebra de Hopf em $\frac{H}{I}$ que faz com que π seja um morfismo de álgebras de Hopf. Essa estrutura é dada por:*

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{a \cdot b} & \Delta_{\frac{H}{I}}(\overline{b}) &= \overline{b_{(1)}} \otimes \overline{b_{(2)}} \\ 1_{\frac{H}{I}} &= \overline{1_H} & \varepsilon_{\frac{H}{I}}(\overline{b}) &= \varepsilon_H(b) \end{aligned}$$

$$S_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) = \overline{S_H(a)} \ .$$

Demonstração. Um Hopf-ideal é um bi-ideal com a propriedade adicional de ser invariante pela antípoda, isto é, $S(I) \subseteq I$. Sendo assim, a estrutura de biálgebra já está garantida pela proposição 1.4.13. Resta obter a antípoda.

Defina $S_{\frac{H}{I}} : \frac{H}{I} \to \frac{H}{I}$ por

$$S_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) = \overline{S_H(a)} \ .$$

A função está bem definida e é um antimorfismo de álgebras e de coálgebras (pois S_H o é). Dados $a, b \in H$, a boa definição segue de:

$$\begin{aligned} \overline{a} = \overline{b} &\implies a - b \in I \implies S_H(a-b) \in I \implies S_H(a) - S_H(b) \in I \\ &\implies \overline{S_H(a)} = \overline{S_H(b)} \implies S_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) = S_{\frac{H}{I}}(\overline{b}) \ . \end{aligned}$$

Falta apenas mostrar a propriedade da antípoda. Seja $a \in H$. Temos:

$$\begin{aligned} S_{\frac{H}{I}} * \mathrm{Id}_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) &= \mu_{\frac{H}{I}} \circ (S_{\frac{H}{I}} \otimes \mathrm{Id}_{\frac{H}{I}}) \circ \Delta_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) \\ &= \mu_{\frac{H}{I}} \circ (S_{\frac{H}{I}} \otimes \mathrm{Id}) \left(\sum_a \overline{a_{(1)}} \otimes \overline{a_{(2)}} \right) \\ &= \sum_a \overline{S_H(a_{(1)})} \cdot \overline{a_{(2)}} \\ &= \overline{\sum_a S_H(a_{(1)}) a_{(2)}} \\ &= \overline{\varepsilon_H(a) 1_H} \\ &= \varepsilon_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) \overline{1_H} \\ &= \eta_{\frac{H}{I}} \circ \varepsilon_{\frac{H}{I}}(\overline{a}) \ . \end{aligned}$$

Portanto $S_{\frac{H}{I}} * \mathrm{Id}_{\frac{H}{I}} = \eta_{\frac{H}{I}} \circ \varepsilon_{\frac{H}{I}}$. A outra relação $\mathrm{Id}_{\frac{H}{I}} * S_{\frac{H}{I}} = \eta_{\frac{H}{I}} \circ \varepsilon_{\frac{H}{I}}$ se mostra de forma análoga. Portanto $\frac{H}{I}$ é uma álgebra de Hopf.

Por fim, π é um morfismo de álgebras de Hopf, pois é um morfismo de biálgebras, em decorrência da proposição 1.4.13, e um morfismo de biálgebras é automaticamente um morfismo de álgebras de Hopf, por causa da proposição 2.3.5.

A unicidade da estrutura de álgebra de Hopf do enunciado é consequência da unicidade da estrutura de biálgebra, decorrente da proposição 1.4.13. □

Proposição 2.7.2. *Sejam B e H duas álgebras de Hopf, $I \subseteq B$ um Hopf-ideal e $\pi\colon B \to \frac{B}{I}$ a projeção canônica. Se $f\colon B \to H$ é um morfismo de álgebras de Hopf tal que $I \subseteq \ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras de Hopf $\overline{f}\colon \frac{B}{I} \to H$ tal que*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & H \\ & \frac{B}{I} \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ \pi = f \ .$$

Demonstração. Seja $f\colon B \to H$ é um morfismo de álgebras de Hopf com $I \subseteq \ker(f)$. Da proposição 1.4.14, vale que existe único morfismo de biálgebras $\overline{f}\colon \frac{B}{I} \to H$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Como, pela proposição 2.3.5, o morfismo de biálgebras preserva a antípoda, temos que $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras de Hopf. □

2.8 Álgebra de Hopf dual

2.8.1 Dimensão finita

Considere uma álgebra de Hopf de dimensão finita H. Já vimos antes, na seção 1.4.6.1, que H^* é uma biálgebra, com estrutura dada por:

$$\begin{aligned} &\mu_{H^*} = \Delta_H^* \circ \theta && \Delta_{H^*} = \theta^{-1} \circ \mu_H^* \\ &f * g = \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_H && \\ &f * g(c) = \textstyle\sum_c f(c_{(1)}) g(c_{(2)}) && \\ & && \\ &\eta_{H^*} = \varepsilon_H^* \circ \xi && \varepsilon_{H^*} = \xi^{-1} \circ \eta_H^* \ , \\ &1_{H^*} = \varepsilon_H && \end{aligned}$$

em que temos

$$\begin{aligned}\xi\colon \mathbb{K} &\to \mathbb{K}^*\\ \xi(\lambda) &= \mathrm{mult}_\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\colon B^*\otimes B^* &\to (B\otimes B)^*\\ \theta(f\otimes g)(a\otimes b) &= f(a)g(b)\ .\end{aligned}$$

Como H admite antípoda S_H, é possível mostrar que H^* também admite antípoda, e esta é dada pela transposta de S_H:

$$S_{H^*} = S_H^*\colon H^* \to H^*\ .$$

Antes, precisaremos de um lema para reescrever a transposta do produto tensorial de duas transformações lineares.

Lema 2.8.1. *Dados $f_1\colon V_1\to W_1$ e $f_2\colon V_2\to W_2$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita, temos*

$$(f_1\otimes f_2)^* = \theta_V\circ({f_1}^*\otimes {f_2}^*)\circ\theta_W^{-1}\ ,$$

em que

$$\begin{aligned}\theta_V\colon {V_1}^*\otimes {V_2}^* &\to (V_1\otimes V_2)^*\\ \theta_W\colon {W_1}^*\otimes {W_2}^* &\to (W_1\otimes W_2)^*\end{aligned}$$

são dados, para $a\in V_1$ e $b\in V_2$ por

$$\begin{aligned}\theta_V(f\otimes g)(a\otimes b) &= f(a)g(b)\\ \theta_W(f\otimes g)(a\otimes b) &= f(a)g(b)\ .\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam ${w_1}^*\in {W_1}^*$ e ${w_2}^*\in {W_2}^*$. Então

$$\begin{aligned}\big((f_1\otimes f_2)^*\circ\theta_W\big)({w_1}^*\otimes {w_2}^*) &= \big(f_1\otimes f_2\big)^*\big(\theta_W({w_1}^*\otimes {w_2}^*)\big)\\ &= \big(\theta_W({w_1}^*\otimes {w_2}^*)\big)\circ(f_1\otimes f_2)\ .\end{aligned}$$

Aplicando em $v_1\in V_1$ e $v_2\in V_2$, temos:

$$\begin{aligned}&\big((f_1\otimes f_2)^*\circ\theta_W\big)({w_1}^*\otimes {w_2}^*)(v_1\otimes v_2)\\ &\quad= \big(\theta_W({w_1}^*\otimes {w_2}^*)\big)\circ(f_1\otimes f_2)(v_1\otimes v_2)\\ &\quad= \big(\theta_W({w_1}^*\otimes {w_2}^*)\big)(f_1(v_1)\otimes f_2(v_2))\\ &\quad= {w_1}^*(f_1(v_1))\cdot {w_2}^*(f_2(v_2))\\ &\quad= {w_1}^*\circ f_1(v_1)\cdot {w_2}^*\circ f_2(v_2)\\ &\quad= \big(\theta_V({w_1}^*\circ f_1\otimes {w_2}^*\circ f_2)\big)(v_1\otimes v_2)\ .\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\big((f_1 \otimes f_2)^* \circ \theta_W\big)({w_1}^* \otimes {w_2}^*)\\
&\qquad = \theta_V({w_1}^* \circ f_1 \otimes {w_2}^* \circ f_2)\\
&\qquad = \theta_V({f_1}^*({w_1}^*) \otimes {f_2}^*({w_2}^*))\\
&\qquad = \theta_V \circ ({f_1}^* \otimes {f_2}^*)({w_1}^* \otimes {w_2}^*)\ .
\end{aligned}$$

Segue que

$$(f_1 \otimes f_2)^* \circ \theta_W = \theta_V \circ ({f_1}^* \otimes {f_2}^*)\ ,$$

isto é, como θ_W é bijetora[5],

$$(f_1 \otimes f_2)^* = \theta_V \circ ({f_1}^* \otimes {f_2}^*) \circ \theta_W^{-1}\ .$$

□

Proposição 2.8.2. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. A biálgebra H^* admite a antípoda $S^{H^*} = S_H^*$ e portanto é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. De fato, transpondo a propriedade da antípoda para S_H, temos:

$$\begin{aligned}
&\mu_H \circ (S_H \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta_H = \eta_H \circ \varepsilon_H\\
&\quad \Longrightarrow\ \Delta_H^* \circ (S_H \otimes \mathrm{Id})^* \circ \mu_H^* = \varepsilon_H^* \circ \eta_H^*\\
&\quad \overset{2.8.1}{\Longrightarrow}\ \Delta_H^* \circ \theta \circ (S_H^* \otimes \mathrm{Id}^*) \circ \theta^{-1} \circ \mu_H^* = \varepsilon_H^* \circ \xi \circ \xi^{-1} \circ \eta_H^*\\
&\quad \Longrightarrow\ \mu_{H^*} \circ (S_H^* \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{H^*} = \eta_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}\\
&\quad \Longrightarrow\ S_H^* * \mathrm{Id} = \eta_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}\ .
\end{aligned}$$

Acima usamos o lema 2.8.1, com $V_1 = V_2 = W_1 = W_2 = H$, para dizer que $(S_H \otimes \mathrm{Id})^* = \theta \circ (S_H^* \otimes \mathrm{Id}^*) \circ \theta^{-1}$.

De forma análoga, temos:

$$\begin{aligned}
&\mu_H \circ (\mathrm{Id} \otimes S_H) \circ \Delta_H = \eta_H \circ \varepsilon_H\\
&\quad \Longrightarrow\ \Delta_H^* \circ (\mathrm{Id} \otimes S_H)^* \circ \mu_H^* = \varepsilon_H^* \circ \eta_H^*\\
&\quad \overset{2.8.1}{\Longrightarrow}\ \Delta_H^* \circ \theta \circ (\mathrm{Id}^* \otimes S_H^*) \circ \theta^{-1} \circ \mu_H^* = \varepsilon_H^* \circ \xi \circ \xi^{-1} \circ \eta_H^*\\
&\quad \Longrightarrow\ \mu_{H^*} \circ (\mathrm{Id} \otimes S_H^*) \circ \Delta_{H^*} = \eta_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}\\
&\quad \Longrightarrow\ \mathrm{Id} * S_H^* = \eta_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*}\ .
\end{aligned}$$

Usamos, novamente, o lema 2.8.1, para obter $(\mathrm{Id} \otimes S_H)^* = \theta \circ (\mathrm{Id}^* \otimes S_H^*) \circ \theta^{-1}$. Portanto S_H^* é uma antípoda para H^*. □

[5] Temos que W_1 e W_2 são espaços vetoriais de dimensão finita, e usamos o item 3. do lema 1.3.1.

Além disso, temos a proposição sobre a transposta de um morfismo de álgebras de Hopf.

Proposição 2.8.3. *Sejam H e B duas álgebras de Hopf e $f\colon H \to B$ um morfismo de álgebras de Hopf. Então a transposta $f^*\colon B^* \to H^*$ é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Pela proposição 1.4.17, temos que f^* é morfismo de biálgebras. Como todo morfismo de biálgebras entre álgebras de Hopf é automaticamente um morfismo de álgebras de Hopf (proposição 2.3.5), temos o resultado. □

2.8.2 Dual finito

Nesta seção estenderemos o resultado da seção anterior para o dual finito H° de uma álgebra de Hopf H. Já vimos que o dual finito de uma biálgebra tem estrutura de biálgebra. Repetimos os morfismos aqui, por conveniência:

$$\begin{array}{ll}
\mu_{H^\circ} = \Delta_H^* \circ \theta & \Delta_{H^\circ} = \theta^{-1} \circ \mu_H^* \\
f * g = \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_H & \\
f * g(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)}) & \\
& \\
\eta_{H^\circ} = \varepsilon_H^* \circ \xi & \varepsilon_{H^\circ} = \xi^{-1} \circ \eta_H^* \ . \\
1_{H^*} = \varepsilon_H &
\end{array}$$

Acima, temos:

$$\xi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$$
$$\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda$$

$$\theta\colon H^* \otimes H^* \to (H \otimes H)^*$$
$$\theta(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b) \ .$$

Além disso, θ é injetiva, e restringimos a $\theta\colon H^* \otimes H^* \to \theta(H^* \otimes H^*)$ para obter uma bijeção. Também já mostramos que $\mu_H^*(H^\circ) \subseteq \theta(H^* \otimes H^*)$ (é consequência imediata da definição de H°), de modo que a fórmula para Δ_{H° faz sentido.

Então resta ver se essa biálgebra admite uma antípoda. Tentaremos usar a transposta finita S_H° de S_H e repetir as contas do caso de dimensão finita para mostrar que é a antípoda de H°. Precisaremos de um lema muito parecido com o lema 2.8.1. Apenas evitamos tomar θ_W^{-1}.

Lema 2.8.4. *Dados* $f_1 \colon V_1 \to W_1$ *e* $f_2 \colon V_2 \to W_2$ *transformações lineares entre espaços vetoriais, temos*

$$(f_1 \otimes f_2)^* \circ \theta_W = \theta_V \circ ({f_1}^* \otimes {f_2}^*) \ ,$$

em que

$$\begin{aligned} \theta_V &\colon {V_1}^* \otimes {V_2}^* \to (V_1 \otimes V_2)^* \\ \theta_W &\colon {W_1}^* \otimes {W_2}^* \to (W_1 \otimes W_2)^* \end{aligned}$$

são dados, para todos $a \in V_1$ *e* $b \in V_2$*, por*

$$\begin{aligned} \theta_V(f \otimes g)(a \otimes b) &= f(a)g(b) \\ \theta_W(f \otimes g)(a \otimes b) &= f(a)g(b) \ . \end{aligned}$$

Demonstração. Similar à do lema 2.8.1 (exceto pela última linha, onde invertemos θ_W). □

Proposição 2.8.5. *Seja* H *uma álgebra de Hopf. O dual finito* H°*, como visto nas seções 1.3.3.2 e 1.4.6.2, é uma álgebra de Hopf, com antípoda* $S_{H^\circ} = S_H^\circ \colon H^\circ \to H^\circ$ *dada por* $S_H^\circ = S_H^*$ *restrito a* H°*.*

Demonstração. Vamos mostrar que $S_H^\circ \colon H^\circ \to H^\circ$ está bem definida, isto é, que $S_H^\circ(H^\circ) \subseteq H^\circ$. De fato, dado $f \in H^\circ$, por f pertencer ao dual finito, temos que existem f_i's e g_i's em H^* tais que $f(a \cdot b) = \sum_i f_i(a) \cdot g_i(b)$ para todos $a, b \in H$. Então, como S_H é antimorfismo de álgebras (pela proposição 2.4.1), temos:

$$\begin{aligned} S_H^\circ(f)(a \cdot b) &= (f \circ S_H)(a \cdot b) \\ &= f(S_H(b) \cdot S_H(a)) \\ &= \sum_i f_i(S_H(b)) \cdot g_i(S_H(a)) \\ &= \sum_i (g_i \circ S_H)(a) \cdot (f_i \circ S_H)(b) \ . \end{aligned}$$

Portanto $S_H^\circ(H^\circ) \subseteq H^\circ$. Para mostrar que S_H° é a antípoda, fazemos:

$$\begin{aligned} &\mu_H \circ (S_H \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_H = \eta_H \circ \varepsilon_H \\ &\qquad \Longrightarrow \ \Delta_H^* \circ (S_H \otimes \mathrm{Id})^* \circ \mu_H^* = \varepsilon_H^* \circ \eta_H^* \ . \end{aligned}$$

Seja $p \in H^\circ$. Então, pela condição 2. da definição do dual finito, no teorema 1.3.13, temos que $\mu_H^*(p) \in \theta(H^* \otimes H^*)$. Escrevemos então

$\mu_H^*(p) = \theta(\sum_i f_i \otimes g_i)$, e também temos $\Delta_{H^\circ}(p) = \sum_i f_i \otimes g_i$. Aplicando a equação acima em p, temos:

$$\begin{aligned}
&\Delta_H^* \circ (S_H \otimes \mathrm{Id})^* \circ \mu_H^*(p) = \varepsilon_H^* \circ \eta_H^*(p) \\
&\quad\Longrightarrow \Delta_H^* \circ (S_H \otimes \mathrm{Id})^* \circ \theta \left(\sum_i f_i \otimes g_i \right) = \varepsilon_H^* \circ \eta_H^*(p) \\
&\quad\overset{2.8.4}{\Longrightarrow} \Delta_H^* \circ \theta \circ (S_H^* \otimes \mathrm{Id}^*) \left(\sum_i f_i \otimes g_i \right) = \varepsilon_H^* \circ \xi \circ \xi^{-1} \circ \eta_H^*(p) \\
&\quad\Longrightarrow \mu_{H^\circ} \circ (S_H^* \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{H^\circ}(p) = \eta_{H^\circ} \circ \varepsilon_{H^\circ}(p) \ .
\end{aligned}$$

Note que $\Delta_{H^\circ}(p) \in H^\circ \otimes H^\circ$, pois $p \in H^\circ$. E, como visto, $S_H^* = S_H^\circ$ em H° e $S_H^\circ(H^\circ) \subseteq H^\circ$. Então $\Delta_H^* \circ \theta$ está sendo aplicado a um elemento de $H^\circ \otimes H^\circ$, como deveria ser. E foi possível escrever, então, $\Delta_H^* \circ \theta = \mu_{H^\circ}$.

Portanto, temos $\mu_{H^\circ} \circ (S_H^\circ \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{H^\circ} = \eta_{H^\circ} \circ \varepsilon_{H^\circ}$. De forma análoga, mostra-se que $\mu_{H^\circ} \circ (\mathrm{Id} \otimes S_H^\circ) \circ \Delta_{H^\circ} = \eta_{H^\circ} \circ \varepsilon_{H^\circ}$. Consequentemente, S_H° é antípoda para H°. □

Por fim, a "transposta finita" de um morfismo de álgebras de Hopf também é um morfismo de álgebras de Hopf, como diz a proposição abaixo.

Proposição 2.8.6. *Sejam H e B duas álgebras de Hopf e $f\colon H \to B$ morfismo de álgebras de Hopf. Então a "transposta finita"*

$$f^\circ\colon B^\circ \to H^\circ \ ,$$

dada por $f^\circ = f^*$ restrito a B° é um morfismo de álgebras de Hopf.

Demonstração. Sabemos da proposição 1.4.19 que a "transposta finita" f° está bem definida e é morfismo de biálgebras. Automaticamente é morfismo de álgebras de Hopf, em virtude da proposição 2.3.5. □

2.9 Dualidade em álgebras de Hopf

Existe um conceito de dualidade entre biálgebras que é um pouco mais fraco do que o do dual finito. Dados B e C biálgebras, podemos considerar que B é o dual de C quando $B \cong C^\circ$. Nesse caso, o isomorfismo $\phi\colon B \to C^\circ$ define uma forma bilinear por $\langle b, c \rangle := \phi(b)(c)$, para todos $b \in B$ e $c \in C$. Pelo fato de ϕ ser morfismo de biálgebras, essa forma bilinear guarda certa compatibilidade com a estrutura de biálgebra de B e de C (as dadas por 1. a 4. na definição 2.9.1 abaixo).

Podemos generalizar essa noção considerando um cenário em que B e C° não são necessariamente isomorfos, mas são tais que existe uma forma bilinear definida em $B \otimes C$ satisfazendo algumas propriedades de compatibilidade. Escreveremos essa definição de dualidade entre duas biálgebras ou álgebras de Hopf, e logo em seguida, provaremos que no caso de se ter um isomorfismo $\phi\colon B \to C^\circ$, também recaímos nessa definição por meio da forma bilinear $\langle b, c\rangle := \phi(b)(c)$.

Definição 2.9.1. Duas biálgebras B e C estão em *dualidade* se existe uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon B \times C \to \mathbb{K}$ tal que dados $b, b' \in B$ e $c, c' \in C$, temos que:

1. $\langle b \cdot b', c\rangle = \langle b \otimes b', \Delta_C(c)\rangle$;
2. $\langle b, c \cdot c'\rangle = \langle \Delta_B(b), c \otimes c'\rangle$;
3. $\langle 1_B, c\rangle = \varepsilon_C(c)$;
4. $\langle b, 1_C\rangle = \varepsilon_B(b)$.

Em 1. e 2., a função bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon (B \otimes B) \times (C \otimes C) \to \mathbb{K}$ é dada por

$$\langle b \otimes b', c \otimes c'\rangle = \langle b, c\rangle \cdot \langle b', c'\rangle \ .$$

Veremos na observação 2.9.2 que essa função bilinear está bem definida.

Observação 2.9.2. A função $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon (B \otimes B) \times (C \otimes C) \to \mathbb{K}$ dada por

$$\langle b \otimes b', c \otimes c'\rangle = \langle b \cdot c\rangle \cdot \langle b', c'\rangle$$

está bem definida. De fato, considere $\phi_{c,c'}\colon B \times B \to \mathbb{K}$, para fixados $c, c' \in C$, dada por $\phi_{c,c'} = \langle b \cdot c\rangle \cdot \langle b', c'\rangle$. Temos que $\phi_{c,c'}$ é bilinear, portanto pela propriedade universal do produto tensorial, existe única $\overline{\phi_{c,c'}}\colon B \otimes B \to \mathbb{K}$ tal que $\overline{\phi_{c,c'}} \circ \pi = \phi_{c,c'}$. Defina $\phi\colon C \times C \to (B \otimes B)^*$ por $\phi(c, c') = \overline{\phi_{c,c'}}$. Temos que ϕ é bilinear, e aplicamos a propriedade universal do produto tensorial para obter $\overline{\phi}\colon C \otimes C \to (B \otimes B)^*$ dada por $\overline{\phi}(c \otimes c')(b \otimes b') = \langle b \cdot c\rangle \cdot \langle b', c'\rangle$. Por fim, definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon (B \otimes B) \times (C \otimes C) \to \mathbb{K}$ por $\langle b \otimes b', c \otimes c'\rangle = \overline{\phi}(c \otimes c')(b \otimes b')$.

Definição 2.9.3. Dizemos que a dualidade é *separante* se

(a) $\big(\ \forall c \in C,\ \langle b, c\rangle = 0\ \big) \implies b = 0$;

(b) $\big(\ \forall b \in B,\ \langle b, c\rangle = 0\ \big) \implies c = 0$.

No caso em que B e C são álgebras de Hopf, requeremos também uma compatibilidade entre as antípodas.

Definição 2.9.4. Sejam B e C duas álgebras de Hopf. Se B e C estão em dualidade como biálgebras, e se valer:

5. $\langle S_B(b), c\rangle = \langle b, S_C(c)\rangle$,

então dizemos que B *e* C *estão em dualidade como álgebras de Hopf.*

Veremos que a condição 5. é automaticamente satisfeita.

Proposição 2.9.5. *Dadas duas álgebras de Hopf* B *e* C*, se* B *e* C *estão em dualidade como biálgebras, então estão em dualidade como álgebras de Hopf.*

Demonstração. Primeiramente, note que as formas bilineares

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot\rangle &\colon B \times C \to \mathbb{K} \\ \langle S_B(\cdot), \cdot\rangle &\colon B \times C \to \mathbb{K} \\ \langle \cdot, S_C(\cdot)\rangle &\colon B \times C \to \mathbb{K} \end{aligned}$$

podem ser fatoradas a transformações lineares definidas no produto tensorial, pela propriedade universal. Sejam, respectivamente,

$$\begin{aligned} f &\colon B \otimes C \to \mathbb{K} & f(b \otimes c) &= \langle b, c\rangle \\ f_l &\colon B \otimes C \to \mathbb{K} & f_l(b \otimes c) &= \langle S_B(b), c\rangle \\ f_r &\colon B \otimes C \to \mathbb{K} & f_r(b \otimes c) &= \langle b, S_C(c)\rangle \end{aligned}$$

essas transformações lineares obtidas pela aplicação da propriedade universal.

Considere a álgebra de convolução $\mathrm{Hom}(B \otimes C, \mathbb{K}) = (B \otimes C)^*$. Mostraremos que tanto f_l como f_r são inversas de f nessa álgebra, e portanto, devem ser iguais.

(f_l é a inversa de f em $(B \otimes C)^*$:) De fato, para $b \in B$ e $c \in C$, temos:

$$\begin{aligned}
f_l * f(b \otimes c) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f_l \otimes f) \circ \Delta_{B\otimes C}(b \otimes c) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f_l \otimes f) \left(\sum_{b,c} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes c_{(2)} \right) \\
&= \sum_{b,c} f_l(b_{(1)} \otimes c_{(1)}) \cdot f(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_{b,c} \langle S_B(b_{(1)}), c_{(1)} \rangle \cdot \langle b_{(2)} \otimes c_{(2)} \rangle \\
&= \sum_{b,c} \left\langle S_B(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}, c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{b} \left\langle S_B(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}, \Delta_C(c) \right\rangle \\
&\overset{1.}{=} \left\langle \sum_{b} S_B(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}, c \right\rangle \\
&= \langle \varepsilon_B(b) 1_B, c \rangle = \varepsilon_B(b) \cdot \langle 1_B, c \rangle \\
&\overset{3.}{=} \varepsilon_B(b) \cdot \varepsilon_C(c) = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_C)(b \otimes c) \\
&= \varepsilon_{B\otimes C}(b \otimes c) = 1_{(B\otimes C)^*}(b \otimes c) \ , \\
f * f_l(b \otimes c) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes f_l) \circ \Delta_{B\otimes C}(b \otimes c) \\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (f \otimes f_l) \left(\sum_{b,c} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes c_{(2)} \right) \\
&= \sum_{b,c} f(b_{(1)} \otimes c_{(1)}) \cdot f_l(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_{b,c} \langle b_{(1)} \otimes c_{(1)} \rangle \cdot \langle S_B(b_{(2)}), c_{(2)} \rangle \\
&= \sum_{b,c} \left\langle b_{(1)} \otimes S_B(b_{(2)}), c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{b} \left\langle b_{(1)} \otimes S_B(b_{(2)}), \Delta_C(c) \right\rangle \\
&\overset{1.}{=} \left\langle \sum_{b} b_{(1)} \cdot S_B(b_{(2)}), c \right\rangle \\
&= \langle \varepsilon_B(b) 1_B, c \rangle = \varepsilon_B(b) \cdot \langle 1_B, c \rangle \\
&\overset{3.}{=} \varepsilon_B(b) \cdot \varepsilon_C(c) = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon_B \otimes \varepsilon_C)(b \otimes c) \\
&= \varepsilon_{B\otimes C}(b \otimes c) = 1_{(B\otimes C)^*}(b \otimes c) \ .
\end{aligned}$$

Assim vale $f_l * f = 1_{(B\otimes C)^*} = f * f_l$. Logo f_l é a inversa de f em $(B\otimes C)^*$.

(f_r é a inversa de f em $(B\otimes C)^*$:) Para $b\in B$ e $c\in C$, temos:

$$\begin{aligned}
f_r * f(b\otimes c) &= \mu_{\mathbb{K}}\circ(f_r\otimes f)\circ\Delta_{B\otimes C}(b\otimes c)\\
&= \mu_{\mathbb{K}}\circ(f_r\otimes f)\Bigg(\sum_{b,c} b_{(1)}\otimes c_{(1)}\otimes b_{(2)}\otimes c_{(2)}\Bigg)\\
&= \sum_{b,c} f_r(b_{(1)}\otimes c_{(1)})\cdot f(b_{(2)}\otimes c_{(2)})\\
&= \sum_{b,c}\langle b_{(1)}, S_C(c_{(1)})\rangle\cdot\langle b_{(2)}\otimes c_{(2)}\rangle\\
&= \sum_{b,c}\big\langle b_{(1)}\otimes b_{(2)}, S_C(c_{(1)})\otimes c_{(2)}\big\rangle\\
&= \sum_{c}\big\langle \Delta_B(b), S_C(c_{(1)})\otimes c_{(2)}\big\rangle\\
&\overset{2.}{=} \Big\langle b, \sum_c S_C(c_{(1)})\cdot c_{(2)}\Big\rangle\\
&= \langle b, \varepsilon_C(c)1_C\rangle = \langle b, 1_C\rangle\cdot\varepsilon_C(c)\\
&\overset{4.}{=} \varepsilon_B(b)\cdot\varepsilon_C(c) = \mu_{\mathbb{K}}\circ(\varepsilon_B\otimes\varepsilon_C)(b\otimes c)\\
&= \varepsilon_{B\otimes C}(b\otimes c) = 1_{(B\otimes C)^*}(b\otimes c)\ ,\\
f * f_r(b\otimes c) &= \mu_{\mathbb{K}}\circ(f\otimes f_r)\circ\Delta_{B\otimes C}(b\otimes c)\\
&= \mu_{\mathbb{K}}\circ(f\otimes f_r)\Bigg(\sum_{b,c} b_{(1)}\otimes c_{(1)}\otimes b_{(2)}\otimes c_{(2)}\Bigg)\\
&= \sum_{b,c} f(b_{(1)}\otimes c_{(1)})\cdot f_r(b_{(2)}\otimes c_{(2)})\\
&= \sum_{b,c}\langle b_{(1)}, c_{(1)}\rangle\cdot\langle b_{(2)}\otimes S_C(c_{(2)})\rangle\\
&= \sum_{b,c}\big\langle b_{(1)}\otimes b_{(2)}, c_{(1)}\otimes S_C(c_{(2)})\big\rangle\\
&= \sum_{c}\big\langle \Delta_B(b), c_{(1)}\otimes S_C(c_{(2)})\big\rangle\\
&\overset{2.}{=} \Big\langle b, \sum_c c_{(1)}\cdot S_C(c_{(2)})\Big\rangle\\
&= \langle b, \varepsilon_C(c)1_C\rangle = \langle b, 1_C\rangle\cdot\varepsilon_C(c)\\
&\overset{4.}{=} \varepsilon_B(b)\cdot\varepsilon_C(c) = \mu_{\mathbb{K}}\circ(\varepsilon_B\otimes\varepsilon_C)(b\otimes c)\\
&= \varepsilon_{B\otimes C}(b\otimes c) = 1_{(B\otimes C)^*}(b\otimes c)\ .
\end{aligned}$$

Logo $f_r * f = 1_{(B\otimes C)^*} = f * f_r$ e f_r é a inversa de f com relação ao produto de convolução em $(B \otimes C)^*$.

Dessa forma, f_r e f_l são inversas de f na álgebra de convolução $(B \otimes C)^*$. Portanto $f_l = f_r$, e temos:

$$\langle S_B(b), c\rangle = f_l(b \otimes c) = f_r(b \otimes c) = \langle b, S_C(c)\rangle \ , \quad \forall b \in B, \ \forall c \in C \ . \quad \square$$

Veremos que o conceito de dualidade desse capítulo engloba a dualidade usual, conforme comentamos no início desta seção.

Proposição 2.9.6. *Sejam B e C biálgebras. Suponha que exista $\phi\colon B \to C^\circ$ morfismo de biálgebras. então B e C estão em dualidade, no sentido da definição 2.9.1 acima (satisfazem 1. a 4.), com*

$$\langle b, c\rangle = \phi(b)(c) \ .$$

Isso também ocorre se B e C são álgebras de Hopf (também satisfazem 5.).

Demonstração. Por ϕ ser morfismo de biálgebras, as propriedades 1. a 4. valem, como veremos a seguir. No restante da demonstração, $b, b' \in B$ e $c, c' \in C$ são arbitrários.

Antes de prosseguir, vamos escrever como o par dual em $(B \otimes B) \times (C \otimes C)$ fica escrito em termos de ϕ:

$$\langle b \otimes b', c \otimes c'\rangle = \langle b, c\rangle \cdot \langle b', c'\rangle = \phi(b)(c) \cdot \phi(b')(c') \ .$$

1. Considere a igualdade $\phi \circ \mu_B = \mu_{C^\circ} \circ (\phi \otimes \phi)$. Temos que:

$$\big(\phi \circ \mu_B(b \otimes b')\big)(c) = \phi(b \cdot b')(c) = \langle b \cdot b', c\rangle$$

   e

$$\begin{aligned}
\big(\mu_{C^\circ} \circ (\phi \otimes \phi)(b \otimes b')\big)(c) &= \big(\Delta_C^* \circ \theta \circ (\phi \otimes \phi)(b \otimes b')\big)(c) \\
&= \Big(\Delta_C^*\big(\theta(\phi(b) \otimes \phi(b'))\big)\Big)(c) \\
&= \Big(\big(\theta(\phi(b) \otimes \phi(b'))\big) \circ \Delta_C\Big)(c) \\
&= \big(\theta(\phi(b) \otimes \phi(b'))\big)\left(\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}\right) \\
&= \sum_c \phi(b)(c_{(1)}) \cdot \phi(b')(c_{(2)}) \\
&= \sum_c \langle b, c_{(1)}\rangle \cdot \langle b', c_{(2)}\rangle \\
&= \langle b \otimes b', \Delta_c(c)\rangle \ .
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\langle b \cdot b', c\rangle = \langle b \otimes b', \Delta_c(c)\rangle$.

2. Sabemos que vale $\Delta_{c^\circ} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_B$. Então

$$\theta \circ \Delta_{C^\circ} \circ \phi = \theta \circ (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_B \ ,$$

e portanto:

$$\begin{aligned}\big(\theta \circ \Delta_{C^\circ} \circ \phi(b)\big)(c \otimes c') &= \big(\mu_C^* \circ \phi(b)\big)(c \otimes c') \\ &= \big(\phi(b) \circ \mu_C\big)(c \otimes c') \\ &= \phi(b)(c \cdot c') \\ &= \langle b, c \cdot c'\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\big(\theta \circ (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_B(b)\big)(c \otimes c') &= \left(\sum_b \theta\big(\phi(b_{(1)}) \otimes \phi(b_{(2)})\big)\right)(c \otimes c') \\ &= \sum_b \phi(b_{(1)})(c) \cdot \phi(b_{(2)})(c') \\ &= \sum_b \langle b_{(1)}, c\rangle \cdot \langle b_{(2)}, c'\rangle \\ &= \langle \Delta_B(b), c \otimes c'\rangle \ .\end{aligned}$$

Logo $\langle b, c \cdot c'\rangle = \langle \Delta_B(b), c \otimes c'\rangle$.

3. Como $\phi \circ \eta_B = \eta_{c^\circ}$, temos

$$\big(\phi \circ \eta_B(1_{\mathbb{K}})\big)(c) = \phi(1_B)(c) = \langle 1_B, c\rangle$$

e

$$\begin{aligned}\big(\eta_{C^\circ}(1_{\mathbb{K}})\big)(c) &= \big(\varepsilon_C^* \circ \xi(1_{\mathbb{K}})\big)(c) \\ &= \big(\xi(1_{\mathbb{K}}) \circ \varepsilon_C\big)(c) \\ &= 1_{\mathbb{K}} \cdot \varepsilon_C(c) = \varepsilon_C(c) \ .\end{aligned}$$

Logo $\langle 1_B, c\rangle = \varepsilon_C(c)$.

4. Usamos a igualdade $\varepsilon_{C^\circ} \circ \phi = \varepsilon_B$ e obtemos

$$\xi \circ \varepsilon_{C^\circ} \circ \phi = \xi \circ \varepsilon_B \ .$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}\big(\xi \circ \varepsilon_{C^\circ} \circ \phi(b)\big)(1_{\mathbb{K}}) &= \big(\eta_C^* \circ \phi(b)\big)(1_{\mathbb{K}}) \\ &= \big(\phi(b) \circ \eta_C\big)(1_{\mathbb{K}}) \\ &= \phi(b)(1_C) \\ &= \langle b, 1_C \rangle\end{aligned}$$

e

$$\big(\xi \circ \varepsilon_B(b)\big)(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \cdot \varepsilon_B(b) = \varepsilon_B(b) \ .$$

Então, temos $\langle b, 1_C \rangle = \varepsilon_B(b)$.

Se B e C são álgebras de Hopf, pela proposição 2.9.5, temos que a propriedade 5. é automaticamente satisfeita. Também podemos mostrá-la diretamente. Sabemos da proposição 2.3.5 que ϕ é morfismo de álgebras de Hopf. Então, a propriedade 5. fica:

5. Sabemos que $S_{C^\circ} \circ \phi = \phi \circ S_B$ e que $S_{C^\circ} = S_C^*$. Então:

$$\begin{aligned}\big(S_{C^\circ} \circ \phi(b)\big)(c) &= \big(S_C^* \circ \phi(b)\big)(c) \\ &= \big(\phi(b) \circ S_C\big)(c) \\ &= \phi(b)(S_C(c)) \\ &= \langle b, S_C(c) \rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\big(\phi \circ S_B(b)\big)(c) &= \phi(S_B(b))(c) \\ &= \langle S_B(b), c \rangle \ .\end{aligned}$$

Logo $\langle b, S_C(c) \rangle = \langle S_B(b), c \rangle$.

□

No caso de uma forma bilinear qualquer fornecer uma dualidade entre as biálgebras B e C, temos o seguinte:

Proposição 2.9.7. *Sejam B, C biálgebras. Assumimos que B e C estão em dualidade, com par dual $\langle , \rangle$. Considere as aplicações:*

$$\begin{aligned}\phi_l &: B \to C^* \\ \phi_r &: C \to B^*\end{aligned}$$

dadas, para $b \in B$ e $c \in C$, por

$$\phi_l(b) = \langle b, \cdot \rangle$$
$$\phi_r(c) = \langle \cdot, c \rangle \ .$$

Então:

1. *ϕ_l e ϕ_r são morfismos de álgebras.*

2. *Se a dualidade for separante, então os morfismos ϕ_l e ϕ_r são injetivos.*

3. *Se B^* e C^* são biálgebras*[6] *, então ϕ_l e ϕ_r também são morfismos de coálgebras.*

Demonstração.

1. Em consequência da bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que ϕ_l e ϕ_r são transformações lineares.

   Sejam $b, b' \in B$ e $c, c' \in C$. Então:

$$\begin{aligned}
\phi_l(b) * \phi_l(b')(c) &= \sum_c \phi_l(b)(c_{(1)}) \cdot \phi_l(b')(c_{(2)}) \\
&= \sum_c \langle b, c_{(1)} \rangle \cdot \langle b', c_{(2)} \rangle \\
&= \sum_c \langle b \otimes b', c_{(1)} \otimes c_{(2)} \rangle \\
&= \langle b \otimes b', \Delta_C(c) \rangle \\
&= \langle b \cdot b', c \rangle \\
&= \phi_l(b \cdot b')(c) \ ,
\end{aligned}$$

[6] Isto é, quando os morfismos canônicos $\theta_B : B^* \otimes B^* \to (B \otimes B)^*$ e $\theta_C : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ são isomorfismos, e podemos definir as estruturas de biálgebra por

$$\begin{aligned}
\mu_{B^*} &= \Delta_B^* \circ \theta_B & \Delta_{B^*} &= \theta_B^{-1} \circ \mu_B^* \\
\eta_{B^*} &= \varepsilon_B^* \circ \xi & \varepsilon_{B^*} &= \xi^{-1} \circ \eta_B^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{C^*} &= \Delta_C^* \circ \theta_C & \Delta_{C^*} &= \theta_C^{-1} \circ \mu_C^* \\
\eta_{C^*} &= \varepsilon_C^* \circ \xi & \varepsilon_{C^*} &= \xi^{-1} \circ \eta_C^*
\end{aligned}$$

Por exemplo, quando B e C são de dimensão finita.

$$\begin{aligned}\phi_r(c) * \phi_r(c')(b) &= \sum_b \phi_r(c)(b_{(1)}) \cdot \phi_r(c')(b_{(2)}) \\ &= \sum_b \langle b_{(1)}, c\rangle \cdot \langle b_{(2)}, c'\rangle \\ &= \sum_b \langle b_{(1)} \otimes b_{(2)}, c \otimes c'\rangle \\ &= \langle \Delta_B(b), c \otimes c'\rangle \\ &= \langle b, c \cdot c'\rangle \\ &= \phi_l(c \cdot c')(b) \ .\end{aligned}$$

Portanto $\phi_l(b \cdot b') = \phi_l(b) * \phi_l(b')$ e $\phi_r(c \cdot c') = \phi_r(c) * \phi_r(c')$. Além disso,

$$\begin{aligned}\phi_l(1_B)(c) &= \langle 1_B, c\rangle = \varepsilon_C(c) \\ \phi_r(1_C)(b) &= \langle b, 1_C\rangle = \varepsilon_B(b) \ ,\end{aligned}$$

e desse modo, $\phi_l(1_B) = \varepsilon_C = 1_{C^*}$ e $\phi_r(1_C) = \varepsilon_B = 1_{B^*}$.

2. Sejam $b \in \ker(\phi_l)$ e $c \in \ker(\phi_r)$. Então

$$\begin{aligned}\phi_l(b) = 0 &\implies \langle b, c'\rangle = 0 \ \forall c' \in C \implies b = 0 \\ \phi_r(c) = 0 &\implies \langle b', c\rangle = 0 \ \forall b' \in B \implies c = 0 \ ,\end{aligned}$$

logo ϕ_l e ϕ_r são injetivas se a dualidade é separante.

3. Suponha que B^* e C^* são biálgebras, com a estrutura usual. Os morfismos canônicos $\theta_B \colon B^* \otimes B^* \to (B \otimes B)^*$ e $\theta_C \colon C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ são isomorfismos. Também usaremos o isomorfismo $\xi \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$ dado por $\xi(\lambda) = \mathrm{mult}_\lambda$ e $\xi^{-1}(f) = f(1_{\mathbb{K}})$.

(ϕ_l é morfismo de coálgebras:) Mostramos que ϕ_l preserva o coproduto. Seja $b \in B$. Temos que, para todos $c, c' \in C$:

$$\begin{aligned}&\big(\mu_C^*(\phi_l(b))\big)(c \otimes c') \\ &\quad = \big(\phi_l(b) \circ \mu_C\big)(c \otimes c') \\ &\quad = \phi_l(b)(c \cdot c') \\ &\quad = \langle b, c \cdot c'\rangle \ ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\big(\theta_C((\phi_l\otimes\phi_l)\circ\Delta_B(b))\big)(c\otimes c')\\
&\qquad=\left(\sum_b \theta_C\big(\phi_l(b_{(1)})\otimes\phi_l(b_{(2)})\big)\right)(c\otimes c')\\
&\qquad=\sum_b \phi_l(b_{(1)})(c)\cdot\phi_l(b_{(2)})(c')\\
&\qquad=\sum_b \langle b_{(1)},c\rangle\cdot\langle b_{(2)},c'\rangle\\
&\qquad=\langle\Delta_B(b),c\otimes c'\rangle\\
&\qquad\overset{2.}{=}\langle b,c\cdot c'\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Logo ${\mu_C}^*(\phi_l(b))=\theta_C((\phi_l\otimes\phi_l)\circ\Delta_B(b)$, e aplicando ${\theta_C}^{-1}$, temos

$$\Delta_{C^*}\circ\phi_l(b)={\theta_C}^{-1}({\mu_C}^*(\phi_l(b))=(\phi_l\otimes\phi_l)\circ\Delta_B(b)$$

para todo $b\in B$. Portanto $\Delta_{C^*}\circ\phi_l=(\phi_l\otimes\phi_l)\circ\Delta_B$. Mostramos que ϕ_l preserva a counidade: Seja $b\in B$. Vale que:

$$
\begin{aligned}
\big({\eta_C}^*(\phi_l(b))\big)(\lambda)&=\phi_l(b)\big(\eta_C(\lambda)\big)\\
&=\phi_l(b)(\lambda 1_C)\\
&=\lambda\ \langle b,1_C\rangle\\
&\overset{4.}{=}\lambda\ \varepsilon_B(b)\\
&=\big(\xi(\varepsilon_B(b))\big)(\lambda)
\end{aligned}
$$

para todo $\lambda\in\mathbb{K}$. Portanto ${\eta_C}^*(\phi_l(b))=\xi(\varepsilon_B(b))$, e passando ξ^{-1} dos dois lados, ficamos com $\varepsilon_{C^*}\circ\phi_l(b)=\xi^{-1}\circ{\eta_C}^*(\phi_l(b))=\varepsilon_B(b)$ e então, $\varepsilon_{C^*}\circ\phi_l=\varepsilon_B$. Desse modo, ϕ_l é um morfismo de coálgebras.

(ϕ_r é morfismo de coálgebras:) Mostramos que ϕ_r preserva o coproduto: Seja $c\in C$. Temos que, para todos $b,b'\in B$:

$$
\begin{aligned}
&\big({\mu_B}^*(\phi_r(c))\big)(b\otimes b')\\
&\qquad=\big(\phi_r(c)\circ\mu_C\big)(b\otimes b')\\
&\qquad=\phi_r(c)(b\cdot b')\\
&\qquad=\langle b\cdot b',c\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\big(\theta_B((\phi_r \otimes \phi_r) \circ \Delta_C(c))\big)(b \otimes b') \\
&= \left(\sum_b \theta_B\big(\phi_r(c_{(1)}) \otimes \phi_r(c_{(2)})\big) \right) (b \otimes b') \\
&= \sum_c \phi_r(c_{(1)})(b) \cdot \phi_r(c_{(2)})(b') \\
&= \sum_c \langle b, c_{(1)} \rangle \cdot \langle b', c_{(2)} \rangle \\
&= \langle b \otimes b', \Delta_C(c) \rangle \\
&\overset{1.}{=} \langle b \cdot b', c \rangle \ .
\end{aligned}
$$

Obtemos, então, que ${\mu_B}^* \circ \phi_r(c) = \theta_B((\phi_r \otimes \phi_r) \circ \Delta_C(c)$, e aplicando ${\theta_B}^{-1}$, temos

$$
\Delta_{B^*} \circ \phi_r(c) = {\theta_B}^{-1} \circ {\mu_C}^*(\phi_l(b)) = (\phi_r \otimes \phi_r) \circ \Delta_C(c)
$$

para todo $c \in C$. Logo $\Delta_{B^*} \circ \phi_r = (\phi_r \otimes \phi_r) \circ \Delta_C$.

Mostrando que ϕ_r preserva a counidade: Seja $c \in C$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\big({\eta_B}^*(\phi_r(c))\big)(\lambda) &= \phi_r(c)\big(\eta_B(\lambda)\big) \\
&= \phi_r(c)(\lambda 1_B) \\
&= \lambda \ \langle 1_B, c \rangle \\
&\overset{3.}{=} \lambda \ \varepsilon_C(c) \\
&= \big(\xi(\varepsilon_C(c))\big)(\lambda)
\end{aligned}
$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Portanto ${\eta_B}^*(\phi_r(c)) = \xi(\varepsilon_C(c))$, e passando ξ^{-1} dos dois lados, obtemos $\varepsilon_{B^*} \circ \phi_r(c) = \xi^{-1} \circ {\eta_B}^*(\phi_r(c)) = \varepsilon_C(c)$ e $\varepsilon_{B^*} \circ \phi_r = \varepsilon_C$.

Assim, obtemos que ϕ_r é um morfismo de coálgebras. $\square$

Capítulo 3

Álgebras de Lie e envoltório universal

Nesta seção veremos alguns elementos da teoria de álgebras de Lie, com ênfase no que será necessário nos próximos capítulos deste trabalho. Abordaremos principalmente a relação entre as álgebras de Lie e as álgebras associativas e biálgebras. Por exemplo, na seção 3.1.7 daremos estrutura de álgebra de Lie para uma álgebra associativa qualquer, em 3.1.8 veremos que um certo subconjunto de elementos (chamados primitivos) de uma biálgebra são uma álgebra de Lie. Adicionalmente, na 3.2, veremos que uma álgebra de Lie pode ser imersa numa álgebra associativa e, na verdade, Hopf, conforme 2.2.4.

Com os objetivos deste trabalho em vista, omitimos o estudo de álgebras de Lie semissimples, split semissimples, solúveis, nilpotentes, ou o critério de Cartan. Também não fora abordado o estudo de grupos de Lie e sua relação com as álgebras de Lie. Estes podem ser encontrados em vários livros clássicos de álgebras de Lie, dentre os quais citamos [6] e [7].

3.1 Álgebras de Lie

3.1.1 Definição e exemplos

A definição de álgebra de Lie é motivada, principalmente, pelos chamados *grupos de Lie*, que são grupos com estrutura adicional de variedade, e em que as operações de grupo (o produto e a inversão) são operações contínuas. As álgebras de Lie surgem nessa situação como o espaço tangente ao elemento e do grupo.

Definição 3.1.1. Uma *Álgebra de Lie* é um par $(\mathfrak{g}, [,])$ em que:

1. $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial;

2. $[,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma operação bilinear, o *colchete de Lie*, ou *comutador*, que satisfaz:

    2. (a) "Antissimetria fraca": $[x, x] = 0 \ , \quad \forall x \in \mathfrak{g} \ .$

    2. (b) Identidade de Jacobi: $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0 \ , \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \ .$

A identidade de Jacobi, a primeira vista, não parece ter um papel bem claro. Entretanto, será muito importante da demonstração do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt (teorema 3.3.1) referente a recobrimentos de álgebras de Lie, que serão estudados depois.

Observação 3.1.2. A condição de "antissimetria fraca" $[x, x] = 0$ garante a condição abaixo:

2. (c) Antissimetria: $[x, y] = -[y, x] \ , \quad \forall x \in \mathfrak{g} \ .$

De fato, dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] \ ,$$

portanto vale a condição de antissimetria.

Observação 3.1.3. Quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica diferente de 2, a condição $[x, x] = 0$ é equivalente à antissimetria. De fato, se vale a antissimetria, então $0 = [x, x] + [x, x] = 2[x, x]$, e se a a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, temos $[x, x] = 0$.

Observação 3.1.4. A álgebra de Lie é uma álgebra *não associativa* em geral.

Veremos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 3.1.5 (Álgebras de Lie abelianas)**.** Qualquer espaço vetorial V munido de um colchete de Lie nulo $[u, v] := 0$ para todos $u, v \in V$ é uma álgebra de Lie. Nesse caso, essas álgebras são chamadas de *abelianas*. Essa álgebra de Lie é associativa.

Exemplo 3.1.6 (Álgebra das matrizes $M_n = \mathfrak{gl}_n$)**.** A álgebra das matrizes M_n é uma álgebra de Lie, com colchete dado pelo comutador $[A, B] := AB - BA$, para todos $A, B \in M_n$. Na seção 3.1.7 a seguir, veremos que qualquer álgebra associativa tem estrutura de álgebra de Lie de maneira análoga a esse exemplo. A álgebra de matrizes, vista como álgebra de Lie, é denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ ou mais simplesmente por $\mathfrak{gl}_n$.

Exemplo 3.1.7 (Álgebra geral linear $\mathfrak{gl}(V)$)**.** Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. A álgebra dos endomorfismos $\mathrm{End}(V)$ tem estrutura de álgebra de Lie dada pelo comutador

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f \ , \quad \forall f, g \in \mathrm{End}(V) \ ,$$

como no caso da álgebra das matrizes. Munido desse colchete, denotamos $\mathrm{End}(V)$ por $\mathfrak{gl}(V)$, e a chamamos de *álgebra geral linear.*

3.1.2 Subálgebra de Lie, ideal de Lie e morfismos

Nesta seção definimos subálgebras, ideais e morfismos de Lie. Expomos também algumas propriedades básicas dessas estruturas.

Definição 3.1.8. Uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ é um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete. Ou seja, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie por si só, com o comutador herdado da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Exemplo 3.1.9. $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$ são subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$. São chamadas subálgebras *triviais.* Qualquer outra subálgebra de Lie que não for trivial é chamada de *própria.*

Exemplo 3.1.10. O subespaço

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \sum_i [x_i, y_i] \colon x_i, y_i \in \mathfrak{g} \right\}$$

é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, chamada *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.

De fato, devemos checar se $\big[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big]$ está contido em $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Mas isso segue de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$. Portanto $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Definição 3.1.11. Um *ideal de Lie* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço $I \subseteq \mathfrak{g}$ tal que

1. $[I, \mathfrak{g}] \subseteq I$;
2. $[\mathfrak{g}, I] \subseteq I$.

Os dois itens são equivalentes devido à antissimetria 2.(c), que vale em toda álgebra de Lie.

Exemplo 3.1.12. O subespaço

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \colon [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$, chamado de *centro* de $\mathfrak{g}$.

A prova é a seguinte. Dados finitos $x_i \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ e $y_i \in \mathfrak{g}$, temos

$$\sum_i [x_i, y_i] = \sum_i 0 = 0 \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \ .$$

Portanto $\big[\mathrm{Z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}\big] \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ e $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ é um ideal de Lie de $\mathfrak{g}$.

Proposição 3.1.13. *Se I e J são dois ideais de $\mathfrak{g}$, então*

$$I + J = \{x + y \colon x \in I, y \in J\}$$
$$[I, J] = \left\{ \sum_i [x_i, y_i] \colon x_i \in I, y_i \in J \right\}$$

são ideais de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Sabemos que $I + J$ e $[I, J]$ são subespaços de $\mathfrak{g}$. Devemos mostrar, então, que $[I + J, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ e que $\big[[I, J], \mathfrak{g}\big] \subseteq \mathfrak{g}$.

Temos que $I + J$ é fechado em relação ao colchete de Lie pois dados $x \in I$, $y \in J$ e $z \in \mathfrak{g}$, temos

$$[x + y, z] = \underbrace{[x, z]}_{\in I} + \underbrace{[y, z]}_{\in J} \in I + J \ .$$

Também $[I, J]$ é fechado em relação ao colchete pois dados $x \in I$, $y \in J$ e $z \in \mathfrak{g}$, temos, pela propriedade de Jacobi, que

$$\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0 \ ,$$

portanto

$$\begin{aligned}\big[[x,y],z\big] &= -\big[[z,x],y\big] - \big[[y,z],x\big] \\ &= \big[\underbrace{[x,z]}_{\in I}, \underbrace{y}_{\in J}\big] + \big[\underbrace{x}_{\in I}, \underbrace{[y,z]}_{\in J}\big] \\ &\in [I,J] \ .\end{aligned}$$

□

Definição 3.1.14. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas álgebras de Lie. Uma transformação linear $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é um *morfismo de álgebras de Lie* se for compatível com o comutador, isto é, dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \ .$$

É costumeiro denotar os dois colchetes, os de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$, pelo mesmo símbolo $[,]$, quando não há confusão.

A proposição abaixo relaciona morfismos de álgebras de Lie com ideais e subálgebras de Lie.

Proposição 3.1.15. *Seja $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um morfismo de álgebras de Lie. Então:*

1. $\ker(\varphi)$ *é um ideal de Lie de* $\mathfrak{g}$*.*
2. $\mathrm{Im}(\varphi)$ *é uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{h}$*.*

Demonstração.

1. Sabemos que $\ker(\varphi)$ é subespaço de $\mathfrak{g}$. Além disso, dados $x \in \ker(\varphi)$ e $y \in \mathfrak{g}$, temos $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [0, \varphi(y)] = 0$,e portanto $[x,y] \in \ker(\varphi)$. Assim, $\ker(\varphi)$ é um ideal de Lie de $\mathfrak{g}$.

2. Resta mostrar que é fechado em relação ao comutador. Sejam os elementos $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathrm{Im}\varphi$. Temos $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y]) \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Portanto $\mathrm{Im}(\varphi)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$.

□

3.1.3 Exemplos clássicos de álgebras de Lie

Vamos a alguns exemplos de álgebras de Lie clássicas, que são certas subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$ $(= \mathrm{End}(V))$ com V espaço vetorial de dimensão finita. A denominação "clássica" se dá pelo vínculo que estas têm com os chamados grupos de Lie clássicos. Neste trabalho, no entanto, nos restringimos apenas às álgebras de Lie, sem abordar sua relação com grupos de Lie.

Exemplo 3.1.16 (Álgebra especial linear $\mathfrak{sl}(V)$)**.** Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Considere o conjunto de endomorfismos de $\mathfrak{gl}(V)$ com traço[1] nulo. Estes formam uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, denotada por $\mathfrak{sl}(V)$, e chamada de *álgebra especial linear*. Vejamos que $\mathfrak{sl}(V)$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Dados $a, b \in \mathfrak{sl}(V)$, temos $\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(b) = 0$. Então

$$\mathrm{Tr}([a,b]) = \mathrm{Tr}(a \circ b - b \circ a) = \mathrm{Tr}(a \circ b) - \mathrm{Tr}(b \circ a) = 0 \ ,$$

onde usamos as propriedades do traço[1]

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x \circ y) &= \mathrm{Tr}(y \circ x)\\ \mathrm{Tr}(x + \lambda y) &= \mathrm{Tr}(x) + \lambda \mathrm{Tr}(y) \ , \quad \forall x, y \in \mathrm{End}(V) \ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \ .\end{aligned}$$

Portanto $\mathfrak{sl}(V)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Exemplo 3.1.17 (Subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$ geradas por uma forma bilinear)**.** Seja V espaço de dimensão finita, e seja $f\colon V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear em V. Seja X_f o subespaço de $\mathrm{End}(V)$ definido por

$$X_f = \{x \in \mathrm{End}(V) \colon \ f(x(u), v) + f(u, x(v)) = 0\} \ .$$

Vamos mostrar que X_f é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$. De fato, dados $x, y \in X_f$, temos:

$$\begin{aligned} f\Big([x,y](u), v\Big) &= f\Big(x(y(u)) - y(x(u)), v\Big)\\ &= f\big(x(y(u)), v\big) - f\big(y(x(u)), v\big)\\ &= -f\big(y(u), x(v)\big) + f\big(x(u), y(v)\big)\\ &= f\big(u, y(x(v))\big) - f\big(u, x(y(v))\big)\\ &= -f\Big(u, x(y(v)) - y(x(v))\Big)\\ &= -f\Big((u, [x,y](v)\Big) \ . \end{aligned}$$

Portanto $[x, y] \in X_f$, e X_f é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

[1] Lembramos que o traço de um endomorfismo x é o traço da matriz da transformação linear em uma certa base. Mostra-se que o traço independe da base. As propriedades

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x \circ y) &= \mathrm{Tr}(y \circ x)\\ \mathrm{Tr}(x + \lambda y) &= \mathrm{Tr}(x) + \lambda \mathrm{Tr}(y) \ , \quad \forall x, y \in \mathrm{End}(V) \ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

se mostram por cálculo direto com matrizes.

Exemplo 3.1.18 (Álgebra ortogonal $\mathfrak{o}(V)$)**.** A álgebra ortogonal é definida de maneira diferente para espaços V de dimensão par ou ímpar. Mas nos dois casos, a definimos por meio de uma forma bilinear, como no exemplo anterior 3.1.17.

O nome "ortogonal" aparece porque essa é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie ortogonal $\mathrm{O}(V)$, o grupo das transformações lineares de V em V com determinante igual a ± 1.

(dim(V) ímpar:) Seja V espaço vetorial de dimensão $2l+1$, $l \in \mathbb{N}^*$, e base $\{e_1 \dots e_{2l+1}\}$. A *álgebra ortogonal* $\mathfrak{o}(V)$ é a subálgebra de Lie X_f de $\mathfrak{gl}(V)$ obtida pela forma bilinear e simétrica f, que é definida pela matriz $2l+1 \times 2l+1$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_l \\ 0 & \mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} .$$

Explicitando a forma f, sejam $u, v \in V$ escritos na base como

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u' \\ u'' \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v' \\ v'' \end{bmatrix} ,$$

em que $u', u'', v', v'' \in \mathbb{K}^l$ (o produto cartesiano de l cópias de $\mathbb{K}$). Escrevendo com uma notação análoga a do $\mathbb{R}^l$, temos

$$f(u,v) = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_l \\ 0 & \mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} v = u_1 v_1 + u' \cdot v'' + u'' \cdot v' .$$

A notação acima imita a do produto interno em $\mathbb{R}^l$, ou seja:

$$u' \cdot v'' = (u')^t \, v''$$
$$u'' \cdot v' = (u'')^t \, v' .$$

(dim(V) par:) Seja V espaço vetorial de dimensão $2l$, $l \in \mathbb{N}^*$, e base $\{e_1 \dots e_{2l}\}$. A *álgebra ortogonal* $\mathfrak{o}(V)$ é a subálgebra de Lie X_f de $\mathfrak{gl}(V)$ obtida pela forma bilinear e simétrica f, definida por

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_l \\ \mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} .$$

Explicitando a forma f, sejam $u, v \in V$, escritos na base como

$$u = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} ,$$

em que $u', u'', v', v'' \in \mathbb{K}^l$ (o produto cartesiano de l cópias de $\mathbb{K}$). Escrevendo com uma notação análoga a do $\mathbb{R}^l$, temos

$$f(u,v) = u^t \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_l \\ \mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} v = u' \cdot v'' + u'' \cdot v' .$$

A notação acima imita a do produto interno em $\mathbb{R}^l$:

$$u' \cdot v'' = (u')^t \, v''$$
$$u'' \cdot v' = (u'')^t \, v' \; .$$

Exemplo 3.1.19 (Álgebra simplética $\mathfrak{sp}(V)$)**.** Considere um espaço vetorial V de dimensão par $2l$, $l \in \mathbb{N}^*$, e base $\{e_1 \dots e_{2l}\}$. A *álgebra simplética* $\mathfrak{sp}(V)$ é a subálgebra de Lie X_f de $\mathfrak{gl}(V)$ obtida pela forma bilinear e simétrica f, que é definida por

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_l \\ -\mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Ou seja, dados $u, v \in V$, escritos na base como

$$u = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v' \\ v'' \end{bmatrix} \; ,$$

com $u', u'', v', v'' \in \mathbb{K}^l$, temos

$$f(u, v) = u^t \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_l \\ -\mathrm{Id}_l & 0 \end{pmatrix} v = u' \cdot v'' - u'' \cdot v' \; .$$

3.1.4 Álgebra de Lie oposta

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, com produto $[,]$. Se tentarmos definir um outro produto $[,]_{\mathrm{op}}$ invertendo a ordem dos operandos, obtemos a *álgebra de Lie oposta*, denotada por $\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$. Temos, então, para todos $a, b \in \mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$,

$$[a, b]_{\mathrm{op}} = [b, a] = -[a, b] \; ,$$

e, na verdade, $[,]_{\mathrm{op}} = -[,]$ (note que numa álgebra de Lie sempre vale a condição de antissimetria, como visto na observação 3.1.2). É fácil ver que o comutador oposto satisfaz as relações requeridas numa álgebra de Lie.

As álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$ são isomorfas, via o isomorfismo de Lie $\omega \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{op}}$ dado por $\omega(a) = -a$. De fato, ω é bijeção linear e é morfismo de álgebras de Lie, pois

$$[\omega(a), \omega(b)]_{\mathrm{op}} = [-a, -b]_{\mathrm{op}} = -[a, b] = \omega([a, b]) \; ,$$

3.1.5 Álgebra de Lie da soma direta

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie. Consideremos a soma direta $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Podemos dar uma estrutura de álgebra de Lie a essa soma direta definindo o comutador entrada a entrada:

$$[(a,u),(b,v)]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}} = \big([a,b]_{\mathfrak{g}}, [u,v]_{\mathfrak{h}}\big)$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$, $u, v \in \mathfrak{h}$. As condições de antissimetria e identidade de Jacobi são satisfeitas para $[,]_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}}$, pois são satisfeitas pelas duas entradas, como veremos. Omitiremos os índices nos comutadores abaixo para simplificar a notação. Temos, para todos $a, b \in \mathfrak{g}$ e $u, v, w \in \mathfrak{h}$, que

$$[(a,u),(a,u)] = \big([a,a],[u,u]\big) = (0,0) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
&\big[(a,u),[(b,v),(c,w)]\big] + \big[(b,v),[(c,w),(a,u)]\big] + \big[(c,w),[(a,u),(b,v)]\big] \\
&= \big[(a,u),\big([b,c],[v,w]\big)\big] + \big[(b,v),\big([c,a],[w,u]\big)\big] + \big[(c,w),\big([a,b],[u,v]\big)\big] \\
&= \Big(\big[a,[b,c]\big]\,,\,\big[u,[v,w]\big]\Big) + \Big(\big[b,[c,a]\big]\,,\,\big[v,[w,u]\big]\Big) + \Big(\big[c,[a,b]\big]\,,\big[w,[u,v]\big]\Big) \\
&= \Big(\big[a,[b,c]\big] + \big[b,[c,a]\big] + \big[c,[a,b]\big]\ ,\ \big[u,[v,w]\big] + \big[v,[w,u]\big] + \big[w,[u,v]\big]\Big) \\
&= (0,0) = 0\ .
\end{aligned}$$

3.1.6 Álgebra de Lie quociente

A partir de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e de um ideal $I \subseteq \mathfrak{g}$ podemos dar uma estrutura de álgebra de Lie para o quociente $\frac{\mathfrak{g}}{I}$.

Proposição 3.1.20. *Sejam $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $I \subseteq \mathfrak{g}$ ideal de Lie e $\pi\colon \mathfrak{g} \to \frac{\mathfrak{g}}{I}$ a projeção canônica. Então existe uma única estrutura de álgebra de Lie para $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ tal que a projeção canônica é um morfismo de álgebras de Lie. Essa estrutura é dada por*

$$[\bar{a},\bar{b}] = \overline{[a,b]}\ , \quad \forall a,b \in \mathfrak{g}$$

Demonstração.
(Definição do colchete de Lie em $\frac{\mathfrak{g}}{I}$:)

Sabemos que $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

O colchete está bem definido, pois dados $a, b \in \mathfrak{g}$ tais que $\bar{a} = \bar{a'}$ e $\bar{b} = \bar{b'}$, temos

$$\begin{aligned} a - a' &=: u \in I \\ b - b' &=: v \in I \ , \end{aligned}$$

portanto, como I é ideal de Lie,

$$\begin{aligned} [a,b] - [a',b'] &= [a' + u, b' + v] - [a',b'] \\ &= [a',b'] + [a',v] + [u,b'] + u,v] - [a',b'] \\ &= [a',v] + [u,b'] + [u,v] \in I \ . \end{aligned}$$

O colchete em $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ é, claramente, bilinear, e satisfaz a antissimetria e a identidade de Jacobi, já que o colchete em $\mathfrak{g}$ satisfaz tudo isso. Assim $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ é uma álgebra de Lie. Além disso, a projeção π é homomorfismo de álgebras de Lie, pois $\pi([a,b]) = \overline{[a,b]} = [\bar{a}, \bar{b}] = [\pi(a), \pi(b)]$ para todos $a, b \in \mathfrak{g}$.

(π é um morfismo de álgebras de Lie:)

De fato, por definição do comutador em $\frac{\mathfrak{g}}{I}$, temos para todos $a, b \in \mathfrak{g}$, que

$$\pi\big([a,b]\big) = \overline{[a,b]} = [\overline{a}, \overline{b}] = \big[\pi(a), \pi(b)\big] \ .$$

(Unicidade da estrutura de álgebra de Lie em $\frac{\mathfrak{g}}{I}$:)

Seja $[,]'$ outro colchete de Lie em $\frac{\mathfrak{g}}{I}$ tal que para todos $a, b \in \mathfrak{g}$,

$$[\overline{a}, \overline{b}]' = \overline{[a,b]} \ .$$

Então temos

$$[\overline{a}, \overline{b}]' = \overline{[a,b]} = [\overline{a}, \overline{b}] \ ,$$

portanto $[,]' = [,]$. $\square$

Proposição 3.1.21. *Sejam* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *duas álgebras de Lie,* $I \subseteq \mathfrak{g}$ *ideal e* $\pi \colon \mathfrak{g} \to \frac{\mathfrak{g}}{I}$ *a projeção canônica. Se* $f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é um morfismo de álgebras de Lie com* $I \subseteq \ker(f)$*, então existe um único morfismo de álgebras de Lie* $\overline{f} \colon \frac{\mathfrak{g}}{I} \to \mathfrak{h}$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "\pi"'] & & \mathfrak{h} \\ & & \frac{\mathfrak{g}}{I} \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ \pi = f \ .$$

Demonstração. Faça

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \tfrac{\mathfrak{g}}{I} &\to \mathfrak{h} \\ \overline{a} &\mapsto f(a)\ . \end{aligned}$$

Como $I \subseteq \ker(f)$, $\overline{f}$ está bem definida:

$$\begin{aligned} \overline{a} = \overline{b} &\implies a - b \in I \subseteq \ker(f) \implies f(a-b) = 0 \\ &\implies f(a) = f(b) \implies \overline{f}(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{b})\ . \end{aligned}$$

Além disso, $\overline{f}$ é morfismo de álgebras de Lie (decorre de f ser morfismo, e da estrutura de álgebra de Lie no quociente). E por construção, temos $\overline{f} \circ \pi = f$.

Resta apenas verificar a unicidade da $\overline{f}$. Se $\overline{g}\colon \frac{\mathfrak{g}}{I} \to \mathfrak{h}$ for outro morfismo de álgebras de Lie com $\overline{g} \circ \pi = f$, então

$$\overline{g}(\overline{a}) = \overline{g} \circ \pi(a) = f(a) = \overline{f}(\overline{a})$$

para todo $\overline{a} \in \frac{\mathfrak{g}}{I}$. Portanto $\overline{g} = \overline{f}$ e a unicidade fica provada. □

Corolário 3.1.22. *Seja $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morfismo de álgebras de Lie. Então*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \frac{\mathfrak{g}}{\ker(f)} &\to \mathrm{Im}(f) \\ \overline{a} &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

é isomorfismo de álgebras de Lie, assim

$$\frac{\mathfrak{g}}{\ker(f)} \cong \mathrm{Im}(f)\ .$$

Demonstração. Usar $I = \ker(f)$ na proposição anterior. Obtemos que $\overline{f}$ é morfismo. A sobrejetividade de $\overline{f}$ é imediata e a injetividade vem de

$$\overline{f}(\overline{a}) = 0 \implies f(a) = 0 \implies a \in \ker(f) \implies \overline{a} = 0\ .$$

□

3.1.7 Estrutura de álgebra de Lie para uma álgebra associativa

Nesta seção veremos como equipar uma álgebra associativa A com uma estrutura de álgebra de Lie. Denotamos por A_L o conjunto A equipado com esta estrutura a ser descrita.

Definimos $A_L = A$ como espaços vetoriais. Definimos o colchete de Lie $[,]\colon A_L \times A_L \to A_L$ por

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \ ,$$

para todos $a, b \in A_L$. Essa operação é bilinear e satisfaz as identidades requeridas para a álgebra de Lie. De fato, dados $a, b, c \in A_L$, temos

$$[a, a] = a \cdot a - a \cdot a = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned}
[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] &= [a, bc - cb] + [b, ca - ac] + [c, ab - ba] \\
&= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) + \\
&\quad - (ca - ac)b + c(ab - ba) - (ab - ba)c \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

3.1.8 Estrutura de álgebra de Lie para os elementos primitivos de uma biálgebra

Começaremos definindo o conjunto de elementos primitivos de uma biálgebra B, e mostraremos que estes formam uma álgebra de lie, com o colchete $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, o mesmo colchete de B, visto apenas como álgebra associativa.

Definição 3.1.23. Seja B uma biálgebra. Dizemos que $b \in B$ é um *elemento primitivo* se

$$\Delta(b) = b \otimes 1_B + 1_B \otimes b$$

O conjunto de todos os elementos primitivos de B é denotado por $\mathrm{P}(B)$.

Proposição 3.1.24. $\mathrm{P}(B)$ *é uma álgebra de Lie, com comutador*

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \ .$$

Isto é, $\mathrm{P}(B)$ *é uma subálgebra de Lie de* B_L.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\mathrm{P}(B)$ é fechado pelo comutador. De fato, dados $a, b \in \mathrm{P}(B)$, temos

$$\begin{aligned}\Delta([a,b]) &= \Delta(ab - ba)\\ &= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a)\\ &= (a \otimes 1_B + 1_B \otimes a)(b \otimes 1_B + 1_B \otimes b)+\\ &\quad - (b \otimes 1_B + 1_B \otimes b)(a \otimes 1_B + 1_B \otimes a)\\ &= ab \otimes 1_B + 1_B \otimes ab - ba \otimes 1_B - 1_B \otimes ba\\ &= [a,b] \otimes 1_B + 1_B \otimes [a,b]\ ,\end{aligned}$$

e portanto $[a, b] \in \mathrm{P}(B)$. □

3.1.9 Estrutura de álgebra de Lie para as derivações em uma álgebra de Hopf

Definimos abaixo o espaço das derivações em uma álgebra de Hopf H. Mostraremos que esse espaço é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{P}(H^\circ)$ Aqui, H° denota o dual finito de H, que é uma álgebra (de Hopf), e portanto é uma álgebra de Lie com o colchete dado pelo comutador

$$[f, g] = f * g - g * f\ ,\quad \forall f, g \in H^\circ\ .$$

Observe que, da seção anterior, $\mathrm{P}(H^\circ)$ é uma subálgebra de Lie de H°.

Definição 3.1.25. Seja H uma álgebra de Hopf. Uma *derivação* em H é um funcional linear $\delta\colon H \to \mathbb{K}$ tal que

$$\delta(ab) = \delta(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\delta(b)\ .$$

O conjunto de todas as derivações é denotado por $\mathrm{Der}_\varepsilon(H)$.

Observação 3.1.26. $\mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ é um subespaço vetorial de H^*. De fato, dados $\delta, \gamma \in \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}(\delta + \lambda\gamma)(ab) &= \delta(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\delta(b) + \lambda(\gamma(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\gamma(b))\\ &= (\delta(a) + \lambda\gamma(a))\varepsilon(b) + \varepsilon(a)(\delta(b) + \lambda\gamma(b))\\ &= (\delta + \lambda\gamma)(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)(\delta + \lambda\gamma)(b)\ .\end{aligned}$$

Portanto $\delta + \lambda\gamma \in \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$.

Observação 3.1.27. $\delta(1_H) = 0$ para toda derivação δ.

Proposição 3.1.28. $\mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ *é uma subálgebra de Lie de* $\mathrm{P}(H^\circ)$*, em que* H° *é o dual finito de* H*. O comutador em* $\mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ *é dado por*

$$[\delta, \gamma] = \delta * \gamma - \gamma * \delta = \mu_{\mathbb{K}} \circ (\delta \otimes \gamma - \gamma \otimes \delta) \circ \Delta_H$$

em que $*$ *é o produto de convolução em* H°*.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que $\mathrm{Der}_\varepsilon(H) \subseteq \mathrm{P}(H^\circ)$. De fato, temos, para todo $\delta \in \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ e para todos $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} \delta \circ \mu(a \otimes b) =& \delta(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\delta(b) \\ =& \theta(\delta \otimes \varepsilon)(a \otimes b) + \theta(\varepsilon \otimes \delta)(a \otimes b) \\ =& \theta(\delta \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \delta)(a \otimes b) \end{aligned}$$

em que $\theta\colon H^* \otimes H^* \to (H \otimes H)^*$ é um morfismo injetivo dado por $\theta(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$, que aparece na seção sobre dual finito de álgebras (seção 1.3.3.2).

Portanto $\mu^*(\delta) = \theta(\delta \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \delta) \in \theta(H^* \otimes H^*)$. Dessa forma, δ satisfaz o item 2. do teorema 1.3.13 e então, por definição, pertence ao dual finito H°.

Além disso, lembrando que $\varepsilon = 1_{H^\circ}$ e que $\Delta_{H^\circ} = \theta^{-1} \circ \mu^*$:

$$\begin{aligned} \Delta_{H^\circ}(\delta) &= \theta^{-1} \circ \mu^*(\delta) \\ &= \theta^{-1} \circ \theta(\delta \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \delta) \\ &= \delta \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \delta \\ &= \delta \otimes 1_{H^\circ} + 1_{H^\circ} \otimes \delta \end{aligned}$$

e temos que toda derivação δ em H é um elemento primitivo de H°.

Resta mostrar que $\mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ é fechado pelo comutador escrito acima.

Sejam $\delta, \gamma \in \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$ e $a, b \in H$. Temos que:

$$\begin{aligned}
[\delta,\gamma](ab) &= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\delta\otimes\gamma - \gamma\otimes\delta)\circ\Delta(ab)\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\delta\otimes\gamma - \gamma\otimes\delta)(\Delta(a)\Delta(b))\\
&= \mu_{\mathbb{K}} \circ (\delta\otimes\gamma - \gamma\otimes\delta)(a_{(1)}b_{(1)}\otimes a_{(2)}b_{(2)})\\
&= \delta(a_{(1)}b_{(1)})\cdot\gamma(a_{(2)}b_{(2)}) - \gamma(a_{(1)}b_{(1)})\cdot\delta(a_{(2)}b_{(2)}))\\
&= \big(\delta(a_{(1)})\varepsilon(b_{(1)}) + \varepsilon(a_{(1)})\delta(b_{(1)})\big)\cdot\big(\gamma(a_{(2)})\varepsilon(b_{(2)}) + \varepsilon(a_{(2)})\gamma(b_{(2)})\big) +\\
&\quad - \big(\gamma(a_{(1)})\varepsilon(b_{(1)}) + \varepsilon(a_{(1)})\gamma(b_{(1)})\big)\cdot\big(\delta(a_{(2)})\varepsilon(b_{(2)}) + \varepsilon(a_{(2)})\delta(b_{(2)})\big)\\
&= \big(\delta(a_{(1)})\gamma(a_{(2)}) - \gamma(a_{(1)})\delta(a_{(2)})\big)\varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}) +\\
&\quad + \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})\big(\delta(b_{(1)})\gamma(b_{(2)}) - \gamma(b_{(1)})\delta(b_{(2)})\big) +\\
&\quad + \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})\big(\delta(b_{(1)})\gamma(a_{(2)}) - \gamma(b_{(1)})\delta(a_{(2)})\big) +\\
&\quad + \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})\big(\delta(a_{(1)})\gamma(b_{(2)}) - \gamma(a_{(1)})\delta(b_{(2)})\big)\\
&= [\delta,\gamma](a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)[\delta,\gamma](b) +\\
&\quad + \delta(b)\gamma(a) - \gamma(b)\delta(a) + \delta(a)\gamma(b) - \gamma(a)\delta(b)\\
&= [\delta,\gamma](a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)[\delta,\gamma](b)\ .
\end{aligned}$$

Dessa forma, $[\delta, \gamma] \in \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$, e então $[\mathrm{Der}_\varepsilon(H), \mathrm{Der}_\varepsilon(H)] \subset \mathrm{Der}_\varepsilon(H)$. □

3.2 Álgebra envolvente universal

Começamos definindo a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por meio de uma propriedade universal. No decorrer, exibiremos construção de uma álgebra que satisfaz essa propriedade. Também é costume denotar a álgebra envolvente por recobrimento universal.

3.2.1 Propriedade universal

Definição 3.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A *álgebra envolvente universal*, ou o *recobrimento universal* de $\mathfrak{g}$ é um par (U, i), em que:

1. U é uma álgebra associativa e com unidade;

2. $i\colon \mathfrak{g} \to U_L$ é um morfismo de álgebras de Lie;

3. vale a seguinte propriedade universal: dados A álgebra (associativa e com unidade) e $f\colon \mathfrak{g} \to A_L$ morfismo de álgebras de Lie, existe um

único morfismo de álgebras $\overline{f}\colon U \to A$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & A_L = A \\
& U_L = U \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ i = f \ .$$

Construiremos a seguir uma álgebra que satisfaz essa propriedade universal. Considere a álgebra tensorial $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ gerada pelo espaço vetorial $\mathfrak{g}$. Essa álgebra pode ser vista como uma álgebra de Lie da maneira padrão, fazendo o comutador ser $[a, b]_{\mathrm{T}(\mathfrak{g})} = a \cdot b - b \cdot a$. Mas queremos que esse comutador coincida com o comutador em $\mathfrak{g}$ quando nos restringimos a $a, b \in \mathfrak{g}$. Assim, fazemos a identificação $[a, b]_{\mathfrak{g}} = a \cdot b - b \cdot a$, com $a, b \in \mathfrak{g}$. Temos a seguinte definição:

Definição 3.2.2. Escrevemos

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \frac{\mathrm{T}(\mathfrak{g})}{I} \ ,$$

em que I é o ideal em $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma $a \cdot b - b \cdot a - [a, b]_{\mathfrak{g}}$, com $a, b \in \mathfrak{g} \subseteq \mathrm{T}(\mathfrak{g})$. Além disso, fazemos

$$\begin{aligned} i\colon \mathfrak{g} &\to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto x \ , \end{aligned}$$

que é um morfismo de álgebras de Lie, já que

$$i([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [x, y]_{\mathfrak{g}} = x \cdot y - y \cdot x = [x, y]_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \ .$$

Aqui consideramos $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$.

A princípio não sabemos se o morfismo i é injetor. Um corolário do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt 3.3.1 nos garante que isso realmente ocorre (é o corolário 3.3.2 a seguir). Como consequência da propriedade universal do recobrimento, que veremos na proposição abaixo que $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), i)$ satisfaz, o morfismo natural i_U de qualquer recobrimento (U, i_U) também é injetor.

Proposição 3.2.3. *O par $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), i)$ definido acima satisfaz a propriedade universal em 3.2.1 e, portanto, é a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Mostrando a propriedade universal. Seja A uma álgebra (associativa com unidade) e $f\colon \mathfrak{g} \to A_L$ um morfismo de álgebras de Lie. Considerando $\mathfrak{g}$ apenas como espaço vetorial, aplicamos a propriedade universal da álgebra tensorial para f, e concluímos que existe um único morfismo de ágebras $f'\colon \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Aplicamos a propriedade universal do quociente para f' (isto é, a proposição 1.1.16), para obter um único morfismo de álgebras $\overline{f}\colon \frac{\mathrm{T}(\mathfrak{g})}{I} \to A$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f'$. Podemos fazer isso pois temos $I \subseteq \ker(f')$:

$$x = \sum_i c_i(a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i - [a_i, b_i])d_i \in I \ ,$$

implica que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f'\left(\sum_i c_i \otimes (a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i - [a_i, b_i]) \otimes d_i\right) \\
&= \sum_i f'(c_i)(f(a_i)f(b_i) - f(b_i)f(a_i) - f([a_i, b_i]))f'(d_i) \\
&= \sum_i f'(c_i)(f([a_i, b_i]) - f([a_i, b_i]))f'(d_i) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Logo $x \in \ker(f')$ e $\overline{f}$ está bem definido. Temos também $\overline{f} \circ i = f$.

Além disso, é único tal que $\overline{f} \circ i = f$. De fato, seja $\overline{g}$ outro morfismo com $\overline{g} \circ i = f$. Então, para dado $\overline{x} \in \frac{\mathrm{T}(\mathfrak{g})}{I}$, temos:

$$\overline{g}(\overline{x}) = \overline{g} \circ \pi(x) = f(x) = \overline{f}(\overline{x}) \ .$$

□

3.2.2 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf

Nesta seção equiparemos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ com uma estrutura de álgebra de Hopf. A álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é o quociente da álgebra tensorial $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ pelo ideal $I \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos $ab - ba - [a, b]$. Se mostrarmos que o ideal I é um Hopf-ideal, teremos que o quociente $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$ tem estrutura de álgebra de Hopf quociente herdada da álgebra tensorial.

Lema 3.2.4. *O ideal* $I = \mathfrak{g}\{ab - ba - [a, b]\colon a, b \in \mathfrak{g}\}\mathfrak{g}$ *de* $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ *é, na verdade, um Hopf-ideal.*

Demonstração. Já temos que I é um ideal. Vamos mostrar que é um coideal. De fato, para os geradores $ab - ba - [a,b]$, com $a, b \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned}\Delta(ab - ba - [a,b]) &= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a) - \Delta([a,b]) \\ &= (a \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes a)(b \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes b) + \\ &\quad - (b \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes b)(a \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes a) + \\ &\quad - ([a,b] \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes [a,b]) \\ &= (ab - ba - [a,b]) \otimes 1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \otimes (ab - ba - [a,b]) \\ &\in I \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{g}) + \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \otimes I\end{aligned}$$

$$\varepsilon(ab - ba - [a,b]) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) - \varepsilon(b)\varepsilon(a) - \varepsilon([a,b]) = 0 \ .$$

É fácil ver que o mesmo ocorre se esse elemento gerador for multiplicado por um elemento de $\mathfrak{g}$ à esquerda e à direita, e se houver uma soma finita de termos dessa forma. Portanto, $\Delta(I) \subseteq I \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{g}) + \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$. Isso significa que I é coideal.

Portanto I é um bi-ideal. Resta mostrar que $S(I) \subseteq I$, em que S é a antípoda de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. De fato,

$$\begin{aligned}S(ab - ba - [a,b]) &= S(ab) - S(ba) - S([a,b]) \\ &= ba - ab + [a,b] \in I \ ,\end{aligned}$$

e o mesmo ocorre se multiplicarmos o elemento gerador à direita e à esquerda por elementos de $\mathfrak{g}$ e tomarmos somas finitas. Decorre, então, que $S(I) \subseteq I$, e que I é um Hopf-ideal. $\square$

Portanto, pela seção 2.7.1, temos que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf, com estrutura tal que a projeção $\pi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é um morfismo de álgebras de Hopf. Costuma-se considerar $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ via a inclusão

$$\begin{aligned}i_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} &\to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \overline{g} \ ,\end{aligned}$$

em que já estamos considerando $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Essa inclusão é injetora em consequência do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt (teorema 3.3.1 a seguir); a injetividade está mostrada no corolário 3.3.2.

A estrutura de álgebra de Hopf é dada, então, por:

$$g \cdot_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} h = g \cdot_{\mathcal{T}(\mathfrak{g})} h = gh \qquad 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} = 1_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{aligned}&\Delta(g) = g \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g \qquad && \varepsilon(g) = 0 \\ &\Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} && \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \ ,\end{aligned}$$

e a antípoda é dada por

$$\begin{aligned} S(1_{\mathbb{K}}) &= 1_{\mathbb{K}} \\ S(g_1 \dots g_n) &= (-1)^n g_n \dots g_1 \ , \end{aligned}$$

com $g, h, g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

3.2.3 Extensão de morfismos de Lie para o recobrimento universal

Dadas $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie, e um morfismo de Lie $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, é possível definir um único morfismo de álgebras $\mathcal{U}(f)$ que estende f aos recobrimentos universais. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_{\mathfrak{g}}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i_{\mathfrak{h}}"] \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\mathcal{U}(f)"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \end{tikzcd}$$

Aplicando a propriedade universal da álgebra envolvente para o morfismo de álgebras de Lie $i_{\mathfrak{h}} \circ f\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, existe um único morfismo de álgebras

$$\mathcal{U}(f)\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$$

que faz comutar o diagrama acima, isto é, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f) \circ i_{\mathfrak{g}} &= i_{\mathfrak{h}} \circ f \\ \mathcal{U}(f)(g) &= f(g), \quad \forall g \in \mathfrak{g} \ . \end{aligned}$$

Veremos a seguir que além de morfismo de álgebras, $\mathcal{U}(f)$ é um Hopf-morfismo.

Lema 3.2.5. *Sejam B uma biálgebra e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Considere um morfismo de álgebras de Lie $h\colon \mathfrak{g} \to B_L$, em que B_L é B equipado com o colchete dado pelo comutador. Pela propriedade universal da álgebra envolvente universal, existe único morfismo de álgebras $\overline{h}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to B_L$ que estende h.*

1. *Se $h(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{P}(B)$, então a extensão $\overline{h}$ é um morfismo de biálgebras.*

2. *Se B é uma álgebra de Hopf e $h(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{P}(B)$, então a extensão $\overline{h}$ é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração.

1. Sabemos que $\overline{h}$ é um morfismo de álgebras. Então resta mostrar que é um morfismo de coálgebras. Seja $g \in \mathfrak{g}$. Temos $h(g) = \overline{h}(g)$ primitivo em B, portanto

$$\begin{aligned}\Delta_B \circ \overline{h}(g) &= \overline{h}(g) \otimes 1_B + 1_B \otimes \overline{h}(g) \\ &= (\overline{h} \otimes \overline{h})(g \otimes 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} + 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes g) \\ &= (\overline{h} \otimes \overline{h}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(g)\end{aligned}$$

   e os morfismos de álgebras $\Delta_B \circ \overline{h}$ e $(\overline{h} \otimes \overline{h}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ coincidem em $\mathfrak{g}$. Pela propriedade universal da álgebra envolvente, temos que os dois morfismos coincidem em todo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

   Além disso, os elementos primitivos de uma biálgebra são anulados pela counidade. De fato, dado $a \in B$, temos $\Delta_B(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a$, e portanto, expandindo a pelo axioma da counidade,

$$\varepsilon_B(a) = \varepsilon_B\big(\varepsilon_B(a)1_B + \varepsilon_B(1_B)a\big) = \varepsilon_B(a) + \varepsilon_B(a) \ ,$$

   logo $\varepsilon_B(a) = 0$.

   Então $\varepsilon_B \circ \overline{h}(g) = 0 = \varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(g)$, e os morfismos $\varepsilon_B \circ \overline{h}$ e $\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ coincidem em $\mathfrak{g}$. Também pela propriedade universal, temos que esses morfismos são iguais em todo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

   Dessa forma $\overline{h}$ é um morfismo de biálgebras

2. Segue do item 1. e da proposição 2.3.5, que diz que todo morfismo de biálgebras entre duas álgebras de Hopf preserva antípoda.

□

Proposição 3.2.6. *Seja $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um morfismo de álgebras de Lie. A extensão $\mathcal{U}(f)\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ é um morfismo de álgebras de Hopf. Além disso, se f é isomorfismo de álgebras de Lie, então $\mathcal{U}(f)$ é um isomorfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Para a primeira parte, basta aplicar o lema 3.2.5 item 2. ao morfismo $i_{\mathfrak{h}} \circ f$, já que $i_{\mathfrak{h}} \circ f(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h} = \mathrm{P}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{h})\big)$.

Para a segunda parte, precisaremos do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt. Essa parte não é usada para mostrar o teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt, então não haverá problema em usar esse teorema aqui. Seja

$$\{u_i, i \in I\}$$

base ordenada de $\mathfrak{g}$. Então

$$\{f(u_i), i \in I\}$$

é base de $\mathfrak{h}$. Pelo teorema Poincarè-Birkhoff-Witt (teorema 3.3.1), temos que os seguintes conjuntos são bases:

$$\begin{aligned} &\{u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_n}^{r_n} \mid n \in \mathbb{N}, r_k \in \mathbb{N}, i_k \in I, i_1 < \ldots < i_n\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ &\{f(u_{i_1})^{r_1} \ldots f(u_{i_n})^{r_n} \mid n \in \mathbb{N}, r_k \in \mathbb{N}, i_k \in I, i_1 < \ldots < i_n\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{h})\ . \end{aligned}$$

Note que, pondo $F := \mathcal{U}(f)$, temos

$$f(u_{i_1})^{r_1} \ldots f(u_{i_n})^{r_n} = F\big(u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_n}^{r_n}\big)$$

logo F leva um elemento da base em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ em exatamente um elemento da base em $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Portanto, definindo a transformação linear $\tilde{F} \colon \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ na base por $\tilde{F}\big(f(u_{i_1})^{r_1} \ldots f(u_{i_n})^{r_n}\big) = u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_n}^{r_n}$, temos que $\tilde{F}$ é a inversa de F. Portanto F é bijeção se f o é.

□

3.3 Teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt

O teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt, a ser enunciado abaixo, nos fornece uma base para o recobrimento universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a partir de uma base de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.3.1 (PBW). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{u_i\}_{i\in I}$ uma base ordenada para $\mathfrak{g}$ (I é um conjunto ordenado). Então os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ da forma*

$$u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_n}^{r_n}$$

são uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Acima, temos $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, e $i_1 < \ldots < i_n$.

Vamos utilizar uma notação conveniente para denotar esses elementos da base. Considere os multi-índices $r \in \mathbb{N}^{(I)}$ com $r = (r_i)_{i \in I}$, r_i's inteiros não negativos, e tal que apenas uma quantidade finita de termos não são nulos. Se $i = i_1 < \ldots < i_n$ são os índices tais que $r_i \neq 0$, então denote:

$$u^r := u_{i_1}^{r_1} \ldots u_{i_n}^{r_n} \ .$$

Uma combinação de elementos da base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_r \lambda(r) u^r \ ,$$

em que subentende-se que a soma é apenas sobre finitos multi-índices, ou seja, que $\lambda(r) = 0$ para quase todo r.

Antes de prosseguir com a demonstração do teorema, vejamos um corolário interessante.

Corolário 3.3.2. *O morfismo natural $i \colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, da propriedade universal da álgebra envolvente, é injetor.*

Demonstração. Dado $g \in \ker(i)$, escreva $g = \sum_i \alpha_i u_i$. Temos $i(g) = \sum_i \alpha_i u_i = 0$ [2], e como os elementos u_i fazem parte da base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, temos que os coeficientes α_i devem ser nulos. Portanto $g = 0$ e $\ker(i) = 0$. □

Para a demonstração, precisaremos de alguns lemas. No decorrer, vamos denominar os monômios

$$u_{i_1} \ldots u_{i_n} \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}), \text{ com } i_1 \leq \ldots \leq i_n$$

como *monômios padrão.*

Em toda a seção, $\{u_i\}_{i \in I}$ é uma base ordenada para $\mathfrak{g}$.

Lema 3.3.3. *Todo elemento de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é congruente $\mod I$ a uma combinação linear de monômios padrão. Isto é, os monômios padrão geram $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$ como espaço vetorial.*

Demonstração. Basta mostrar que todo monômio $u_{i_1} \ldots u_{i_n}$ em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, cujos índices não necessariamente estão ordenados, pode ser escrito como combinação linear de monômios padrão módulo I. Procedemos por indução em n, o grau do monômio.

[2] Nessa equação, os u_i's denotam elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Na verdade, seriam $i(u_i)$, mas é costume simplificar a notação denotando-os dessa forma.

(caso $n=0$): $u_{i_1}\dots u_{i_n} := 1$ já é um monômio padrão.

(caso $n=1$): u_{i_1} já é um monômio padrão.

(HI): Todo monômio em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ de grau $< n$ pode ser escrito como combinação de monômios padrão $\mod I$.

(caso n): Seja $u_{i_1}\dots u_{i_n}$ um monômio em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Se os índices já estiverem ordenados, está feito. Se não, considerando $i_1,\dots,i_n$ não ordenado, existe uma permutação $\sigma = \binom{i_1\ i_2\ \dots\ i_n}{i'_1\ i'_2\ \dots\ i'_n}$ que ordena esses índices, isto é, que resulta em $i'_1 \leq i'_2 \leq \dots \leq i'_n$. Escreva essa permutação como uma composição de permutações de dois índices vizinhos: $\sigma = \sigma'_l \circ \dots \sigma'_1$. Denotaremos com linha as permutações que trocam dois elementos vizinhos. Com um ligeiro abuso de notação, escreveremos:

$$\sigma(u_{i_1}\dots u_{i_n}) := u_{\sigma(i_1)}\dots u_{\sigma(i_n)}\ .$$

Afirmação: Seja $v_{i_1}\dots v_{i_n}$ um monômio em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Para uma permutação de elementos vizinhos σ', temos:

$$u_{i_1}\dots u_{i_n} = \sigma'(u_{i_1}\dots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I\ .$$

Prova da afirmação. De fato, se σ' é uma permutação que troca dois elementos vizinhos, digamos i_j e i_{j+1}, temos:

$$\begin{aligned} u_{i_1}\dots u_{i_n} &= u_{i_1}\dots\big(u_{i_j}u_{i_{j+1}} - u_{i_{j+1}}u_{i_j} - [u_{i_j},u_{i_{j+1}}]\big)\dots u_{i_n} \\ &\qquad + u_{i_1}\dots u_{i_{j+1}}u_{i_j}\dots u_{i_n} + u_{i_1}\dots[u_{i_j},u_{i_{j+1}}]\dots u_{i_n} \\ &= 0 + \sigma'(u_{i_1}\dots u_{i_n}) + \underbrace{u_{i_1}\dots[u_{i_j},u_{i_{j+1}}]\dots u_{i_n}}_{\text{grau } < n} \mod I \\ &\overset{\text{(HI)}}{=} \sigma'(u_{i_1}\dots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I\ . \end{aligned}$$

⌟

Voltemos a atenção ao monômio $u_{i_1}\dots u_{i_n}$ e à permutação $\sigma = \sigma'_1\dots\sigma'_l$ que ordena os índices. aplicando a afirmação sucessivamente às permutações $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_l$ de elementos vizinhos, temos que:

$$\begin{aligned}
u_{i_1} \ldots u_{i_n} &= \sigma'_1(u_{i_1} \ldots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I \\
&= \sigma'_2\sigma'_1(u_{i_1} \ldots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I \\
&\quad \ldots \\
&= \sigma'_l \ldots \sigma'_1(u_{i_1} \ldots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I \\
&= \sigma(u_{i_1} \ldots u_{i_n}) + \text{combinação de monômios padrão} \mod I \\
&= \text{combinação de monômios padrão} \mod I \ .
\end{aligned}$$

Note que após a ordenação dos índices, o monômio $\sigma(u_{i_1} \ldots u_{i_n})$ é um monômio padrão. Isso encerra a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.3.4. *Existe uma transformação linear $L\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ tal que*

1. $L(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}$;

2. *Se $i_1 \leq \ldots \leq i_n$, isto é, se $u_{i_1} \ldots u_{i_n}$ é um monômio padrão, temos*

$$L(u_{i_1} \ldots u_{i_n}) = u_{i_1} \ldots u_{i_n} \ ;$$

3. *Se $i_k > i_{k+1}$, temos*

$$\begin{aligned}
L(u_{i_1} \ldots u_{i_k} u_{i_{k+1}} \ldots u_{i_n}) &= L(u_{i_1} \ldots u_{i_{k+1}} u_{i_k} \ldots u_{i_n}) \\
&\quad + L(u_{i_1} \ldots [u_{i_k}, u_{i_{k+1}}] \ldots u_{i_n}) \ .
\end{aligned}$$

Demonstração. Escreva $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ em termos da sua graduação[3]. Vamos definir uma família de transformações lineares $\{L_n\colon V^{\otimes n} \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})\}_{n=0}^{\infty}$ indutivamente. Definimos L_0, L_1 e L_2 transformações lineares na base por

$$L_0(1_{\mathbb{K}}) = i_{\mathbb{K}}$$

$$L_1(u_i) = u_i$$

$$L_2(u_{i_1} u_{i_2}) = \begin{cases} u_{i_1} u_{i_2}, \text{ se } i_1 \leq i_2 \\ u_{i_2} u_{i_1} + [u_{i_1}, u_{i_2}], \text{ se } i_1 > i_2 \ . \end{cases}$$

Agora supomos $L_{n'}$ bem definido para todo $n' < n$, e satisfazendo as condições:

[3]Aqui os subespaços considerados deveriam ser $i_V^{\otimes n}(V^{\otimes n})$ para serem subconjuntos da soma direta externa $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, mas são denotados simplesmente por $V^{\otimes n}$ para facilitar.

$$(*)\quad L_{n'}(u_{i_1}\dots u_{i_n}) = u_{i_1}\dots u_{i_n},\ \text{para um monômio padrão}$$

$$(**)\quad \begin{aligned} L_{n'}(u_{i_1}\dots u_{i_{n'}}) &= L_{n'}(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_{n'}}) \\ &\quad + L_{n'-1}((u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_{n'}}),\ \text{para } i_k > i_{k+1} \end{aligned}$$

.

Vamos definir L_n da maneira abaixo. Antes, precisamos estabelecer uma notação. Dado um monômio $u_{i_1}\dots u_{i_n}$ chamamos de *defeitos* todos os pares (i_k, i_l) com $k < l$ e $i_k > i_l$. Isto é, todos os pares que não estão na ordem padrão dentro do monômio. Note que se temos d defeitos, o monômio comporta algum par (i_k, i_{k+1}) com defeito; e trocando esses dois elementos, temos $u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n}$ com $d-1$ defeitos.

Seja $u_{i_1}\dots u_{i_n}$ um monômio. Vamos definir L_n indutivamente sobre o número de defeitos d no monômio. Se o número de defeitos é $d = 0$ (monômio é padrão), definimos

$$L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) = u_{i_1}\dots u_{i_n}\ .$$

Se $d = 1$, temos um único defeito do tipo (i_k, i_{k+1}), e escrevemos

$$\begin{aligned} L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) &= L_n(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n}) + L_{n-1}(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n}) \\ &= u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n} + L_{n-1}(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n})\ . \end{aligned}$$

Supomos, então, que L_n está bem definido para qualquer monômio com menos de d defeitos ($d \geq 2$) e que vale

$$(\#)\quad \begin{aligned} L_n(u_{i_1}\dots u_{i_k}u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}) &= L_n(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n}) \\ &\quad + L_{n-1}(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n}) \end{aligned}$$

para qualquer par (i_k, i_{k+1}) com defeito. Definimos L_n aplicado a um monômio de d defeitos $u_{i_1}\dots u_{i_n}$ assim: consideramos um par (i_k, i_{k+1}) com defeito, e escrevemos

$$\begin{aligned} L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) = &\underbrace{L_n(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n})}_{\text{tem } d-1 \text{ defeitos}} + \\ &+ \underbrace{L_{n-1}(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n})}_{\text{está bem definido}}\ . \end{aligned}$$

Resta mostrar que essa definição independe do par de defeitos (i_k, i_{k+1}) considerado. Considere dois pares com defeito (i_k, i_{k+1}) e (i_l, i_{l+1}), com $k+1 \leq l$. Precisamos mostrar que considerando qualquer desses pares, o resultado de $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$ continua igual, e a ideia é abrir L_n pelos dois pares, nas duas ordens possíveis. Teremos de considerar dois casos: $k+1<l$ (quando as permutações de (i_k,i_{k+1}) e de (i_l,i_{l+1}) não "interagem") e $k+1=l$ (quando essas permutações "interagem").

(caso $k+1<l$:) Usando o par (i_k,i_{k+1}) para definir $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$:

$$
\begin{aligned}
L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) &= \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_l}u_{i_{l+1}}\dots u_{i_n}\big)}_{d-1 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_l,i_{l+1})}+\\
&\quad + \underbrace{L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_l}u_{i_{l+1}}\dots u_{i_n}\big)}_{\text{use } (**) \text{ para o par } (i_l,i_{l+1})}\\
&= L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_{l+1}}u_{i_l}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots [u_{i_l},u_{i_{l+1}}]\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_{l+1}}u_{i_l}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-2}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots [u_{i_l},u_{i_{l+1}}]\dots u_{i_n}\big)\ .
\end{aligned}
$$

Usando o par (i_l,i_{l+1}) para definir $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$:

$$
\begin{aligned}
L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) &= \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}u_{i_{k+1}}\dots u_{i_{l+1}}u_{i_l}\dots u_{i_n}\big)}_{d-1 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_k,i_{k+1})}+\\
&\quad + \underbrace{L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_k},u_{i_{k+1}}\dots [u_{i_l},u_{i_{l+1}}]\dots u_{i_n}\big)}_{\text{use } (**) \text{ para o par } (i_k,i_{k+1})}\\
&= L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_{l+1}}u_{i_l}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_{k+1}},u_{i_k}]\dots u_{i_{l+1}}u_{i_l}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots [u_{i_l},u_{i_{l+1}}]\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-2}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots [u_{i_l},u_{i_{l+1}}]\dots u_{i_n}\big)\ .
\end{aligned}
$$

Obtemos que as duas expressões são iguais.

(caso $k+1=l$:) Temos $i_l=i_{k+1}$ e $i_{l+1}=i_{k+2}$.
Usando o par (i_k,i_{k+1}) para definir $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$:

$$\begin{aligned}
L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) = \ & \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_k}u_{i_{k+2}}\dots u_{i_n}\big)}_{d-1 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_k,\, i_{k+2})} \ + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]u_{i_{k+2}}\dots u_{i_n}\big) \\
= \ & \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}u_{i_{k+2}}u_{i_k}\dots u_{i_n}\big)}_{d-2 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_{k+1},\, i_{k+2})} \ + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}[u_{i_k},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]u_{i_{k+2}}\dots u_{i_n}\big) \\
= \ & L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+2}}u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]u_{i_k}\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}[u_{i_k},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]u_{i_{k+2}}\dots u_{i_n}\big) \ .
\end{aligned}$$

Usando o par (i_{k+1}, i_{k+2}) para definir $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$:

$$\begin{aligned}
L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n}) = \ & \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}u_{i_{k+2}}u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}\big)}_{d-1 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_k,\, i_{k+2})} \ + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big) \\
= \ & \underbrace{L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+2}}u_{i_k}u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}\big)}_{d-2 \text{ defeitos, use } (\#) \text{ para o par } (i_k,\, i_{k+1})} \ + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+2}}]u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big) \\
= \ & L_n\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+2}}u_{i_{k+1}}u_{i_k}\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+2}}[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots[u_{i_k},u_{i_{k+2}}]u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}\big) + \\
& + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big) \ .
\end{aligned}$$

Subtraímos as duas expressões para $L_n(u_{i_1}\dots u_{i_n})$, e esperamos que o resultado se anule. De fato, o primeiro termo das duas se cancela e ficamos com:

$$
\begin{aligned}
&L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+2}}[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\dots u_{i_n}\big)+\\
&\quad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+2}}]u_{i_{k+1}}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\qquad + L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_k}[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big)+\\
&\qquad\quad - L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]u_{i_k}\dots u_{i_n}\big)+\\
&\qquad\qquad - L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots u_{i_{k+1}}[u_{i_k},u_{i_{k+2}}]\dots u_{i_n}\big)+\\
&\qquad\qquad\quad - L_{n-1}\big(u_{i_1}\dots [u_{i_k},u_{i_{k+1}}]u_{i_{k+2}}\dots u_{i_n}\big)\\
&= L_{n-1}\Big(u_{i_1}\dots \big[u_{i_k},[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\big]\dots u_{i_n}\Big)+\\
&\qquad L_{n-1}\Big(u_{i_1}\dots \big[u_{i_{k+2}},[u_{i_k},u_{i_{k+1}}]\big]\dots u_{i_n}\Big)+\\
&\qquad\quad L_{n-1}\Big(u_{i_1}\dots \big[u_{i_{k+1}},[u_{i_{k+2}},u_{i_k}]\big]\dots u_{i_n}\Big)\\
&= L_{n-1}\Bigg(u_{i_1}\dots\\
&\qquad\quad \Big(\big[u_{i_k},[u_{i_{k+1}},u_{i_{k+2}}]\big]+\big[u_{i_{k+1}},[u_{i_{k+2}},u_{i_k}]\big]+\big[u_{i_{k+1}},[u_{i_{k+2}},u_{i_k}]\big]\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots u_{i_n}\Bigg)\\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

Nessa etapa, usamos a identidade de Jacobi.

Com isso, a família de transformações lineares $\{L_n\colon V^{\otimes n}\to\mathcal{T}(\mathfrak{g})\}_{n=0}^{\infty}$ fica bem definida, e satisfaz $(*)$ e $(**)$ para todo $n\geq 0$. Extraímos, usando a propriedade universal da soma direta, uma transformação linear

$$L\colon\mathcal{T}(\mathfrak{g})\to\mathcal{T}(\mathfrak{g})\ .$$

As condições $(*)$ e $(**)$, então, implicam os requisitos do enunciado do lema. $\square$

Vamos à prova do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt.

Demonstração do teorema 3.3.1. (PBW) Precisamos mostrar que as classes dos monômios padrão[4] $u_{i_1}\dots u_{i_n}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ formam uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

[4]A classe $u_{i_1}\dots u_{i_n}+I$ é denotada, aqui, como $u_{i_1}\dots u_{i_n}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ por simplicidade da notação. Continuamos chamando-a de monômio padrão.

(Geram o espaço:) Pelo lema 3.3.3, os monômios padrão geram $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

(São LI:) Para mostrar a independência linear, usaremos o lema 3.3.4. Esse lema nos garante a existência de uma transformação linear $L\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ que é a identidade quando atua nos monômios padrão e é tal que:

3. se $i_k > i_{k+1}$, tem-se

$$\begin{aligned} L(u_{i_1} \dots u_{i_k} u_{i_{k+1}} \dots u_{i_n}) = {} & L(u_{i_1} \dots u_{i_{k+1}} u_{i_k} \dots u_{i_n}) \\ & + L(u_{i_1} \dots [u_{i_k}, u_{i_{k+1}}] \dots u_{i_n}) \ . \end{aligned}$$

Iremos mostrar que:

Afirmação: L se anula no ideal $I \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$.

Prova da afirmação. Para qualquer elemento da forma

$$u = u_{i_1} \dots \big(u_{i_k} u_{i_{k+1}} - u_{i_{k+1}} u_{i_k} - [u_{i_k}, u_{i_{k+1}}]\big) \dots u_{i_n} \ ,$$

temos

$$L(u) = 0 \ .$$

De fato se $i_k = i_{k+1}$, temos $u = u_{i_1} \dots (0) \dots u_{i_n}$ e $L(u) = 0$.
Se $i_k > i_{k+1}$, usamos o item 3. do lema 3.3.4 no termo $u_{i_1} \dots u_{i_k} u_{i_{k+1}} \dots u_{i_n}$ e temos:

$$\begin{aligned} L(u) &= L\big(u_{i_1} \dots u_{i_k} u_{i_{k+1}} \dots u_{i_n}\big) + \\ &\qquad - L\big(u_{i_1} \dots u_{i_{k+1}} u_{i_k} \dots u_{i_n}\big) + \\ &\qquad\quad - L\big(u_{i_1} \dots [u_{i_k}, u_{i_{k+1}}] \dots u_{i_n}\big) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

De forma análoga, se $i_k < i_{k+1}$, usamos item 3. do lema 3.3.4 no termo $u_{i_1} \dots u_{i_{k+1}} u_{i_k} \dots u_{i_n}$ e temos:

$$\begin{aligned} L(u) &= L\big(u_{i_1} \dots u_{i_k} u_{i_{k+1}} \dots u_{i_n}\big) + \\ &\qquad - L\big(u_{i_1} \dots u_{i_{k+1}} u_{i_k} \dots u_{i_n}\big) + \\ &\qquad\quad + L\big(u_{i_1} \dots [u_{i_{k+1}}, u_{i_k}] \dots u_{i_n}\big) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso, $L(u) = 0$. Por fim, qualquer elemento de I se escreve como $x(ab - ba - [a,b])y$, com $x, y \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ e $a, b \in \mathfrak{g}$. Abrindo

x e y na base de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ formada pelos monômios da forma $u_{i_1} \ldots u_{i_n}$ (não necessariamente com índices ordenados) e fazendo o mesmo para a, b na base de $\mathfrak{g}$ formada pelos u_i's, temos uma combinação linear de elementos da forma u mencionada acima. Portanto, obtemos $L\big(x(ab - ba - [a, b])y\big) = 0$ e $L(I) = 0$. ⌟

Dessa forma, podemos usar a propriedade universal do quociente $\frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e extrair $\overline{L}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ dada por $\overline{L}(x) = L(x)$ [5]. Como L é a identidade se aplicada a monômios padrão, o mesmo vale para $\overline{L}$. Portanto uma combinação linear nula de monômios padrão em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ resulta numa combinação linear nula de monômios padrão em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, e como os monômios padrão são LI nesse espaço (são parte da base do espaço), temos que todos os coeficientes da combinação são nulos. Portanto os monômios padrão são LI em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. □

[5] Do lado esquerdo da igualdade, o termo x refere-se à classe $x + I$.

Capítulo 4

Biálgebras conexas e o teorema de Milnor-Moore

Neste capítulo estudaremos alguns tipos especiais de biálgebras: as biálgebras conexas com filtração e as conexas com graduação. Estas biálgebras têm a característica de admitirem uma "decomposição" em subespaços componentes; no caso da biálgebra com filtração, essa decomposição é uma união enumerável e no caso da graduação, é uma soma direta de subespaços. Essas decomosições devem ser compatíveis com a estrutura de biálgebra.

A estrutura de filtração e de graduação trazem algumas propriedades novas à biálgebra. Veremos na seção 4.2 que uma biálgebra conexa com graduação é automaticamente uma álgebra de Hopf. E com relação à filtração, na seção 4.4 veremos que uma biálgebra conexa com filtração, sob certas hipóteses (cocomutatividade e corpo de característica nula) também é uma álgebra de Hopf; e é, na verdade, isomorfo à álgebra de Lie dos seus elementos primitivos. Este é o resultado do teorema de Milnor-Moore.

Pelo fato de a filtração e a graduação serem uma espécie de decomposição da biálgebra em união ou soma enumerável de subespaços, temos acesso à indução para provar algumas de suas propriedades.

4.1 Biálgebras conexas com graduação

Uma biálgebra conexa com graduação é uma biálgebra com uma estrutura extra: ela admite uma certa decomposição em soma direta enumerável de subespaços. Nesta seção, veremos a definição, alguns exemplos e propriedades que serão necessárias nas próximas seções.

Definição 4.1.1. Seja B uma biálgebra. Dizemos que B é uma biálgebra *conexa com graduação* se admitir uma decomposição em uma família $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ de subespaços não nulos de B, chamada *graduação*, tal que:

1. $B_0 = \mathbb{K} \cdot 1_B$;

2. $B = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$;

3. $B_n B_m \subseteq B_{m+n}$, $\forall m, n \geq 0$;

4. $\Delta(B_n) \subseteq \displaystyle\sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l$, $\forall n \geq 0$.

Exemplo 4.1.2 (Álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$)**.** A álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ é uma álgebra de Hopf. É também conexa, com graduação dada por[1] $\{V^{\otimes n}\}_{n=0}^{\infty}$. De fato, as propriedades da graduação são vistas abaixo:

1. $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}1_{\mathcal{T}(V)}$;

2. $\mathcal{T}(V) = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$;

3. $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \subseteq V^{\otimes (m+n)}$, $\forall m, n \geq 0$, já que

$$(v_1 \otimes \dots v_n) \otimes (w_1 \otimes w_m) = v_1 \otimes \dots v_n \otimes w_1 \otimes w_m \ ;$$

[1] Aqui os subespaços considerados são as inclusões $i_V^{\otimes n}(V^{\otimes n})$, mas são denotados simplesmente por $V^{\otimes n}$ para facilitar.

4. $\Delta(V^{\otimes n}) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V^{\otimes(n-l)} \otimes V^{\otimes l}, \forall n \geq 0$, pois

$$\begin{aligned}\Delta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) &= \Delta(v_1)\ldots\Delta(v_n)\\ &= (v_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v_1)\ldots(v_n \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes v_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \left(v_{\sigma(1)}\ldots v_{\sigma(k)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(k+1)}\ldots v_{\sigma(n)}\right)\\ &\in \sum_{k=0}^{n} V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes n-k} ,\end{aligned}$$

em que $S_{n,k}$ é o conjunto de permutações σ do conjunto $\{1,\ldots,n\}$ tais que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$ (σ é uma permutação do tipo “shuffle”)[2].

Exemplo 4.1.3 (Álgebra simétrica $\mathcal{S}(V)$)**.** Munimos o espaço vetorial V com a álgebra de Lie trivial, dada pelo colchete nulo. A álgebra simétrica $\mathcal{S}(V)$ é a álgebra envolvente universal dessa álgebra de Lie, e portanto é uma álgebra de Hopf. Essa álgebra é comutativa. Veremos que também admite uma graduação, dada pelo grau dos monômios de $\mathcal{S}(V)$.

Defina $\mathcal{S}^n(V)$ como o subespaço gerado pelos monômios de grau n. Mostraremos as propriedades da graduação:

1. $\mathcal{S}^0(V) = \mathbb{K}1_{\mathcal{S}(V)}$;

2. $\mathcal{S}^n(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n(V)$.

   De fato, seja $\{v_i\}_{i\in I}$ uma base ordenada para V. Pelo teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt, a base PWB de $\mathcal{S}(V)$ é formada por elementos do tipo
   $$v_{i_1}\ldots v_{i_n} \ , \quad i_1 \leq \ldots \leq i_n \ .$$
   Afirmamos que para $n \in \mathbb{N}$, o conjunto
   $$\beta_n = \{v_{i_1}\ldots v_{i_n} \ , \quad i_1 \leq \ldots \leq i_n\}$$
   é base para $\mathcal{S}^n(V)$. De fato, sabemos que β_n é LI, e resta apenas mostrar que gera o subespaço. Seja $s_1 \ldots s_n$ um monômio de grau n

[2] Se $k = 0$ ou $k = n$, o conjunto de permutações $S_{n,k}$ só tem uma permutação, a identidade. O termo $(v_{\sigma(1)}\ldots v_{\sigma(k)}) \otimes (v_{\sigma(k+1)}\ldots v_{\sigma(n)})$ fica igual a $1_{\mathbb{K}} \otimes (v_1 \ldots v_n)$ ou a $(v_1 \ldots v_n) \otimes 1_{\mathbb{K}}$, respectivamente.

em $\mathcal{S}^n(V)$. Escrevendo cada s_j na base de V, temos

$$s_1 \dots s_n = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n} \ ,$$

em que $a_{i_1\dots i_n} \in \mathbb{K}$ são escalares.

Podemos comutar os elementos de $v_{i_1} \dots v_{i_n}$ até obter uma ordenação em que $v_{i_1} \dots v_{i_n} = v_{i_{\sigma(1)}} \dots v_{i_{\sigma(n)}}$ com $i_{\sigma(1)} \leq \dots \leq i_{\sigma(n)}$. Com isso, $v_{i_1} \dots v_{i_n}$ estão no conjunto β_n, e portanto β_n gera $\mathcal{S}^n(V)$ como espaço vetorial. Em consequência disso, e dos β_n's serem dois a dois disjuntos, temos $\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n(V)$.

3. Como no exemplo anterior, da álgebra tensorial, $\mathcal{S}^n(V) \cdot \mathcal{S}^m(V) = \mathcal{S}^{n+m}(V)$.

4. Verificamos que $\Delta\big(\mathcal{S}^n(V)\big) \subseteq \sum_{k=0}^{n} \otimes \mathcal{S}^k(V) \otimes \mathcal{S}^{n-k}(V)$, por uma conta parecida com a do exemplo da álgebra tensorial.

Proposição 4.1.4. *Seja* $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ *uma biálgebra conexa que admite graduação. Então*

1. *ε anula V_n para todo $n \geq 1$;*

2. *Para $x \in V_n$, temos*

$$\Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j} \ ,$$

em que $x'_{j,i_j} \in V_j$ e $x''_{j,i_j} \in V_{n-j}$.

Demonstração.

1. Se fosse falso, teríamos um $n \geq 1$ minimal tal que $\varepsilon(V_n) \neq 0$. Seja $x \in V_n$ com $\varepsilon(x) \neq 0$. Pela compatibilidade da graduação em relação ao coproduto ($\Delta(B_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l$), temos

$$\Delta(x) = x' \otimes 1_B + 1_B \otimes x'' + \sum_j x'_j \otimes x''_j \ ,$$

com $x', x'' \in B_n$ e $\sum_j x'_j \otimes x''_j \in \sum_{i=1}^{n-1} B_i \otimes B_{n-i}$. Note que $B_i \subseteq \ker(\varepsilon)$ para $0 < i < n$, pela minimalidade do n.

Aplicando $\mathrm{Id} \otimes \varepsilon$, (omitindo isomorfismo $B \otimes \mathbb{K} \cong B$) temos:

$$x = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = x' + 1_B \varepsilon(x'') \ .$$

Então, como a soma dos subespaços B_k's é direta, temos $x = x'$ e $\varepsilon(x'') = 0$.

Fazendo a mesma coisa para $\varepsilon \otimes \mathrm{Id}$, temos $x = x''$ e $\varepsilon(x') = 0$. Dessa forma, temos $x = x' = x''$ e $\varepsilon(x) = 0$, uma contradição. Portanto $\varepsilon(V_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.

2. Dado $x \in B_n$ com $n \geq 1$, temos $\Delta(x) \in \Delta(B_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l$. Portanto

$$\Delta(x) = x' \otimes 1_B + 1_B \otimes x'' + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j} \ ,$$

em que $x'_{j,i_j} \in B_j$ e $x''_{j,i_j} \in B_{n-j}$ e $x', x'' \in B_n$. Aplicando $\mathrm{Id} \otimes \varepsilon$ e $\varepsilon \otimes \mathrm{Id}$ dos dois lados, obtemos

$$\begin{aligned} x &= x' \varepsilon(1_B) + 0 \\ x &= \varepsilon(1_B) x'' + 0 \ . \end{aligned}$$

Logo $x = x' = x''$. □

4.2 Uma biálgebra conexa com graduação é Hopf

Nesta seção, mostraremos que uma biálgebra conexa com graduação admite, automaticamente, uma antípoda. Portanto é uma álgebra de Hopf. É dada uma fórmula recursiva para o cálculo da antípoda. Também temos, como corolário, que essa antípoda é inversível com relação à composição de funções.

Teorema 4.2.1. *Seja B uma biálgebra conexa com graduação. Então B tem uma antípoda e portanto é uma álgebra de Hopf. A antípoda $S\colon B \to B$ é dada recursivamente por:*

$$\begin{aligned} S(1_B) &= 1_B \\ S(x) &= -x - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} S(x'_{j,i_j}) x''_{j,i_j} \\ &= -x - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} S(x''_{j,i_j}) \ , \quad \forall x \in B_n \ , \end{aligned}$$

em que temos $n \geq 1$,

$$\Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j} \ ,$$

e, ainda, $x'_{j,i_j} \in B_j$, $x''_{j,i_j} \in B_{n-j}$.

Demonstração. Seja $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma graduação para B. Defina as transformações lineares $S_n^{(l)}, S_n^{(r)} \colon B_n \to B$ indutivamente por:

$$\begin{aligned} S_0^{(l)}(1_B) &= 1_B \\ S_n^{(l)}(x) &= -x - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} S_j^{(l)}(x'_{j,i_j}) x''_{j,i_j} \ , \quad \forall x \in B_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0^{(r)}(1_B) &= 1_B \\ S_n^{(r)}(x) &= -x - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} S_{n-j}^{(r)}(x''_{j,i_j}) \ , \quad \forall x \in B_n \ , \end{aligned}$$

sendo que

$$\Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j}$$

com $x'_{j,i_j} \in B_j$ e $x''_{j,i_j} \in B_{n-j}$.

Afirmação: Temos, para $n \geq 1$:

$$S_n^{(l)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \mu \circ \big((S_k^{(l)} \circ p_k) \otimes \mathrm{Id} \big) \circ \Delta$$

$$S_n^{(r)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \mu \circ \big(\mathrm{Id} \otimes (S_k^{(r)} \circ p_k) \big) \circ \Delta \ ,$$

com $p_k \colon B \to B_k$ projeção canônica. Portanto, $S_n^{(l)}$ e $S_n^{(r)}$ estão bem definidas.

Prova da afirmação. De fato, dado $x \in B_n$, e denotando $\Delta(x)$ como acima, temos:

$$
\begin{aligned}
S_n^{(l)}(x) &= -x - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} S_j^{(l)}(x'_{j,i_j})x''_{j,i_j} \\
&= -1_B x - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} S_j^{(l)}\big(p_j(x'_{j,i_j})\big)x''_{j,i_j} \\
&= -S_0^{(l)}\big(p_0(1_B)\big)x - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} S_j^{(l)}\big(p_j(x'_{j,i_j})\big)x''_{j,i_j} \\
&= -S_0^{(l)}\big(p_0(1_B)\big)x - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} \left(\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(l)}\left(p_k(x'_{j,i_j})\right)\right) x''_{j,i_j} \\
&= -\big(S_0^{(l)}\circ p_0(1_B)\big)x - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} \left(S_k^{(l)}\circ p_k(x'_{j,i_j})\right) x''_{j,i_j} \\
&= -\mu\left(\big(S_0^{(l)}\circ p_0(1_B)\big)\otimes x + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} \big(S_k^{(l)}\circ p_k(x'_{j,i_j})\big)\otimes x''_{j,i_j}\right) \\
&= -\mu\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}(S_k^{(l)}\circ p_k)\otimes \mathrm{Id}\right)\left(1_B\otimes x + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}\otimes x''_{j,i_j}\right) \\
&\overset{x\in B_n}{=} -\mu\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}(S_k^{(l)}\circ p_k)\otimes \mathrm{Id}\right)\left(x\otimes 1_B + 1_B\otimes x + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}\otimes x''_{j,i_j}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\mu\circ\Big((S_k^{(l)}\circ p_k)\otimes \mathrm{Id}\Big)\circ\Delta(x)\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n^{(r)}(x) &= -x - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}S_{n-j}^{(r)}(x''_{j,i_j}) \\
&= -x1_B - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}S_{n-j}^{(r)}\big(p_{n-j}(x''_{j,i_j})\big) \\
&= -xS_0^{(r)}\big(p_0(1_B)\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}S_{n-j}^{(r)}\big(p_{n-j}(x''_{j,i_j})\big) \\
&= -xS_0^{(r)}\big(p_0(1_B)\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(r)}\big(p_k(x''_{j,i_j})\big) \\
&= -x\big(S_0^{(r)}\circ p_0(1_B)\big) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j} x'_{j,i_j}\big(S_k^{(r)}\circ p_k(x''_{j,i_j})\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mu\left(x\otimes\left(S_0^{(r)}\circ p_0(1_B)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j}x'_{j,i_j}\otimes\left(S_k^{(r)}\circ p_k(x''_{j,i_j})\right)\right)\\
&= -\mu\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Id}\otimes(S_k^{(r)}\circ p_k)\right)\left(x\otimes 1_B+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j}x'_{j,i_j}\otimes x''_{j,i_j}\right)\\
&\overset{x\in B_n}{=} -\mu\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Id}\otimes(S_k^{(r)}\circ p_k)\right)\left(x\otimes 1_B+1_B\otimes x+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i_j}x'_{j,i_j}\otimes x''_{j,i_j}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\mu\circ\left(\mathrm{Id}\otimes(S_k^{(r)}\circ p_k)\right)\circ\Delta(x)\ .
\end{aligned}
$$

Dessa forma, as $S_n^{(l)}$'s e as $S_n^{(r)}$'s estão bem definidas. ⌟

Defina os mapas $S^{(l)}, S^{(r)}\colon B\to B$ pela propriedade universal da soma direta:

$$
\begin{aligned}
S^{(l)}(\textstyle\sum_k x_k) &= \textstyle\sum_k S_k^{(l)}(x_k)\\
S^{(r)}(\textstyle\sum_k x_k) &= \textstyle\sum_k S_k^{(r)}(x_k)\ .
\end{aligned}
$$

Afirmação: $S^{(l)}$ é a antípoda à esquerda.

Prova da afirmação. Seja $x\in B_n$ com $n\geq 1$. Temos:

$$
\begin{aligned}
&\mu\circ(S^{(l)}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(x)\\
&\quad=\mu\circ(S^{(l)}\otimes\mathrm{Id})\left(x\otimes 1_B+1_B\otimes x+\sum_j\sum_{i_j}x'_{j,i_j}\otimes x''_{j,i_j}\right)\\
&\quad=S^{(l)}(x)+x+\sum_j\sum_{i_j}S^{(l)}(x'_{j,i_j})x''_{j,i_j}\\
&\quad=S_n^{(l)}(x)+x+\sum_j\sum_{i_j}S_j^{(l)}(x'_{j,i_j})x''_{j,i_j}\\
&\quad=0=\varepsilon(x)1_B\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\mu\circ(S^{(l)}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(1_B)=\mu\circ(S^{(l)}\otimes\mathrm{Id})(1_B\otimes 1_B)=1_B=\varepsilon(1_B)1_B\ .
$$

Assim, $\mu\circ(S^{(l)}\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta=\eta\circ\varepsilon$, e $S^{(l)}$ é a antípoda à esquerda de B. ⌟

Afirmação: $S^{(r)}$ é a antípoda à direita.

Prova da afirmação. Seja $x \in B_n$ com $n \geq 1$. Temos que:

$$\begin{aligned}
&\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{(r)}) \circ \Delta(x) \\
&\quad = \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{(r)}) \left(x \otimes 1_B + 1_B \otimes x + \sum_j \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j} \right) \\
&\quad = x + S^{(r)}(x) + \sum_j \sum_{i_j} x'_{j,i_j} S^{(r)}(x''_{j,i_j}) \\
&\quad = x + S^{(r)}_n(x) + \sum_j \sum_{i_j} x'_{j,i_j} S^{(r)}_{n-j}(x''_{j,i_j}) \\
&\quad = 0 = \varepsilon(x) 1_B \ ,
\end{aligned}$$

$$\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{(r)}) \circ \Delta(1_B) = \mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{(r)})(1_B \otimes 1_B) = 1_B = \varepsilon(1_B) 1_B \ .$$

Portanto, $\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes S^{(r)}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$, e $S^{(r)}$ é a antípoda à direita de B. ⌟

Então B admite antípodas $S^{(r)}$ e $S^{(l)}$ à direita e à esquerda, respectivamente. Como a álgebra de convolução de B é associativa, as antípodas à direita e à esquerda são iguais:

$$S^{(l)} = S^{(l)} * 1_{\mathrm{Hom}(B,B)} = S^{(l)} * \mathrm{Id} * S^{(r)} = 1_{\mathrm{Hom}(B,B)} * S^{(r)} = S^{(r)} \ .$$

Portanto $S = S^{(r)} = S^{(l)}$ é antípoda para B. □

Corolário 4.2.2. *Seja B uma biálgebra conexa com graduação e que, portanto, é uma álgebra de Hopf. A antípoda S de B é inversível, e S^{-1} é a antípoda de B^{op} e de B^{cop}.*

Demonstração. Aplicamos o teorema para a biálgebra conexa com graduação B^{op}, obtendo uma antípoda S' para B^{op}. Pelas proposições 2.5.2 e 2.5.3, temos S inversível com $S' = S^{-1}$. Também temos S' antípoda para B^{cop}. □

4.3 Biálgebras conexas com filtração

Para o restante do trabalho também precisaremos do conceito de conexidade por filtração de uma biálgebra. Diz-se que a biálgebra é conexa com filtração quando admite uma espécie de decomposição da biálgebra, a "filtração", que mantém compatibilidade com a estrutura de biálgebra.

Definição 4.3.1. Seja B uma biálgebra. Dizemos que B é *conexa com filtração* se existir uma família $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ de subespaços vetoriais de B, com $B_n \subsetneq B_{n+1}$, chamada *filtração*, tal que:

1. $B_0 = \mathbb{K} \cdot 1_B$;
2. $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$;
3. $B_n B_m \subseteq B_{m+n}$, $\forall m, n \geq 0$;
4. $\Delta(B_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l$, $\forall n \geq 0$.

Observação 4.3.2. Uma biálgebra conexa com graduação $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B'_n$ também é conexa com filtração. A mesma é dada por $B_n = \bigoplus_{k=0}^{n} B'_k$, e temos $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{k=0}^{n} B'_k$.

Exemplo 4.3.3 (Álgebra envolvente universal)**.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf. Também é conexa com filtração:

$$\mathcal{U}_n = \operatorname{span}(\{g_1 \dots g_m \mid m \leq n,\ g_1, \dots, g_m \in \mathfrak{g}\} \cup \{1_{\mathbb{K}}\}) \ .$$

De fato, $\mathcal{U}_0 = \mathbb{K}1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}_n$. Além disso, o produto é compatível com a filtração, pois $\mathcal{U}_n\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_{m+n}$. Resta checar que o coproduto é compatível com a filtração, o que ocorre pois

$$\begin{aligned} \Delta(g_1 \dots g_n) =& (g_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_1) \cdots (g_n \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_n) \\ =& \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \left(g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(k)}\right) \otimes \left(g_{\sigma(k+1)} \cdots g_{\sigma(n)}\right) \\ \in& \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k \otimes \mathcal{U}_{n-k} \end{aligned}$$

em que $S_{n,k}$ é o conjunto de permutações σ do conjunto $\{1, \dots, n\}$ tais que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$ (σ é uma permutação do tipo "shuffle")[3].

[3] Se $k = 0$ ou $k = n$, o conjunto de permutações $S_{n,k}$ só tem uma permutação, a identidade. O termo $\left(g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(k)}\right) \otimes \left(g_{\sigma(k+1)} \dots g_{\sigma(n)}\right)$ fica igual a $1_{\mathbb{K}} \otimes (g_1 \dots g_n)$ ou a $(g_1 \dots g_n) \otimes 1_{\mathbb{K}}$, respectivamente.

Exemplo 4.3.4 (Álgebra simétrica)**.** Seja V um espaço vetorial. $\mathcal{S}(V)$ é a álgebra simétrica (álgebra livre comutativa, associativa e com unidade, ou ainda, álgebra polinomial) gerada por V. Também podemos olhar para $\mathcal{S}(V)$ como sendo a álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(V)$, com V sendo considerado como álgebra de Lie com colchete trivial ($[v, w] := 0,\ \forall v, w \in V$).

Sendo uma álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie, é conexa com filtração, conforme o exemplo anterior.

4.4 Teorema de Milnor-Moore

O teorema de Milnor-Moore nos diz que uma biálgebra conexa com filtração B, sob certas hipóteses, pode ser recuperada a partir da álgebra de Lie dos seus elementos primitivos por meio do recobrimento universal. Em símbolos, $B \cong \mathcal{U}\big(\mathrm{P}(V)\big)$ como biálgebras. Como consequência disso, B é uma álgebra de Hopf, com antípoda herdada da álgebra de Hopf $\mathcal{U}\big(\mathrm{P}(V)\big)$.

Começaremos enunciando alguns lemas e proposições que nos ajudarão a provar o teorema de Milnor-Moore. O primeiro lema é consequência da compatibilidade da filtração com o coproduto da biálgebra.

Lema 4.4.1. *Seja* $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ *uma biálgebra conexa com filtração. Seja* $a \in B_n$*. Então:*

$$\Delta(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x$$

em que $x \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$*. Em particular,* $B_1 \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B)$*, em que* $\mathrm{P}(B)$ *é a álgebra de Lie dos elementos primitivos de* B*.*

Demonstração. A filtração de B é compatível com a estrutura de biálgebra, então $\Delta(a) \in \sum_{k=0}^{n} B_k \otimes B_{n-k} \subseteq B_n \otimes B_0 + B_0 \otimes B_n + B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Portanto $\Delta(a) = b \otimes 1_B + 1_B \otimes c + y$, com $b, c \in B_n$ e $y \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Agora note que, usando a propriedade da counidade, temos

$$\begin{aligned} a &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta(a)) = b\varepsilon(1_B) + 1_B\varepsilon(c) + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(y) \\ &= b + \underbrace{\varepsilon(c)1_B + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(y)}_{\in B_{n-1}}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(a)) = \varepsilon(b)1_B + \varepsilon(1_B)c + (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(y) \\ &= c + \underbrace{\varepsilon(b)1_B + (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(y)}_{\in B_{n-1}}\ . \end{aligned}$$

Assim, $b - a, c - a \in B_{n-1}$. Então:

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= b \otimes 1_B + 1_B \otimes c + y \\ &= a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + (b-a) \otimes 1_B + 1_B \otimes (c-a) + y \\ &= a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x \ ,\end{aligned}$$

com $x = (b-a) \otimes 1_B + 1_B \otimes (c-a) + y \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$.
Para a outra parte do lema, temos que $a \in B_1$ implica $\Delta(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + \lambda(1_B \otimes 1_B)$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Portanto

$$\begin{aligned}\Delta(a + \lambda 1_B) &= \Delta(a) + \lambda\Delta(1_B) \\ &= a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + \lambda(1_B \otimes 1_B) + \lambda(1_B \otimes 1_B) \\ &= (a + \lambda 1_B) \otimes 1_B + 1_B \otimes (a + \lambda 1_B) \ ,\end{aligned}$$

e $a + \lambda 1_B$ é um elemento primitivo. Assim, $a = -\lambda 1_B + a + \lambda 1_B \in \mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B)$. A soma é direta porque $\mathbb{K}1_B \cap \mathrm{P}(B) = 0$. De fato, se $\lambda 1_B \in \mathrm{P}(B)$, então $\Delta(\lambda 1_B) = (\lambda 1_B) \otimes 1_B + 1_B \otimes (\lambda 1_B)$ e $\Delta(\lambda 1_B) = \lambda(1_B \otimes 1_B)$. Subtraindo, $0 = \lambda(1_B \otimes 1_B)$, e $\lambda = 0$, e obtemos o desejado. □

Iremos introduzir uma notação auxiliar. Removeremos o termo $a \otimes 1_B + 1_B \otimes a$ do Δ original, obtendo uma função coassociativa Δ', mas que não respeita o axioma da counidade, nem é morfismo de álgebras.

Definição 4.4.2. Dado $a \in B$, com B biálgebra conexa com filtração, pomos:

$$\Delta'(a) := \Delta(a) - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a \ .$$

Definimos também:

$$\begin{aligned}B' &:= \ker(\varepsilon) \\ B'_n &:= B_n \cap \ker(\varepsilon) \ .\end{aligned}$$

Observação 4.4.3. $\Delta'(1_B) = -1_B \otimes 1_B$, portanto Δ' não é morfismo de álgebras.

Observação 4.4.4. Se tentarmos verificar o axioma da counidade, teremos

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta'(a)) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(a) - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a) \\ &= a - \varepsilon(a)1_B - a1_{\mathbb{K}} = -\varepsilon(a)1_B \ ,\end{aligned}$$

e de forma análoga, $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta'(a)) = -\varepsilon(a)1_B$, de modo que não vale a propriedade da counidade.

Observação 4.4.5. Um elemento $a \in B$ é primitivo se e somente se pertence ao núcleo de Δ'.

Proposição 4.4.6.

1. *Δ' é coassociativo;*
2. *Δ' é cocomutativo se Δ o for.*

Demonstração.

1. Seja $a \in B$. Temos:

$$\begin{aligned}&(\Delta' \otimes \mathrm{Id})(\Delta'(a))\\ &\quad =(\Delta' \otimes \mathrm{Id})(a_{(1)} \otimes a_{(2)} - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a)\\ &\quad =a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)} - a_{(1)} \otimes 1_B \otimes a_{(2)} - 1_B \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)}\\ &\qquad - a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes 1_B + a \otimes 1_B \otimes 1_B + 1_B \otimes a \otimes 1_B + 1_B \otimes 1_B \otimes a \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Id} \otimes \Delta')(\Delta'(a))\\ &\quad =(\mathrm{Id} \otimes \Delta')(a_{(1)} \otimes a_{(2)} - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a)\\ &\quad =a_{(1)} \otimes a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} - a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes 1_B - a_{(1)} \otimes 1_B \otimes a_{(2)}\\ &\qquad + a \otimes 1_B \otimes 1_B - 1_B \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)} + 1_B \otimes a \otimes 1_B + 1_B \otimes 1_B \otimes a \ .\end{aligned}$$

Portanto $(\mathrm{Id} \otimes \Delta')(\Delta'(a)) = (\Delta' \otimes \mathrm{Id})(\Delta'(a))$.

2. Seja $a \in B$. Como Δ é cocomutativo,

$$\begin{aligned}\tau \circ \Delta'(a) &= \tau(\Delta(a) - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a)\\ &= \Delta(a) - 1_B \otimes a - a \otimes 1_B\\ &= \Delta'(a) \ .\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir refere-se à uma espécie de projeção de B em B'. Uma consequência que será usada se refere ao fato de o Δ' aplicado nos B'_n "baixar o grau", recaindo em $B'_{n-1} \otimes B'_{n-1}$.

Proposição 4.4.7. *Seja $\pi\colon B \to B'$ a projeção $\pi(a) = a - \varepsilon(a)1_B$. Então:*

$$(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta' \circ \pi \ .$$

Em particular, temos:

$$\Delta'(B'_n) \subseteq B'_{n-1} \otimes B'_{n-1} \ .$$

Demonstração. Primeiramente, note que a imagem de π cai em $B' = \ker(\varepsilon)$. De fato, dado $a \in B$, temos $\varepsilon(\pi(a)) = \varepsilon(a - \varepsilon(a)1_B) = \varepsilon(a) - \varepsilon(a) = 0$.

Também note que π é sobrejetiva, pois dado $a' \in B'$, temos $\varepsilon(a') = 0$ e $a' = a' - \varepsilon(a')1_B = \pi(a') \in \mathrm{Im}(\pi)$.

Seja $a \in B$. Então:

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi)(\Delta(a)) &= (\pi \otimes \pi)(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\
&= (a_{(1)} - \varepsilon(a_{(1)})1_B) \otimes (a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})1_B) \\
&= a_{(1)} \otimes a_{(2)} + \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})(1_B \otimes 1_B) + \\
&\quad - \varepsilon(a_{(1)})1_B \otimes a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)} \otimes 1_B \\
&= \Delta(a) + \varepsilon(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)})(1_B \otimes 1_B) + \\
&\quad - 1_B \otimes \varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)} \otimes 1_B \\
&= \Delta(a) + \varepsilon(a)1_B \otimes 1_B - 1_B \otimes a - a \otimes 1_B \\
&= \Delta'(a) - \varepsilon(a)\Delta'(1_B) \\
&= \Delta'\big(a - \varepsilon(a)1_B\big) \\
&= \Delta'(\pi(a)) \ .
\end{aligned}$$

Portanto $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta' \circ \pi$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta'(B'_n) &= \Delta' \circ \pi(B_n) = (\pi \otimes \pi)(\Delta(B_n)) \\
&\subseteq (\pi \otimes \pi)\left(\sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l\right) = B'_{n-1} \otimes B'_{n-1} \ ,
\end{aligned}$$

pois $\pi(B_0) = \pi(\mathbb{K}1_B) = 0$ e $B_k \subseteq B_{n-1}$ para $k = 1, \ldots, n-1$. □

A proposição a seguir fornece que a counidade ε anula os elementos primitivos. Isso ocorre em qualquer biálgebra, conforme o argumento a seguir.

Proposição 4.4.8. *Para toda biálgebra B vale que $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$.*

Demonstração. Para todo elemento primitivo $a \in \mathrm{P}(B)$ de uma biálgebra B, temos $\varepsilon(a) = 0$, ou seja, $a \in \ker(\varepsilon)$. Isso porque $\Delta(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a$ e $\varepsilon(a) = \varepsilon(a\varepsilon(1_B) + 1_B\varepsilon(a)) = \varepsilon(a) + \varepsilon(a)$, onde na primeira igualdade expandimos a pelo axioma da counidade. Então $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$. □

Aqui voltamos a uma biálgebra conexa. Obtemos outra informação decorrente da existência de uma filtração: que a counidade anula um certo pedaço de B, possibilitando a decomposição indicada abaixo.

Lema 4.4.9. *Seja* $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ *uma biálgebra conexa. Então:*

$$B = B_0 \oplus \ker(\varepsilon) = \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon) \ .$$

Em consequência disso,

$$B = \mathbb{K}1_B + \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \ .$$

Demonstração. De fato, provemos por indução em n que $B_n \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$. O caso $n = 1$ resulta do lema 4.4.1 e de $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$. Supomos como hipótese de indução que $B_{n-1} \subseteq \mathbb{K} \oplus \ker(\varepsilon)$. Para B_n, temos que todo $a \in B_n$ pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} a &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta(a)) \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x) \\ &= a + 1_B\varepsilon(a) + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(x) \end{aligned}$$

usando o axioma da counidade e o lema 4.4.1, com $x \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Temos que $x' := (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(x) \subseteq B_{n-1} \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$. Então, aplicando ε em a, temos

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(a) + \varepsilon(a) + \varepsilon(x') \implies \varepsilon(a + x') = 0$$

e portanto $a = (a + x') - x' \in \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$.
A soma é direta porque $\mathbb{K}1_B \cap \ker(\varepsilon) = 0$, tendo em vista que $\lambda 1_B \in \ker(\varepsilon) \implies \varepsilon(\lambda 1_B) = 0 \implies \lambda 1_{\mathbb{K}} = 0 \implies \lambda = 0 \implies \lambda 1_B = 0$. □

O próximo lema faz uso da álgebra simétrica $\mathcal{S}(V)$. Mostra-se uma condição de injetividade para que um morfismo qualquer de coálgebras com domínio nas álgebras simétricas. A informação da injetividade de $\ell\colon \mathcal{S}(V) \to B$ está contida na injetividade em $\mathbb{K} \oplus V$ apenas!

Lema 4.4.10. *Seja* C *uma coálgebra. Se* $\ell\colon \mathcal{S}(V) \to C$ *é um morfismo de coálgebras cuja restrição a* $\mathbb{K} \oplus V$ *é injetiva, então* ℓ *é injetivo.*

Demonstração. Considere a filtração de $\mathcal{S}(V)$ dada por $S_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{S}^k(V)$, em que $\mathcal{S}^0(V) = \mathbb{K}$, $\mathcal{S}^1(V) = V$ e $\mathcal{S}^k(V)$ é o subespaço gerado pelos monômios de grau k. Com essa filtração, $\mathcal{S}(V)$ é uma biálgebra conexa. Vamos provar por indução em n que ℓ é injetiva em S_n.

O caso $n = 1$ vale por hipótese, já que $S_1 = \mathcal{S}^0(V) \oplus \mathcal{S}^1(V) = \mathbb{K} \oplus V$. Suponha então que ℓ seja injetiva em S_n, com $n \geq 1$. Iremos provar que

ℓ é injetiva em S_{n+1} mostrando que o núcleo da restrição a esse espaço é nulo.

Seja $x \in S_{n+1}$ pertencente ao núcleo de ℓ, ou seja, $\ell(x) = 0$. Se fosse $x = \lambda 1_B$, então temos $\ell(x) = 0 \implies x = 0$ automaticamente. Então assumimos também que $x \neq \mathbb{K}1_B$. Pelo lema 4.4.9, temos que $x \in \ker(\ell)$. Além disso:

$$\begin{aligned}
(\ell \otimes \ell)(\Delta'_{\mathcal{S}(V)}(x)) =& (\ell \otimes \ell)\big(\Delta_{\mathcal{S}(V)}(x) - x \otimes 1_{\mathcal{S}(V)} - 1_{\mathcal{S}(V)} \otimes x\big) \\
=& (\ell \otimes \ell)\big(\Delta_{\mathcal{S}(V)}(x)\big) - \ell(x) \otimes \ell(1_{\mathcal{S}(V)}) - \ell(1_{\mathcal{S}(V)}) \otimes \ell(x) \\
=& (\ell \otimes \ell)\big(\Delta_{\mathcal{S}(V)}(x)\big) \\
=& \Delta_C(\ell(x)) \\
=& \Delta_C(0) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Mas, pela proposição 4.4.7, temos $\Delta'_{\mathcal{S}(V)}(S'_{n+1}) \subseteq S'_n \otimes S'_n \subseteq S_n \otimes S_n$, portanto $\Delta'_{\mathcal{S}(V)}(x) \in S'_n \otimes S'_n$. Pela hipótese de indução, ℓ é injetiva em S_n, e isso implica que $\ell \otimes \ell$ é injetiva em $S_n \otimes S_n$. De fato, $\ker(\ell \otimes \ell) = S_n \otimes \ker(\ell) + \ker(\ell) \otimes S_n = 0$, considerando ℓ restrita em S_n.

Então, temos:

$$(\ell \otimes \ell)(\Delta'_{\mathcal{S}(V)}(x)) = 0 \implies \Delta'_{\mathcal{S}(V)}(x) = 0 \ ,$$

e isso implica que x é primitivo, conforme a observação 4.4.5. Já que $\mathcal{S}(V) = \mathcal{U}(V)$ (com o colchete de Lie nulo em V), e como os elementos primitivos de uma álgebra envolvente universal são os próprios elementos da álgebra de Lie, temos que $x \in V$. Portanto, lembrando que $\ell(x) = 0$ e que ℓ é injetiva em S_n, temos que $x = 0$. Dessa forma, ℓ é injetiva em S_{n+1}. $\square$

A seguir temos um lema bastante interessante sobre a chamada *aplicação de simetrização*, definida abaixo. Surpreendentemente, essa aplicação é um isomorfismo de coálgebras (apesar de não ser morfismo de álgebras).

Lema 4.4.11. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathbb{K}$ corpo de característica* 0. *A* aplicação de simetrização *$\rho\colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, definida nos monômios $g_1 \dots g_n \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ por*

$$\rho(g_1 \dots g_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)}$$
$$\rho(1_{\mathbb{K}}) := 1_{\mathbb{K}} \ ,$$

é um isomorfismo de coálgebras. $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ é a álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$, que aqui é visto apenas como espaço vetorial.

Demonstração. Primeiramente, checamos que ρ está bem definida.

Afirmação: ρ está bem definida.

Prova da afirmação. Temos $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$, com I o ideal gerado pelos elementos $ab - ba - [a,b]_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})} = ab - ba \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Usaremos a propriedade universal do quociente para mostrar a boa definição.

Seja $\rho' \colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dada nos monômios $v := v_1 \dots v_n \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ por

$$\rho'(v_1 \dots v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(v) \ .$$

Fazemos aqui um pequeno abuso de notação, escrevendo $\sigma(v) = v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)}$.

Precisamos mostrar que $I \subseteq \ker(\rho')$, isto é, que ρ' anula I. De fato, basta mostrarmos que ρ' anula elementos da forma

$$v := v_1 \dots v_k (ab - ba) v_{k+3} \dots v_n \ , \ \text{ com } n \geq 2 \text{ e } k \leq n-2 \ .$$

Entendemos aqui que:

$$\begin{array}{lcl} k = 0 & \Longrightarrow & v_1 \dots v_k(ab - ba)v_{k+3} \dots v_n := (ab - ba)v_3 \dots v_n \\ k = n-2 & \Longrightarrow & v_1 \dots v_k(ab - ba)v_{k+3} \dots v_n := v_1 \dots v_{n-2}(ab - ba) \\ n = 2 & \Longrightarrow & v_1 \dots v_k(ab - ba)v_{k+3} \dots v_n := ab - ba \ . \end{array}$$

Escreva $v = x - y$, com:

$$x = x_1 \dots x_n := v_1 \dots v_k \ a \ b \ v_{k+3} \dots v_n$$
$$y = y_1 \dots y_n := v_1 \dots v_k \ b \ a \ v_{k+3} \dots v_n \ .$$

Seja $\gamma = (k+1 \ k+2) \in S_n$ a permutação que troca $k+1$ e $k+2$. Temos, em todos os casos, que

$$y = \gamma(x) \ .$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \rho'(v) &= \rho'(x) - \rho'(y) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(y) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(\gamma(x)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x) - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Assim, ρ' anula I, e ρ fica bem definida. ⌟

Afirmação: ρ é morfismo de coálgebras.

Prova da afirmação. Mostraremos que ρ preserva o coproduto e a counidade.

(ρ preserva coproduto:)

Note que para $1_{\mathbb{K}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ vale:

$$(\rho \otimes \rho) \circ \Delta_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} = \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \circ \rho(1_{\mathbb{K}}) \ .$$

Seja $g_1 \dots g_n \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ um monômio. Calculamos:

$$\begin{aligned}
&(\rho \otimes \rho) \circ \Delta_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}(g_1 \dots g_n) \\
&= (\rho \otimes \rho)\big((g_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_1) \cdots (g_n \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_n)\big) \\
&= (\rho \otimes \rho) \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(k)} \otimes g_{\sigma(k+1)} \cdots g_{\sigma(n)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \rho\big(g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(k)}\big) \otimes \rho\big(g_{\sigma(k+1)} \cdots g_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \sum_{\gamma \in S_k} \sum_{\delta \in S_{n-k}} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} g_{\gamma(\sigma(1))} \cdots g_{\gamma(\sigma(k))} \otimes g_{\delta(\sigma(k+1))} \cdots g_{\delta(\sigma(n))} \ .
\end{aligned}$$

Também calculamos:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \circ \rho(g_1 \dots g_n) \\
&= \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\nu \in S_n} g_{\nu(1)} \cdots g_{\nu(n)} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\nu \in S_n} \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\big(g_{\nu(1)}\big) \dots \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\big(g_{\nu(n)}\big) \\
&= \sum_{\nu \in S_n} \frac{1}{n!} \big(g_{\nu(1)} \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_{\nu(1)}\big) \cdots \big(g_{\nu(n)} \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_{\nu(n)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu \in S_n} \sum_{\varsigma \in S_{n,k}} \frac{1}{n!} g_{\nu(\varsigma(1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(k))} \otimes g_{\nu(\varsigma(k+1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(n))} \ .
\end{aligned}$$

Seja $k \in \{0, \ldots, n\}$ fixo. Se $k = 0$ ou $k = n$, os termos

$$\sum_{\sigma \in S_{n,k}} \sum_{\gamma \in S_k} \sum_{\delta \in S_{n-k}} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} g_{\gamma(\sigma(1))} \cdots g_{\gamma(\sigma(k))} \otimes g_{\delta(\sigma(k+1))} \cdots g_{\delta(\sigma(n))}$$
$$\sum_{\nu \in S_n} \sum_{\varsigma \in S_{n,k}} \frac{1}{n!} g_{\nu(\varsigma(1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(k))} \otimes g_{\nu(\varsigma(k+1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(n))}$$

correspondem, ambos, a

$$\sum_{\gamma \in S_n} \frac{1}{n!} 1_{\mathbb{K}} \otimes g_{\gamma(1)} \cdots g_{\gamma(n)} \quad (k = 0)$$
$$\sum_{\gamma \in S_n} \frac{1}{n!} g_{\gamma(1)} \cdots g_{\gamma(n)} \otimes 1_{\mathbb{K}} \quad (k = n) \ .$$

Consideramos, então, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Vamos comparar os termos:

$$g_{\gamma(\sigma(1))} \cdots g_{\gamma(\sigma(k))} \otimes g_{\delta(\sigma(k+1))} \cdots g_{\delta(\sigma(n))} \ , \quad \sigma \in S_{n,k} \ , \quad \gamma \in S_k \ , \quad \delta \in S_{n-k}$$

com

$$g_{\nu(\varsigma(1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(k))} \otimes g_{\nu(\varsigma(k+1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(n))} \ , \quad \nu \in S_n \ , \quad \varsigma \in S_{n,k} \ .$$

Precisamos saber que relação existe entre estas permutações:

Tipo 1: $(\gamma \times \delta) \circ \sigma$, com $\sigma \in S_{n,k}, \ \gamma \in S_k, \ \delta \in S_{n-k}$;

Tipo 2: $\nu \circ \varsigma$, com $\nu \in S_n, \ \varsigma \in S_{n,k}$.

Escrevemos abaixo o número de permutações de cada tipo (contando repetições, isto é, maneiras diferentes de se obter a mesma permutação):

Tipo 1: $|S_{n,k}| \cdot |S_k| \cdot |S_{n-k}| = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$;

Tipo 2: $|S_n| \cdot |S_{n,k}| = n! \cdot \binom{n}{k}$.

Mostramos que cada permutação do tipo 1 pode ser obtida por exatamente $\binom{n}{k}$ permutações do tipo 2. De fato, seja $(\gamma \times \delta) \circ \sigma$ uma permutação do tipo 1. Para qualquer uma das $\binom{n}{k}$ permutações $\varsigma \in S_{n,k}$, existe uma única permutação $\nu \in S_n$ tal que $\nu \circ \varsigma = (\gamma \times \delta) \circ \sigma$; é a permutação dada por $\nu = (\gamma \times \delta) \circ \sigma \circ \varsigma^{-1}$. Portanto, alcançamos uma dada permutação do tipo 1 de exatamente $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes usando permutações do tipo 2. E, portanto, cada termo $g_{\gamma(\sigma(1))} \cdots g_{\gamma(\sigma(k))} \otimes g_{\delta(\sigma(k+1))} \cdots g_{\delta(\sigma(n))}$ é alcançado de $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes por $g_{\nu(\varsigma(1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(k))} \otimes g_{\nu(\varsigma(k+1))} \cdots g_{\nu(\varsigma(n))}$.

Assim, podemos identificar:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu\in S_n}\sum_{\varsigma\in S_{n,k}} \frac{1}{n!} g_{\nu(\varsigma(1))}\cdots g_{\nu(\varsigma(k))}\otimes g_{\nu(\varsigma(k+1))}\cdots g_{\nu(\varsigma(n))}\\
&=\sum_{\sigma\in S_{n,k}}\sum_{\gamma\in S_k}\sum_{\delta\in S_{n-k}} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} g_{\gamma(\sigma(1))}\cdots g_{\gamma(\sigma(k))}\otimes g_{\delta(\sigma(k+1))}\cdots g_{\delta(\sigma(n))}\\
&=\sum_{\sigma\in S_{n,k}}\sum_{\gamma\in S_k}\sum_{\delta\in S_{n-k}} \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} g_{\gamma(\sigma(1))}\cdots g_{\gamma(\sigma(k))}\otimes g_{\delta(\sigma(k+1))}\cdots g_{\delta(\sigma(n))}\ .
\end{aligned}$$

Isso implica na igualdade

$$(\rho\otimes\rho)\circ\Delta_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}(g_1\dots g_n)=\Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\circ\rho(g_1\dots g_n)\ .$$

Portanto $(\rho\otimes\rho)\circ\Delta_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}=\Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\circ\rho$.

(ρ preserva counidade:)

Para $1_{\mathbb{K}}\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, temos:

$$\varepsilon_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}\circ\rho(1_{\mathbb{K}})=\varepsilon_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}(1_{\mathbb{K}})=1_{\mathbb{K}}=\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(1_{\mathbb{K}})\ .$$

Agora seja $g_1\dots g_n\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ um monômio. Temos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}\circ\rho(g_1\dots g_n)&=\varepsilon_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(n)}\right)\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}0\\
&=0\\
&=\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(g_1\dots g_n)\ .
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\varepsilon_{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}\circ\rho=\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$. ⌟

Afirmação: ρ é injetiva.

Prova da afirmação. Usaremos o lema 4.4.10. O morfismo de coálgebras ρ tem domínio na álgebra simétrica $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Note que ρ restrita a $\mathbb{K}\oplus\mathfrak{g}\subseteq\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ se reduz à identidade $\mathbb{K}\oplus\mathfrak{g}\subseteq\mathcal{S}(\mathfrak{g})\to\mathbb{K}\oplus\mathfrak{g}\subseteq\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$\rho(\lambda+g)=\rho(\lambda)+\rho(g)=\lambda+\frac{1}{1!}g=\lambda+g\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\ .$$

Mostraremos, então, que $\ker(\rho) = 0$. Seja dado $\lambda + g \in \ker(\rho)$, em que $\lambda \in \mathbb{K} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $g \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pelo corolário 3.3.2 do teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt, temos que as inclusões naturais $i_u \colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ e $i_s \colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ são injetoras. Portanto

$$\begin{aligned} \lambda + g = \lambda + i_u(g) = 0 \text{ em } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) &\overset{\text{a soma é direta}}{\Longrightarrow} \lambda = 0, i_u(g) = 0 \text{ em } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ &\overset{i_u \text{ é injetiva}}{\Longrightarrow} \lambda = 0 \text{ em } \mathbb{K} \text{ e } g = 0 \text{ em } \mathfrak{g} \\ &\Longrightarrow \lambda = 0, i_s(g) = 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \\ &\Longrightarrow \lambda + g = \lambda + i_s(g) = 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

e $\ker(\rho) = 0$. ⌟

Afirmação: ρ é sobrejetiva.

Prova da afirmação. Considere as filtrações $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$ vistas nos exemplos 4.3.4 e 4.3.3. Faremos indução em n para mostrar que

$$\rho_n \colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{U}_n$$

é sobrejetiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Em consequência disso, ρ é sobrejetiva.

($n = 1$:) Temos que $\rho_1 \colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{U}_1$ é, como vimos antes, a identidade $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que é sobrejetiva.

Seja $n \geq 1$. Supomos que $\rho_n \colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{U}_n$ é sobrejetiva (HI). Mostraremos o caso $n + 1$:

($n + 1$:) De fato, seja $\{u_i\}_{i \in I}$ base ordenada de $\mathfrak{g}$ e

$$\{u_{i_1} \dots u_{i_k} \mid i_1 \leq \dots \leq i_k \text{ em I}\}$$

base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pelo teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt (teorema 3.3.1). Temos que

$$\{u_{i_1} \dots u_{i_k} \mid i_1 \leq \dots \leq i_k \text{ em I}, \ k \leq n + 1\}$$

é base do espaço $\mathcal{U}_{n+1}$ gerado pelos monômios de grau $\leq n + 1$. Já temos, pela (HI), que os monômios de grau $\leq n$ de $\mathcal{U}_{n+1}$ são alcançados por ρ_n e, portanto, por ρ. Basta, então, mostrar que todos os monômios com grau $n + 1$ da base são alcançados por ρ_{n+1}.

Considere um monômio da base $u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}}$. Podemos, com o auxílio do comutador $[,]$, permutar quaisquer dois termos do monômio. Por exemplo, podemos escrever

$$u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} = u_{i_2}u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} + [u_{i_1},u_{i_2}]\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} \ .$$

Como qualquer permutação $\sigma \in S_{n+1}$ é pode ser formada por combinação de permutações de elementos contíguos, podemos escrever

$$u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} = u_{i_{\sigma(1)}}\dots u_{i_{\sigma(n)}}u_{i_{\sigma(n+1)}} + \text{ termos com [,] (grau} \leq n) \ .$$

Portanto:

$$\begin{aligned} u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_{n+1}} u_{i_{\sigma(1)}}\dots u_{i_{\sigma(n)}}u_{i_{\sigma(n+1)}} + \text{ termos com [,]} \\ &= \underbrace{\rho(u_{i_1}\dots u_{i_n}u_{i_{n+1}})}_{\in \mathrm{Im}(\rho)} + \underbrace{\text{termos com [,]}}_{\in\mathrm{Im}(\rho)\ (\text{grau} \leq n \text{ e (HI)})} \in \mathrm{Im}(\rho) \end{aligned}$$

Logo ρ é sobrejetora. ⌟

Com isso, fica provado o lema. □

Vamos à prova do teorema central desta seção.

Teorema 4.4.12 (Milnor-Moore)**.** *Seja B uma biálgebra conexa e cocomutativa, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0. Então*

$$B \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \ ,$$

e o isomorfismo é $J\colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$, a extensão da inclusão canônica $j\colon \mathrm{P}(B) \to B$ via propriedade universal da álgebra envolvente (ver definição 3.2.1).

Demonstração. Começaremos vendo que J é um morfismo de biálgebra. Em seguida, mostramos a injetividade e sobrejetividade de J.

(J é um morfismo de biálgebras:)

Usaremos o lema 3.2.5 para obter que a extensão J da inclusão canônica j é um morfismo de biálgebras. De fato, temos que $j\colon \mathrm{P}(B) \to B$ é morfismo de álgebras de Lie, com $\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{P}(B)$. Do lema mencionado, obtemos que $J\colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$ é um morfismo de biálgebras.

A injetividade é mais fácil de ser demonstrada lançando-se mão de um truque. Faremos essa demonstração primeiro.

(J é injetora:)

Considere o morfismo de coálgebras $J \circ \rho\colon \mathcal{S}\big(\mathrm{P}(B)\big) \to B$. Sua restrição a $\mathbb{K} \oplus \mathrm{P}(B)$ é injetiva, pois é igual à identidade. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathrm{P}(B)$, temos:

$$\begin{aligned} J \circ \rho(\lambda + b) &= J\big(\rho(\lambda)\big) + J\big(\rho(b)\big) \\ &= J(\lambda) + J\left(\tfrac{1}{1!} b\right) \\ &= \lambda + J(b) \\ &= \lambda + b \ . \end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 4.4.10, temos que $J \circ \rho$ é injetiva em todo $\mathcal{S}\big(\mathrm{P}(B)\big)$. Como ρ é isomorfismo, segundo o lema 4.4.11, conclui-se que J é injetiva.

Vamos à sobrejetividade. Esta é a parte mais trabalhosa da demonstração, e para mostrá-la, será usado o teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt.

(J é sobrejetora:)

Seja $\{a_i\}_{i \in I}$ uma base ordenada para a álgebra de Lie $\mathrm{P}(B)$. Pelo teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt,

$$\left\{ a^r \mid r \in \mathbb{N}^{(I)} \right\}$$

é base para $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$, em que denotamos $a^r := a_{i_1}^{r_1} \ldots a_{i_k}^{r_k}$, com $i_i < \ldots < i_k$ e $r_1, \ldots, r_k$ as entradas não nulas do multi-índice $r \in \mathbb{N}^{(I)}$. Se $r = 0$, denotamos $a^r = 1_{\mathbb{K}}$. Também definimos $r! := r_1! \cdots r_k!$.

Afirmação: Os elementos

$$\left\{ A^r := \tfrac{1}{r!} J(a^r) \mid \ r \in \mathbb{N}^{(I)} \right\}$$

são LI em B e formam uma base para a $\mathrm{Im}(J)$.

Prova da afirmação. De fato, temos:

$$\sum_r \alpha_r A^r = 0 \text{ em } B \implies J\left(\sum_r \alpha_r \tfrac{1}{r!} a^r\right) = 0$$

$$\overset{J \text{ é injetiva}}{\implies} \sum_r \alpha_r \tfrac{1}{r!} a^r = 0 \implies \alpha_r \tfrac{1}{r!} \ , \ \forall r \implies \alpha_r = 0 \ , \ \forall r \ ,$$

portanto são LI. Geram $\mathrm{Im}(J)$ pois dado $J(u) \in \mathrm{Im}(J)$, com $u \in \mathcal{U}\big(\mathrm{P}(B)\big)$, temos $u = \sum_r \alpha_r a^r$, e aplicando J, temos

$$J(u) = J\left(\sum_r \alpha_r a^r\right) = \sum_r (\alpha_r r!) J\big(\tfrac{1}{r!} a^r\big) = \sum_r (\alpha_r r!) A^r \ .$$

⌟

Como B é uma biálgebra conexa, pelo lema 4.4.9, temos $B = \mathbb{K}1_B + \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n$. Sabemos que $\mathbb{K}1_B \subseteq \mathrm{Im}(J)$, já que J é morfismo de biálgebras (e em particular, $1_B = J(1_{\mathrm{P}(B)})$). É suficiente, então, provar que $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$ para todo $n \geq 1$. Iremos provar por indução em n.

Afirmação: $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$ para todo $n \geq 1$.

Prova da afirmação. Faremos indução em n. O caso $n = 1$ é consequência do lema 4.4.1; temos

$$B'_1 = B_1 \cap \ker(\varepsilon) \subseteq \underbrace{(\mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B))}_{\subseteq \mathrm{Im}(J)} \cap \ker(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Im}(J) \ .$$

Supomos que para $n \geq 1$ vale $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$ (HI). Mostramos agora que vale $B'_{n+1} \subseteq \mathrm{Im}(J)$.

Seja $a \in B'_{n+1}$ fixo. Dividiremos a prova de que $a \in \mathrm{Im}(J)$ em 5 etapas.

Etapa 1: cálculo de $\Delta'_B(a)$.

Tem-se $\Delta'_B(a) \in B'_n \otimes B'_n$, segundo a proposição 4.4.7. Pela hipótese de indução (HI), temos $\Delta'_B(a) \in \mathrm{Im}(J) \otimes \mathrm{Im}(J)$, e usando a base de $\mathrm{Im}(J)$ escrita acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta'_B(a) &= \sum_{r,s} \lambda(r,s) A^r \otimes A^s \\
&= \sum_{r,s \neq 0} \lambda(r,s) A^r \otimes A^s + \\
&\quad + \sum_{s \neq 0} \lambda(0,s) 1_B \otimes A^s + \sum_{r \neq 0} \lambda(r,0) A^r \otimes 1_B + \lambda(0,0) 1_B \otimes 1_B \ ,
\end{aligned}$$

com $\lambda(r,s)\in\mathbb{K}$ e a soma é sobre multi-índices $r,s\in\mathbb{N}^{(I)}$ com apenas finitas entradas não nulas. Como $B'_n=B_n\cap\ker(\varepsilon)$, e $1_B\notin\ker(\varepsilon)$, temos que $1_B\notin B'_n$. Tem-se:

$$\sum_{s\neq 0}\lambda(0,s)1_B\otimes A^s+\sum_{r\neq 0}\lambda(r,0)A^r\otimes 1_B+\lambda(0,0)1_B\otimes 1_B=0\ .$$

De fato, considerando que os A^r's e 1_B são LI em $\mathrm{Im}(J)$, e usando o lema 1.2.16, temos

$$\textstyle\sum_{s\neq 0}\lambda(0,s)1_B\otimes A^s+\displaystyle\sum_{r\neq 0}\lambda(r,0)A^r\otimes 1_B+\lambda(0,0)1_B\otimes 1_B\in B'_n\otimes B'_n$$

$$\overset{A^s\text{'s e }1_B\text{ LI}}{\Longrightarrow}\lambda(0,s)1_B,\sum_{r\neq 0}\lambda(r,0)A^r+\lambda(0,0)1_B\in B'_n\ ,\ \text{e}$$

$$\overset{A^r\text{'s e }1_B\text{ LI}}{\Longrightarrow}\sum_{s\neq 0}\lambda(0,s)A^s+\lambda(0,0)1_B,\lambda(r,0)1_B\in B'_n\ .$$

Se algum dos $\lambda(0,s),\lambda(r,0),\lambda(0,0)$ fosse diferente de zero, teríamos $1_B\in B'_n$, o que não pode ocorrer. Logo, $\lambda(0,s),\lambda(r,0),\lambda(0,0)=0$.

Portanto, podemos escrever:

$$(\#)\qquad \Delta'_B(a)=\sum_{r,s\neq 0}\lambda(r,s)A^r\otimes A^s\ .$$

Etapa 2: cálculo de $\Delta'_B(A^r)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}(a_i^n)&=\big(\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}(a_i)\big)^n\\&=\Big((a_i\otimes 1_{\mathbb{K}}+1_{\mathbb{K}}\otimes a_1)\Big)^n\\&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(a_i\otimes 1_{\mathbb{K}})^k\cdot(1_{\mathbb{K}}\otimes a_i)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a_i^k\otimes a_i^{n-k}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a_i^n}{n!}\right)&=\sum_{k=0}^n\frac{a_i^k}{k!}\otimes\frac{a_i^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\sum_{k+l=n}\frac{a_i^k}{k!}\otimes\frac{a_i^l}{l!}\ .\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a_{i_1}^{r_1}}{r_1!}\cdots\frac{a_{i_k}^{r_k}}{r_k!}\right)\\
&\quad=\left(\sum_{p_1+q_1=r_1}\frac{a_{i_1}^{p_1}}{p_1!}\otimes\frac{a_{i_1}^{q_1}}{q_1!}\right)\cdots\left(\sum_{p_k+q_k=r_k}\frac{a_{i_k}^{p_k}}{p_k!}\otimes\frac{a_{i_k}^{q_k}}{q_k!}\right)\\
&\quad=\sum_{p_1+q_1=r_1}\cdots\sum_{p_k+q_k=r_k}\left(\frac{a_{i_1}^{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{a_{i_k}^{p_k}}{p_k!}\right)\otimes\left(\frac{a_{i_1}^{q_1}}{q_1!}\cdots\frac{a_{i_k}^{q_k}}{q_k!}\right)\ .
\end{aligned}$$

Logo, considerando $p, q, r \in \mathbb{N}^{(I)}$ multi-índices, temos:

$$\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a^r}{r!}\right)=\sum_{p+q=r}\frac{a^p}{p!}\otimes\frac{a^q}{q!}\ .$$

Usando que J é morfismo de biálgebras, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_B(A^r)&=\Delta_B\left(\frac{1}{r!}J(a^r)\right)\\
&=\Delta_B\circ J\left(\frac{a^r}{r!}\right)\\
&=(J\otimes J)\circ\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a^r}{r!}\right)\\
&=(J\otimes J)\left(\sum_{p+q=r}\frac{a^p}{p!}\otimes\frac{a^q}{q!}\right)\\
&=\sum_{p+q=r}J\left(\frac{a^p}{p!}\right)\otimes J\left(\frac{a^q}{q!}\right)\\
&=\sum_{p+q=r}A^p\otimes A^q\ ,
\end{aligned}$$

$$(\#\#)\qquad\begin{aligned}
\Delta_B'(A^r)&=\Delta_B(A^r)-A^r\otimes 1_B-1_B\otimes A^r\\
&=\left(\sum_{p+q=r}A^p\otimes A^q\right)-A^r\otimes 1_B-1_B\otimes A^r\\
&=\sum_{\substack{p+q=r\\p,q\neq 0}}A^p\otimes A^q
\end{aligned}$$

Etapa 3: obtendo relações entre os coeficientes $\lambda(r,s)$.

Usando os resultados anteriores, conseguimos calcular:

$$\begin{aligned}
(\Delta'_B \otimes \mathrm{Id})(\Delta'_B(a)) &\overset{(\#)}{=} (\Delta'_B \otimes \mathrm{Id})\left(\sum_{p,t\neq 0} \lambda(p,t)\ A^p \otimes A^t\right)\\
&= \sum_{p,t\neq 0} \lambda(p,t)\ \Delta'_B(A^p) \otimes A^t\\
&\overset{(\#\#)}{=} \sum_{p,t\neq 0} \lambda(p,t)\ \left(\sum_{\substack{r+s=p\\ r,s\neq 0}} A^r \otimes A^s\right) \otimes A^t\\
&= \sum_{r,s,t\neq 0} \lambda(r+s,t)\ A^r \otimes A^s \otimes A^t\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} \otimes \Delta'_B)(\Delta'_B(a)) &\overset{(\#)}{=} (\mathrm{Id} \otimes \Delta'_B)\left(\sum_{r,q\neq 0} \lambda(r,q)\ A^r \otimes A^q\right)\\
&= \sum_{r,q\neq 0} \lambda(r,q)\ A^r \otimes \Delta'_B(A^q)\\
&\overset{(\#\#)}{=} \sum_{r,q\neq 0} \lambda(r,q)\ A^r \otimes \left(\sum_{\substack{s+t=q\\ s,t\neq 0}} A^s \otimes A^t\right)\\
&= \sum_{r,s,t\neq 0} \lambda(r,s+t)\ A^r \otimes A^s \otimes A^t\ .
\end{aligned}$$

Também temos:

$$\Delta'_B(a) \overset{(\#)}{=} \sum_{r,s\neq 0} \lambda(r,s)\ A^r \otimes A^s$$

$$\tau \circ \Delta'_B(a) \ = \ \tau\left(\sum_{s,r\neq 0} \lambda(s,r)\ A^s \otimes A^r\right) = \sum_{r,s\neq 0} \lambda(s,r)\ A^r \otimes A^s\ .$$

Lembramos que Δ'_B é coassociativo e cocomutativo, pela proposição 4.4.6. A coassociatividade nos dá

$$\lambda(r+s,t) = \lambda(r,s+t)\ ,\quad \forall r,s,t \neq 0$$

e a cocomutatividade,

$$\lambda(r,s) = \lambda(s,r)\ ,\quad \forall r,s \neq 0\ .$$

Dessas relações, obtemos abaixo que $\lambda(r,s)$ só depende da soma $r+s$.

Etapa 4: os coeficientes $\lambda(r,s)$ só dependem de $r+s$.

Sejam $r,s,t,u \neq 0$ multi-índices tais que $r+s = t+u$. Vamos decompor esses multi-índices de tal forma que

$$\begin{array}{ll} r = k+l & s = m+n \\ t = k+m & u = l+n \ . \end{array}$$

Para tanto, fixamos $i \in I$ e tentamos resolver o seguinte sistema linear para $k_i, l_i, m_i, n_i \in \mathbb{N}$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} k_i & +l_i & & & = & r_i \\ k_i & & +m_i & & = & t_i \\ & +l_i & +m_i & & = & u_i \\ & & +m_i & +n_i & = & s_i \end{array} \right. .$$

Escalonando, obtemos um sistema possível e indeterminado:

$$\left[\begin{array}{cccccl} 1 & 1 & 0 & 0 & | & r_i \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & t_i - r_i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \underbrace{t_i - r_i + u_i - s_i}_{=0} \end{array} \right] .$$

Temos, então:

$$\begin{aligned} k_i &= \alpha_i - s_i + t_i = \alpha_i - u_i + r_i \\ l_i &= -\alpha_i + u_i \\ m_i &= -\alpha_i + s_i \\ n_i &= \alpha_i \ , \end{aligned}$$

para qualquer $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Resta observar que podemos escolher um $\alpha_i \in \mathbb{N}$ tal que $k_i, l_i, m_i, n_i \geq 0$ e $k_i, l_i, m_i, n_i \in \mathbb{N}$. De fato, as condições para que isso aconteça são

$$\begin{gathered} 0 \leq \alpha_i \leq s_i \\ u_i - r_i \leq \alpha_i \leq u_i \ . \end{gathered}$$

Basta escolher $\alpha_i = 0$ para os índices i em que $r_i, s_i, t_i, u_i = 0$, e para os finitos índices em que algum desses não é nulo, defina $\alpha_i = u_i - r_i = s_i - t_i \in \mathbb{N}$ se $u_i - r_i \geq 0$ e $\alpha_i = \min(s_i, u_i)$ se $u_i - r_i < 0$. Dessa forma, conseguimos multi-índices $k, l, m, n \in \mathbb{N}^I$ como requeridos acima.

Tendo a decomposição acima, consideramos os seguintes casos. Note que $\lambda(p,q)$ só está definido se $p, q \neq 0$:

– Se $k \neq 0$, fazemos:

$$\begin{aligned}\lambda(r,s) &= \lambda(k+l, m+n) = \lambda(k, m+n+l)\\ \lambda(t,u) &= \lambda(k+m, l+n) = \lambda(k, m+n+l)\ ;\end{aligned}$$

– Se $k = 0$, então como $r = k + l \neq 0$, temos $l \neq 0$, e fazemos:

$$\begin{aligned}\lambda(r,s) &= \lambda(l, m+n)\\ \lambda(t,u) &= \lambda(m, l+n) = \lambda(m+n, l) = \lambda(l, m+n)\ .\end{aligned}$$

Assim $\lambda(r,s) = \lambda(t,u)$ para $r+s = t+u$. Portanto $\lambda(r,s)$ depende apenas de $r+s$. Escreveremos então $\lambda(r,s) = \lambda(r+s)$.

Etapa 5: $a \in \mathrm{Im}(J)$.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta'_B(a) &\overset{(\#)}{=} \sum_{r,s\neq 0} \lambda(r,s)\ A^r \otimes A^s\\ &= \sum_{r,s\neq 0} \lambda(r+s)\ A^r \otimes A^s\\ &= \sum_{|t|\geq 2} \sum_{\substack{r+s=t\\ r,s\neq 0}} \lambda(r+s) A^r \otimes A^s\\ &= \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) \sum_{\substack{r+s=t\\ r,s\neq 0}} A^r \otimes A^s\\ &\overset{(\#\#)}{=} \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) \Delta'_B(A^t)\end{aligned}$$

em que denotamos $|t| = |t_1| + \cdots + |t_k|$, com $t_1, \ldots, t_k$ as entradas não-nulas do multi-índice $t \in \mathbb{N}^{(I)}$. Assim

$$\Delta'_B\left(a - \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) A^t\right) = \Delta'_B(a) - \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) \Delta'_B(A^t) = 0\ ,$$

e obtem-se que $b := a - \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) A^t$ é primitivo. Por fim, $b = j(b) = J(b) \in \mathrm{Im}(J)$, e como todos os A^t estão em $\mathrm{Im}(J)$, temos

$$a = b + \sum_{|t|\geq 2} \lambda(t) A^t \in \mathrm{Im}(J)\ .$$

Terminamos a indução. Obtemos, então, que $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$ para todo $n \geq 1$ e encerramos a prova da afirmação. ⌟

Da afirmação, concluímos que

$$B = \mathbb{K}1_B + \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J) \ ,$$

e, por conseguinte, que J é sobrejetiva. Aqui termina a demonstração do teorema. □

Observação 4.4.13 (Uso das hipóteses no teorema)*.* Requerimos que o corpo tenha característica nula para mostrar a injetividade e sobrejetividade de J. Foi necessária para termos acesso à aplicação de simetrização, na prova da injetividade. Na sobrejetividade, em diversas passagens, também foi necessário dividir por um elemento do corpo pertencente aos naturais, que deve-se garantir ser $\neq 0$.

A conexidade com filtração de B foi a base da prova da sobrejetividade. Usamos pela primeira vez para decompor $B = \mathbb{K}1_B + \bigcup_{n=0}^{\infty} B'_n$.

A cocomutatividade foi usada na prova da sobrejetividade de J. Usamo-na apenas para obter $\lambda(r, s) = \lambda(s, r)$. E o único momento em que usamos essa relação foi na prova de que $\lambda(r, s)$ só depende de $r + s$, e foi apenas no subcaso em que mostramos $\lambda(r, s) = \lambda(t, u)$ para $k = 0$!

Uma consequência desse teorema é que a biálgebra em questão é uma álgebra de Hopf, já que é isomorfa à algebra de Hopf $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ como biálgebras.

Corolário 4.4.14. *Seja B uma biálgebra conexa com filtração. Se B é cocomutativa sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica* 0*, então B é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. De fato, pelo teorema de Milnor-Moore, $B \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ como biálgebras. Mas como $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ tem antípoda, então transportando para B por meio do isomorfismo, B admite uma antípoda, e é uma álgebra de Hopf. Escrevendo isso explicitamente, seja $J \colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$ o isomorfismo mencionado; temos que $S_B := J \circ S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1}$ é uma antípoda:

$$\begin{aligned}
S_B * \mathrm{Id} &= \mu_B \circ (S_B \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_B \\
&= \mu_B \circ \Big(\big(J \circ S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1}\big) \otimes \big(J \circ \mathrm{Id} \circ J^{-1}\big) \Big) \circ \Delta_B \\
&= \mu_B \circ (J \otimes J) \circ (S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \otimes \mathrm{Id}) \circ (J^{-1} \otimes J^{-1}) \circ \Delta_B \\
&= J \circ \mu_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ (S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= J \circ (S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} * \mathrm{Id}) \circ J^{-1} \\
&= J \circ \eta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ \varepsilon_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= \eta_B \circ \varepsilon_B \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} * S_B &= \mu_B \circ (\mathrm{Id} \otimes S_B) \circ \Delta_B \\
&= \mu_B \circ \Big(\big(J \circ \mathrm{Id} \circ J^{-1}\big) \otimes \big(J \circ S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1}\big) \Big) \circ \Delta_B \\
&= \mu_B \circ (J \otimes J) \circ (\mathrm{Id} \otimes S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}) \circ (J^{-1} \otimes J^{-1}) \circ \Delta_B \\
&= J \circ \mu_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ (\mathrm{Id} \otimes S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= J \circ (\mathrm{Id} * S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}) \circ J^{-1} \\
&= J \circ \eta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ \varepsilon_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= \eta_B \circ \varepsilon_B \ .
\end{aligned}$$

□

Observação 4.4.15. Tendo em vista que B e $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ são álgebras de Hopf, o morfismo do teorema de Milnor-Moore é isomorfismo de álgebras de Hopf também.

Vimos no teorema 4.2.1 que uma biálgebra conexa com graduação é uma álgebra de Hopf. O corolário apresentado acima só não é um caso particular do teorema 4.2.1 porque uma biálgebra que admite filtração não necessariamente admite uma graduação. Apenas o contrário é válido garantidamente: uma graduação numa biálgebra define uma filtração conforme a observação 4.3.2 da definição 4.3.1.

Capítulo 5

Rooted trees, álgebras de Hopf e o teorema de Panaite

No presente capítulo estudaremos algumas álgebras sobre grafos do tipo árvore com raiz. As álgebras estudadas surgem em contextos distintos. Uma delas, a álgebra de Connes-Kreimer, aparece no contexto de renormalização em teoria quântica de campos. A outra álgebra, de Grossman-Larson, surgiu na investigação de certas estruturas de dados baseadas em árvores, com o intuito de se computar operadores diferenciais de uma maneira eficiente.

Primeiramente abordaremos as definições iniciais, de grafos tipo árvore com raiz, árvores ordenadas, e algumas operações definidas nesses grafos. Passamos ao estudo da estrutura de álgebra de Hopf das álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson. Em seguida, dedicaremos uma seção ao teorema de Panaite, que ajudará a encontrar uma relação entre essas duas álgebras. Na última seção, mostraremos que a relação entre essas álgebras é a dualidade. No decorrer, procuramos abordar tanto o caso das árvores não-ordenadas como o das ordenadas.

5.1 Rooted trees

Começaremos com as definições iniciais a respeito dos grafos tipo árvore com raíz. Definiremos árvores não-ordenadas e ordenadas, e estabeleceremos algumas operações sobre essas árvores.

5.1.1 Árvores (não-ordenadas)

Definição 5.1.1. Uma *árvore com raiz*, ou *rooted tree*, é um grafo

1. finito;

2. conexo (sempre existe um caminho ligando dois vértices);

3. sem ciclos (existe apenas um caminho ligando dois vértices);

4. com um único vértice "especial", chamado *raiz*, do qual apenas partem arestas.

Nas ilustrações das árvores, convencionamos desenhar a raiz sempre no topo da figura, e o sentido das arestas é o de cima para baixo, de modo que não precisamos desenhar flexas nas arestas.

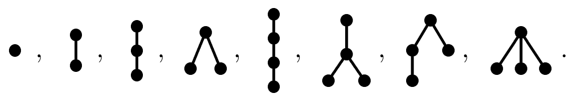
Dado um vértice V, os *vértices descendentes*, ou *vértices filhos*, são os vértices que estão ligados a V por uma aresta partindo de V.

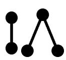
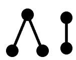
As *folhas* são os vértices que não tem descendentes. O conjunto de todas as árvores não-vazias é denotado por RT e o conjunto de todas as árvores de n vértices é denotado por RT_n.

Uma *floresta*, ou *rooted forest*, é um grafo finito em que cada componente é uma árvore; ou seja, é uma palavra em RT. Incluímos o grafo vazio nessa definição, considerando-o como a palavra nula, e denotamos por 1 . O conjunto de todas as florestas é denotado por RF e o conjunto de todas as florestas de n vértices é denotado por RF_n.

$\mathbb{K}[\mathrm{RT}]$ denota a álgebra associativa e com unidade gerada pelas árvores.

Exemplo 5.1.2. As árvores de 1 até 4 vértices são explicitadas abaixo:



Exemplo 5.1.3. $f =$  $=$  é uma floresta com 5 vértices.

Vamos estabelecer algumas operações envolvendo árvores.

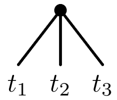
Definição 5.1.4.

1. O número de vértices de uma floresta f é denotado por $\#f$ ou $|f|$.

2. $B^+ \colon \mathbb{K}[\mathrm{RT}] \to \mathbb{K}[\mathrm{RT}]$ leva uma floresta $f = t_1 t_2 \dots t_n$ em uma árvore $B^+(f)$ da seguinte forma: escreva um novo vértice, que será a raiz

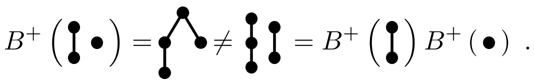
da $B^+(f)$, e ligue-o à todas as raízes das árvores $t_1 \cdots t_n$ da floresta f; estenda essa definição por linearidade para todas as somas finitas de florestas com coeficientes em $\mathbb{K}$. Também define-se $B^+(1) = \bullet$. A figura abaixo ilustra a operação em uma árvore:

$$B^+(t_1\ t_2\ t_3) =$$



.

Temos que B^+ é uma transformação linear, mas não é morfismo de álgebras, já que

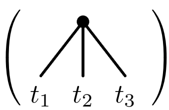


O número de vértices de $B^+(f)$ é $|f| + 1$, para f floresta.

Toda árvore não-nula pode ser decomposta de maneira única em B^+ de uma floresta, com número de vértices menor que a árvore original. Basta deletar a raiz e considerar a floresta formada pelas subárvores que aparecem.

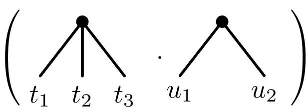
3. $B^- : \mathbb{K}[\mathrm{RT}] \to \mathbb{K}[\mathrm{RT}]$ leva uma árvore t numa floresta $f = t_1 \ldots t_n$ desta forma: delete a raiz de t, e forme uma floresta com as subárvores $t_1 \ldots t_n$ que aparecerem; estenda para um morfismo de álgebras.

B^-



$= t_1\ t_2\ t_3$

B^-



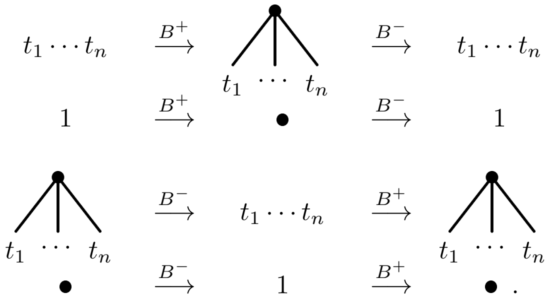
$= t_1\ t_2\ t_3\ u_1\ u_2$.

O número de vértices de $B^-(t)$ é $|t| - 1$, para uma árvore t.

Perceba que se considerarmos os domínios restritos

$$B^+ : \mathrm{RF} \to \mathrm{RT}$$
$$B^- : \mathrm{RT} \to \mathrm{RF}\ ,$$

temos o seguinte:



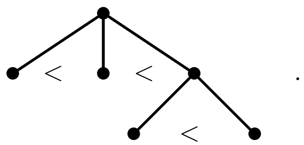
Portanto, com essa restrição, vale

$$B^+ \circ B^- = \mathrm{Id} \;\text{ e }\; B^- \circ B^+ = \mathrm{Id} \;,$$

e há uma bijeção $\mathrm{RF} \cong \mathrm{RT}$.

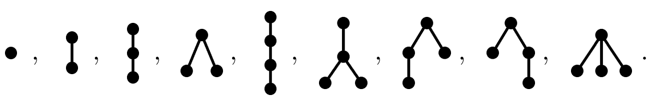
5.1.2 Árvores ordenadas

Definição 5.1.5. Uma *árvore ordenada*, ou *árvore planar*, é uma árvore t em que para cada vértice V de t, os vértices filhos de V são totalmente ordenados. Para representar as árvores planares nas figuras, costuma-se desenhar os vértices filhos ordenados da esquerda para a direita:

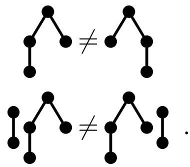


Uma *floresta ordenada* , ou *floresta planar* , é um grafo finito em que cada componente é uma árvore planar, e as raízes dessas árvores também são ordenadas.
$\mathbb{K}\{\mathrm{PRT}\}$ é a álgebra não-comutativa gerada pelas árvores planares.
Quando não houver confusão, omitiremos o termo "planar" ou "ordenado" por simplicidade.

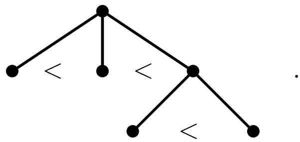
Observação 5.1.6. As árvores planares de 1 até 4 vértices são representadas abaixo



Observação 5.1.7. Não podemos mais comutar os ramos das árvores, nem as componentes de uma floresta. Por exemplo,



Observação 5.1.8. Repare que as folhas da árvore também são ordenadas, com uma ordem induzida pelos seus vértices "ancestrais", como na figura repetida abaixo por conveniência:

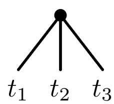


Podemos definir operações análogas às das árvores não-ordenadas.

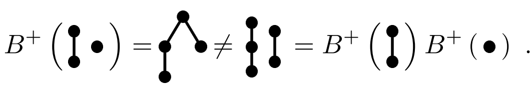
Definição 5.1.9.

1. O número de vértices de uma floresta f é denotado por $\#f$ ou $|f|$, da mesma forma que antes.

2. $B^+ : \mathbb{K}\{\mathrm{PRT}\} \to \mathbb{K}\{\mathrm{PRT}\}$ leva uma floresta ordenada $f = t_1 t_2 \dots t_n$ em uma árvore ordenada $B^+(f)$ de forma análoga ao caso da $\mathbb{K}[\mathrm{RT}]$: escreva um novo vértice, que será a raiz da $B^+(f)$, e ligue-o à todas as raízes das árvores $t_1 \cdots t_n$ da floresta f, *mantendo a ordem* em que as raízes aparecem na floresta; estenda essa definição por linearidade para todas as somas finitas de florestas com coeficientes em $\mathbb{K}$. Ilustrando, novamente (repare como a ordem é mantida):

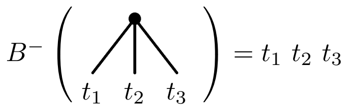
   $B^+(t_1\ t_2\ t_3) =$ 

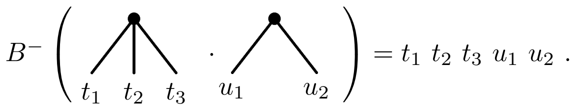
   Nesse contexto B^+ continua sendo uma transformação linear, sem ser morfismo de álgebras, já que, repetindo a observação para o caso comutativo,

O número de vértices de $B^+(f)$ continua sendo $|f|+1$, para f floresta ordenada.
Toda árvore pode ser decomposta de maneira única em B^+ de uma floresta, com número de vértices menor que a árvore original. Basta deletar a raiz e considerar a floresta formada pelas subárvores que aparecem, *mantendo a ordem*.

3. $B^-\colon \mathbb{K}\{\mathrm{PRT}\} \to \mathbb{K}\{\mathrm{PRT}\}$ leva uma árvore t numa floresta $f = t_1 \dots t_n$ desta forma: delete a raiz de t, e forme uma floresta com as subárvores $t_1 \dots t_n$ que aparecerem, *mantendo a ordem* em que os vértices filhos da raíz apareciam na árvore; estenda para um morfismo de álgebras. Exemplificando:



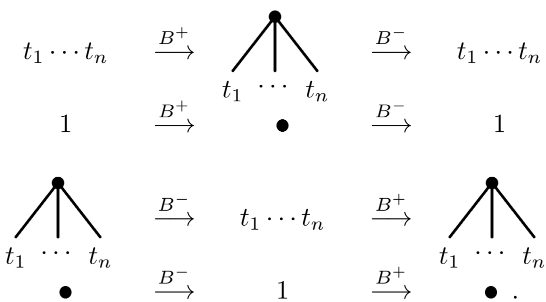


Da mesma forma que no caso não-ordenado, o número de vértices de $B^-(t)$ é $|t|-1$, para t árvore ordenada.

Da mesma forma que com o caso das árvores não-ordenadas, se considerarmos os domínios restritos

$$B^+\colon \mathrm{PRF} \to \mathrm{PRT}$$
$$B^-\colon \mathrm{PRT} \to \mathrm{PRF}\ ,$$

temos



Portanto, com essa restrição, ainda vale

$$B^+ \circ B^- = \mathrm{Id} \quad \text{e} \quad B^- \circ B^+ = \mathrm{Id}\ ,$$

e há uma bijeção PRF $\cong$ PRT.

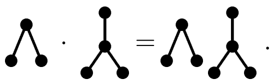
5.2 Álgebra de Connes-Kreimer

Nesta seção, apresentaremos a álgebra de Connes-Kreimer sobre árvores com raiz e mostraremos sua estrutura de álgebra de Hopf. Consideraremos também uma versão da álgebra de Connes-Kreimer para árvores ordenadas. Também abordaremos uma propriedade universal associada a essas álgebras.

5.2.1 Versão não-ordenada

5.2.1.1 Estrutura de álgebra de Hopf

Definição 5.2.1. A *álgebra de árvores de Connes-Kreimer* é a álgebra livre associativa, comutativa e com unidade gerada por RT, e é denotada por $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Em outras palavras, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ é igual, como álgebra, a $\mathbb{K}[\mathrm{RT}]$, que por sua vez é igual ao espaço span(RF). A unidade é o grafo vazio, denotado por 1, e o produto é a "concatenação" de grafos, como por exemplo:



Veremos a seguir que é possível definir uma estrutura de álgebra de Hopf em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

Para obtermos uma estrutura de biálgebra, precisamos de um coproduto e uma counidade. O coproduto será obtido com o conceito de cortes admissíveis, definido abaixo.

Definição 5.2.2. Definimos corte e corte admissível abaixo:

1. Um *corte* c em uma árvore t é uma escolha de arestas de t;

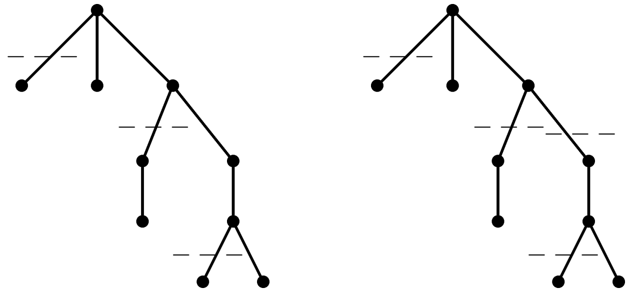
2. Um *corte admissível* c em uma árvore t é uma escolha de arestas de t em que qualquer caminho partindo da raiz encontra no máximo uma aresta cortada.

   Vamos excluir o corte nulo (escolha de arestas vazia) desta definição, por conveniência.

   Denote por $\mathrm{Adm}(t)$ o conjunto de todos os cortes admissíveis de t.

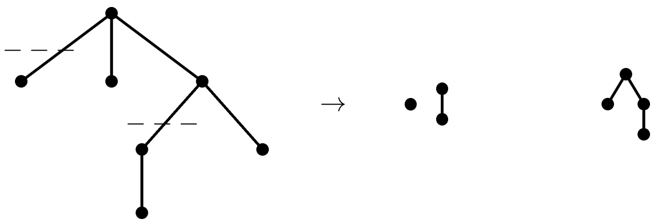
Exemplo 5.2.3. Vejamos um exemplo de corte admissível e de corte não admissível:

corte admissível — corte não admissível



Um corte c de uma árvore t define uma floresta $W^c(t)$ obtida deletando de t as arestas escolhidas em c. Se o corte é admissível, a floresta $W^c(t)$ vai ter uma única árvore que carrega a raiz de t. Vamos denotar essa árvore por $R^c(t)$, e o restante da floresta, por $P^c(t)$.

t — $P^c(t)$ — $R^c(t)$



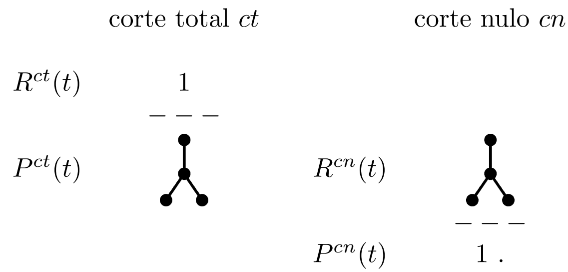
Para facilitar mais adiante, defina:

o *corte nulo cn* como sendo a escolha de arestas vazia, $R^{cn}(t) = t$ e $P^{cn}(t) = 1$;

o *corte total ct*, tal que $R^{ct}(t) = 1$ e $P^{ct}(t) = t$;

$\overline{\text{Adm}}(t) = \text{Adm}(t) \cup \{cn, ct\}$ o conjunto de cortes admissíveis estendido de t.

Uma maneira útil de pensar nesses cortes é a seguinte:



Agora estamos preparados para definir o coproduto em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

Definição 5.2.4. Dada uma árvore t, defina o coproduto por

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= t\otimes 1 + 1\otimes t + \sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)} P^c(t)\otimes R^c(t)\\ &= \sum_{c\in\overline{\mathrm{Adm}}(t)} P^c(t)\otimes R^c(t)\end{aligned}$$

e estenda a um morfismo de álgebras.
A counidade será dada, para uma árvore t, por

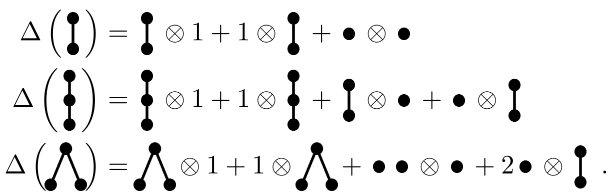
$$\varepsilon(t) = \delta_{1,t}$$

e estendemos esta função para um morfismo de álgebras também.

Mais adiante mostraremos que de fato este morfismo de álgebras satisfaz a coassociatividade.

Exemplo 5.2.5. Cálculo do coproduto para algumas árvores:

$$\Delta(1) = 1\otimes 1$$
$$\Delta(\bullet) = \bullet\otimes 1 + 1\otimes\bullet$$

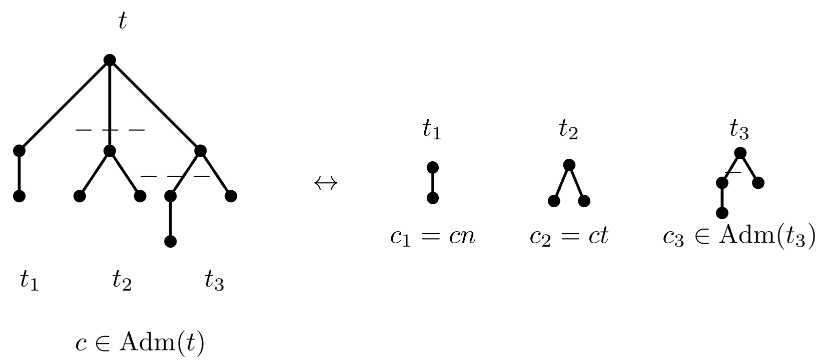


Para mostrar a coassociatividade, usaremos um lema que diz como Δ se comporta com relação à operação B^+.

Lema 5.2.6. *Para todo* $x \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$,

$$\Delta \circ B^+(x) = B^+(x) \otimes 1 + (\mathrm{Id} \otimes B^+) \circ \Delta(x) \ .$$

Demonstração. É suficiente mostrar a igualdade para $x = t_1 \dots t_n \in \mathrm{RF}$. Seja $t = B^+(x)$. Vamos olhar para os cortes de t em termos de cortes nas subárvores t_i. Observe a seguinte figura:

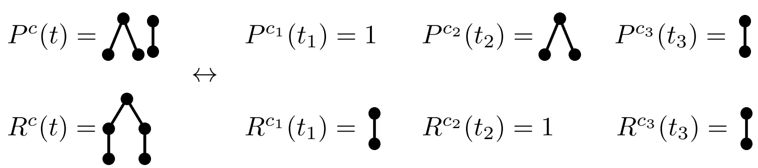


Seja $i = 1, 2, \dots, n$. Note que todo corte admissível estendido c de t que não é ct induz um corte admissível estendido c_i em t_i dado pela coleção das arestas de c que estão em t_i, no caso em que essa coleção é não vazia. Ou então, se há um corte de c na aresta que liga a raiz à subárvore t_i, correspondemos c_i ao corte total de t_i e se não há corte nessa aresta nem em t_i, correspondemos c_i ao corte nulo.
Reciprocamente toda coleção de cortes admissíveis estendidos c_i de t_i, $i = 1, 2, \dots, n$, fornece um corte admissível c de t. Se algum c_i for um corte total, correspondemos a um corte na aresta que liga a raiz à subárvore t_i. O corte total de t seria o único corte admissível estendido que não é induzido por nenhuma coleção de c_i's.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} P^c(t) &= P^{c_1}(t_1) \dots P^{c_n}(t_n) \\ R^c(t) &= B^+\big(R^{c_1}(t_1) \dots R^{c_n}(t_n)\big) \ . \end{aligned}$$

Continuando o exemplo da figura acima:



Assim, podemos escrever $\displaystyle\sum_{c\in \mathrm{Adm}(t)\cup cn} = \sum_{i=1,\cdots,n}\ \sum_{c_i\in\overline{\mathrm{Adm}}(t_i)}$ e portanto:

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= t\otimes 1 + \sum_{c\in \mathrm{Adm}(t)\cup cn} P^c(t)\otimes R^c(t)\\
&= t\otimes 1 + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{c_i\in\overline{\mathrm{Adm}}(t_i)} P^{c_1}(t_1)\dots P^{c_n}(t_n)\otimes B^+\big(R^{c_1}(t_1)\dots R^{c_n}(t_n)\big)\\
&= t\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\left(\prod_{i=1}^{n}\ \sum_{c_i\in\overline{\mathrm{Adm}}(t_i)} P^{c_i}(t_i)\otimes R^{c_i}(t_i)\right)\\
&= B^+(x)\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\big(\Delta(t_1)\dots\Delta(t_n)\big)\\
&= B^+(x)\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\big(\Delta(x)\big)\ .
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.7. *A álgebra $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ com o produto, unidade, coproduto e counidade definidos acima é uma biálgebra comutativa.*

Demonstração. Por definição, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ é uma álgebra comutativa. Também temos que Δ e ε são morfismos de álgebras. Resta mostrar a coassociatividade e a counidade.

(Propriedade da counidade:)

Vamos começar pela counidade. Para simplificar a notação, os isomorfismos $A\otimes\mathbb{K}\cong A$ e $\mathbb{K}\otimes A\cong A$ serão omitidos. Basta mostrar a propriedade para $t\in \mathrm{RT}$ e para $t=1$. Se $t=1$, temos:

$$(\varepsilon\otimes \mathrm{Id})\circ\Delta(1) = (\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(1\otimes 1) = \varepsilon(1)1 = \delta_{1,1}1 = 1\ ,$$

$$(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(1) = (\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)(1\otimes 1) = 1\varepsilon(1) = 1\delta_{1,1} = 1\ .$$

Por fim, se $t\in\mathrm{RT}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(t) &= (\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\left(t\otimes 1 + 1\otimes t + \sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)} P^c(t)\otimes R^c(t)\right)\\
&= \underbrace{\varepsilon(t)}_{=0}1 + \underbrace{\varepsilon(1)}_{=1}t + \sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)} \underbrace{\varepsilon(P^c(t))}_{=0}R^c(t)\\
&= t\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(t) &= (\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)\left(t\otimes 1 + 1\otimes t + \sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)} P^c(t)\otimes R^c(t)\right)\\
&= t\,\underbrace{\varepsilon(1)}_{=1} + 1\,\underbrace{\varepsilon(t)}_{=0} + \sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)} P^c(t)\,\underbrace{\varepsilon(R^c(t))}_{=0}\\
&= t\ .
\end{aligned}
$$

(Coassociatividade:)

Para mostrar a coassociatividade, considere o ideal:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x\in\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} | (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(x) = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta(x)\}\\
&= \ker\Big((\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta - (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Afirmação: Temos que $B^+(A)\subseteq A$.

Prova da afirmação. De fato, seja $x\in A$. Usando o Lema 5.2.6,

$$
\begin{aligned}
(\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(B^+(x)) &\overset{5.2.6}{=} (\Delta\otimes\mathrm{Id})\Big(B^+(x)\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x)\Big)\\
&= \Delta(B^+(x))\otimes 1 + (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ(\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x)\\
&\overset{5.2.6}{=} \Big(B^+(x)\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x)\Big)\otimes 1 +\\
&\quad + (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ(\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x)\\
&= B^+(x)\otimes 1\otimes 1 + \Big(\big((\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta\big)(x)\Big)\otimes 1 +\\
&\quad + (\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ(\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(x)\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta(B^+(x)) &\overset{5.2.6}{=} (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Big(B^+(x)\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x)\Big)\\
&= B^+(x)\otimes 1\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes(\Delta\circ B^+))(x_{(1)}\otimes x_{(2)})\\
&= B^+(x)\otimes 1\otimes 1 + x_{(1)}\otimes\Delta(B^+(x_{(2)}))\\
&\overset{5.2.6}{=} B^+(x)\otimes 1\otimes 1 +\\
&\quad + x_{(1)}\otimes\Big(B^+(x_{(2)})\otimes 1 + (\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x_{(2)})\Big)\\
&= B^+(x)\otimes 1\otimes 1 + x_{(1)}\otimes B^+(x_{(2)})\otimes 1 +\\
&\quad + x_{(1)}\otimes\Big((\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ\Delta(x_{(2)})\Big)\\
&= B^+(x)\otimes 1\otimes 1 + \Big((\mathrm{Id}\otimes B^+)(\Delta(x))\Big)\otimes 1 +\\
&\quad + (\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes B^+)\circ(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta(x)\ .
\end{aligned}
$$

Como $x\in A$, temos $(\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(x) = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta(x)$. Assim

$$
(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta(B^+(x)) = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta(B^+(x))\ ,
$$

então $B^+(x) \in A$. ⌟

Afirmação: Temos RF $\subseteq A$. Portanto $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = A$.

Prova da afirmação. Provemos que todo $f \in \mathrm{RF}$ pertence a A por indução em $n = |f|$; isso implica $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = A$ e então vale a coassociatividade em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Se $n = 0$, temos:

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(1) = 1 \otimes 1 \otimes 1 = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(1) \ .$$

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, e suponha que

$$\text{(HI)} \qquad g \in \mathrm{RF}, |g| < n \implies g \in A \ .$$

Seja $f \in \mathrm{RF}$ com $|f| = n$. Se f for apenas uma árvore, então escreva $f = B^+(g)$ para alguma floresta $g \in \mathrm{RF}$ com $|g| = n - 1$. Pela (HI), $g \in A$. Como visto acima, $f \in B^+(A) \subseteq A$. Agora se f tiver mais de uma componente, então $f = t_1 \cdots t_k$, com $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{RT}$ e $k > 1$. Então $t_1, \ldots, t_k \in A$ e como A é um ideal, $f = t_1 \cdots t_k \in A$. ⌟

Fica provado, então, que $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = A$. □

Agora temos uma estrutura de biálgebra para $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Mostraremos que essa biálgebra é conexa por graduação.

Proposição 5.2.8. *A biálgebra*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$$

é conexa com graduação, em que $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$ é o subespaço vetorial gerado pelas florestas de q vértices. Portanto admite antípoda e é uma álgebra de Hopf.

Demonstração. Vamos verificar que $\{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)\}_{q=0}^{\infty}$ é uma graduação para $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, conforme 4.1.1.

1. Temos que $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(0) = \mathbb{K} \cdot 1$ é o subespaço gerado pela árvore vazia.

2. Por construção, temos $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$; a soma é direta, pois, claramente, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(p) \cap \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$.

3. Como o produto é dado pela concatenação de florestas, é válido que $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(p) \cdot \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q) \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(p + q)$.

4. Dada t árvore com q vértices, temos

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) \ .$$

Repare que, como $P^c(t)$ e $R^c(t)$ são obtidos cortando a árvore t, temos $|P^c(t)| + |R^c(t)| = q$, e logo

$$\Delta(t) \in \sum_{m+n=q} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(m) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(n)$$

O mesmo vale para florestas, já que aplicamos Δ em cada árvore componente. Com isso, ficamos com $\Delta(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)) \in \sum_{m+n=q} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(m) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(n)$.

□

Em seguida exibiremos a antípoda explicitamente, em termos de cortes.

Teorema 5.2.9. *Seja t árvore. A antípoda é dada, recursivamente, por*

$$S(1) = 1$$
$$S(t) = -t - \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} S(P^c(t))R^c(t) \ .$$

Também podemos escrevê-la usando o conceito de cortes apresentado antes, e obtemos

$$S(t) = - \sum_{c \in \mathrm{Cut}(t)} (-1)^{n_c} W^c(t) \ ,$$

em que

$\mathrm{Cut}(t)$ *é o conjunto de cortes (não totais, mas incluindo o corte nulo e os cortes não-admissíveis) de t;*

$\mathrm{Adm}(t)$ *é o conjunto de cortes admissíveis (excluindo corte nulo e corte total);*

n_c *é o número de arestas cortadas por c;*

$W^c(t)$ *é a floresta obtida deletando-se as arestas de c em t;*

$P^c(t)$ *e $R^c(t)$ estão especificados logo acima da definição 5.2.4.*

Demonstração. A versão recursiva vem do teorema 4.2.1, em que se obtém, para uma biálgebra conexa com filtração $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$, a antípoda

$$S(x) = -x - \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{i_j} S(x'_{j,i_j}) x''_{j,i_j} \ ,$$

onde $\Delta(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x + \sum_j \sum_{i_j} x'_{j,i_j} \otimes x''_{j,i_j}$ com $x'_{j,i_j} \in B_j$, $x''_{j,i_j} \in B_{n-j}$ e $x \in B_n$.
Para o caso em que $x = t$ é uma árvore, temos $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t)$, e portanto temos

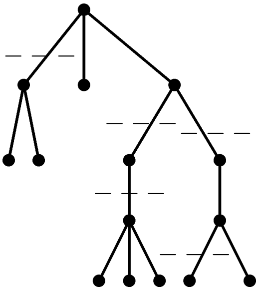
$$S(t) = -t - \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} S(P^c(t)) \cdot R^c(t) \ .$$

Para mostrar a segunda fórmula, faremos indução em $q = |t|$.
Para $q = 1$, temos $t = \bullet$, $\Delta(\bullet) = \bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet$ e pela fórmula recursiva, $S(\bullet) = -\bullet$, que corresponde à soma sobre todos os cortes de $\bullet$ (só tem o corte nulo) do enunciado, com o sinal correto.
Seja $q \geq 2$ e t uma árvore com $|t| = q$. Vamos supor que vale o enunciado para toda árvore t' com $|t'| < q$ (HI). Por enquanto temos apenas

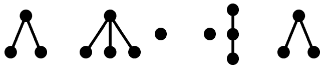
$$S(t) = -t - \sum_{c' \in \mathrm{Adm}(t)} S\big(P^{c'}(t)\big) R^{c'}(t) \ .$$

Tome um corte c de t não nulo e não total. Considere a árvore de $W^c(t)$ que contém a raiz original de t. Considere o corte admissível c' construído a partir de c considerando-se apenas as arestas de c "mais próximas" da raiz, ou seja, tais que o caminho que liga cada aresta dessas à raiz não intercepta nenhum corte. Escreva $P^c(t) = t_1 \cdots t_k$ e defina c_i pela restrição de c a t_i, que é um corte não total de t_i (pode ser, talvez, o corte nulo).

t

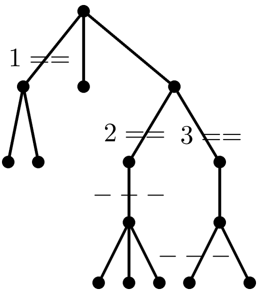


$W^c(t)$

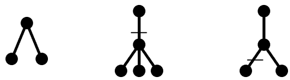


$c' \to$ marcado com ===

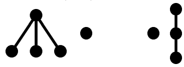
t



$P^{c'}(t) =$ t_1 t_2 t_3



$W^{c_1}(t_1)$ $W^{c_2}(t_2)$ $W^{c_3}(t_3)$



$R^{c'}(t) =$ 

Perceba que

$$W^c(t) = W^{c_1}(t_1) \dots W^{c_k}(t_k) \cdot R^{c'}(t) \ ,$$

já que um dos pedaços de $W^c(t)$ contém a raíz de t e corresponde a $R^{c'}(t)$, e os demais são formados pelos cortes de cada um dos k pedaços de $P^{c'}(t)$. Além disso, note que o número de arestas em c pode ser escrito como:

$$n_c = n_{c'} + n_{c_1} + \dots + n_{c_k} = k + n_{c_1} + \dots + n_{c_k} \ .$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} S\big(P^{c'}(t)\big) &= S(t_1) \dots S(t_k) \\ &= \left(\sum_{c_1 \in \mathrm{Cut}(t_1)} (-1)^{n_{c_1}+1} W^{c_1}(t_1) \right) \cdots \left(\sum_{c_k \in \mathrm{Cut}(t_k)} (-1)^{n_{c_k}+1} W^{c_k}(t_k) \right) \\ &= \sum_{c_1 \in \mathrm{Cut}(t_1)} \cdots \sum_{c_k \in \mathrm{Cut}(t_k)} (-1)^{n_{c_1}+\dots+n_{c_k}+k} W^{c_1}(t_1) \cdots W^{c_k}(t_k) \end{aligned}$$

Aplicando esse resultado em $S(t)$, temos

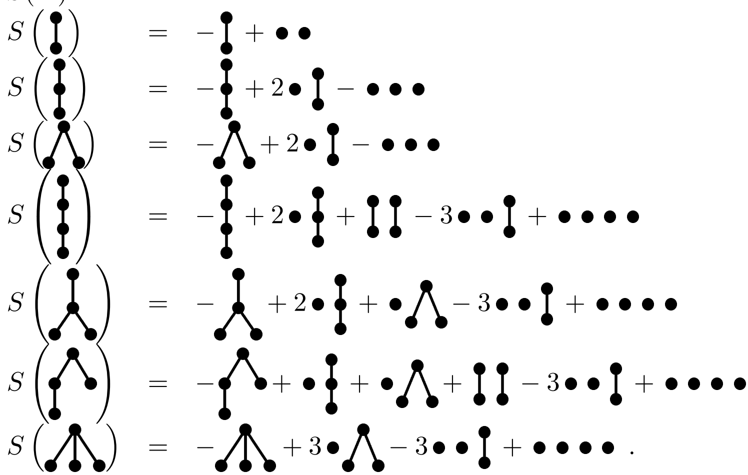
$$\begin{aligned}
S(t) &= -t - \sum_{c' \in \mathrm{Adm}(t)} S\big(P^{c'}(t)\big) R^{c'}(t) \\
&= -t - \sum_{c' \in \mathrm{Adm}(t)} \sum_{\substack{c_i \in \mathrm{Cut}(t_i) \\ 0 \leq i \leq k}} (-1)^{n_{c_1} + \ldots + n_{c_k} + k} W^{c_1}(t_1) \cdots W^{c_k}(t_k) R^{c'}(t) \\
&= - \sum_{c \in \mathrm{Cut}(t)} (-1)^{n_c} W^c(t) \ .
\end{aligned}$$

Fica provada, então, a segunda fórmula. □

As primeiras antípodas são calculadas no exemplo abaixo:

Exemplo 5.2.10. Cálculo da antípoda para algumas árvores, de 1 a 4 vértices, e da floresta nula:

$$\begin{aligned}
S(1) &= 1 \\
S(\bullet) &= -\bullet
\end{aligned}$$



5.2.1.2 Propriedade universal

Podemos definir a álgebra de árvores de Connes-Kreimer por meio de uma propriedade universal associada à fórmula para $\Delta \circ B^+$ no lema 5.2.6.

Definição 5.2.11. (H, b) é a álgebra de Connes-Kreimer se

1. H é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade;

2. $b \colon H \to H$ é um operador linear;

e se vale a seguinte propriedade universal:

3.(a) Dadas A álgebra associativa, comutativa com unidade e $L\colon A \to A$ operador linear, existe um único morfismo de álgebras $\phi\colon H \to A$ tal que $\phi \circ b = L \circ \phi$. Isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "L"] \\ H \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd}$$

3.(b) Se H e A são álgebras de Hopf, e L satisfaz

$$\Delta \circ L(x) = (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \Delta(x) + L(x) \otimes 1_A$$

então ϕ é um morfismo de álgebras de Hopf.

Proposição 5.2.12. *$(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, B^+)$ satisfaz a propriedade universal.*

Demonstração. Considere $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$ com a graduação usual. Sejam A álgebra comutativa e $L\colon A \to A$ transformação linear. Vamos mostrar que $(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, B^+)$ satisfaz a propriedade universal:

3.(a) (Existência:) Defina as transformações lineares $\phi_q\colon \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q) \to A$ indutivamente por

$$\begin{aligned}
&\phi_0(1) = 1_A \\
&\phi_1(\bullet) = \phi_1 \circ B^+(1) = L \circ \phi_0(1) \\
&\cdots \\
&\phi_q(t_1 \dots t_n) = \phi_{q_1}(t_1) \dots \phi_{q_n}(t_n), \\
&\qquad \text{para } |t_1| = q_1, \cdots, |t_n| = q_n \text{ e } q_1 + \dots + q_n = q \\
&\phi_q\big(B^+(t_1 \dots t_n)\big) = L\big(\phi_{q_1}(t_1) \dots \phi_{q_n}(t_n)\big), \\
&\qquad \text{para } |t_1| = q_1, \cdots, |t_n| = q_n \text{ e } q_1 + \dots + q_n + 1 = q \quad .
\end{aligned}$$

Pela propriedade universal da soma direta, tome

$$\phi\colon \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q) \to A$$

transformação linear tal que $\phi(f) = \phi_q(f)$, com f uma floresta de q vértices. Temos, por construção, que ϕ é morfismo de álgebras, e que $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$.

(Unicidade:) Se $\phi' \colon \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to A$ é outro morfismo de álgebras com $\phi' \circ B^+ = L \circ \phi'$, então mostraremos por indução no número de vértices $q = |f|$ que $\phi'(f) = \phi(f)$. Os casos $n = 0$ e $n = 1$ são válidos porque

$$\begin{aligned}
&\phi'(1) = 1 = \phi(1)\\
&\phi'(\bullet) = \phi' \circ B^+(1) = L \circ \phi'(1) = L \circ \phi(1) = \phi \circ B^+(1) = \phi(\bullet)\ .
\end{aligned}$$

Supomos que $\phi'(f) = \phi(f)$ para florestas f com $|f| < q$. Agora seja f uma floresta com q vértices. Se $f = t_1 \dots t_n$ tem $n > 1$ árvores componentes, então

$$\phi'(f) = \phi'(t_1) \dots \phi'(t_n) \overset{\text{(HI)}}{=} \phi(t_1) \dots \phi(t_n) = \phi(f)\ .$$

Se, no entanto, f é composto de uma única árvore, podemos escrever $f = B^+(t_1 \dots t_n)$, e temos

$$\begin{aligned}
\phi'(f) &= \phi' \circ B^+(t_1 \dots t_n) = L \circ \phi'(t_1 \dots t_n)\\
&\overset{\text{(HI)}}{=} L \circ \phi(t_1 \dots t_n) = \phi \circ B^+(t_1 \dots t_n) = \phi(f)\ .
\end{aligned}$$

Portanto $\phi' = \phi$.

3.(b) Já sabemos que ϕ é morfismo de álgebras. Precisamos mostrar que ϕ também é morfismo de coálgebras.

(ϕ preserva a counidade:) Primeiramente, note que para todo $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned}
L(x) &= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_A \circ L(x)\\
&= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id})\big((\mathrm{Id} \otimes L) \circ \Delta_A(x) + L(x) \otimes 1_A\big)\\
&= {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon_A \otimes L)\big(\Delta_A(x)\big) + {\varphi_l}^{-1}\big(\varepsilon_A(L(x)) \otimes 1_A\big)\\
&= {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \varphi_l \circ {\varphi_l}^{-1} \circ (\varepsilon_A \otimes \mathrm{Id})\big(\Delta_A(x)\big) + \varepsilon_A(L(x))1_A\\
&= {\varphi_l}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \varphi_l(x) + \varepsilon_A(L(x))1_A\\
&= L(x) + \varepsilon_A(L(x))1_A\ .
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_A \circ L(x) = \varepsilon_A \circ L(x) + \varepsilon_A(L(x))\varepsilon_A(1_A) = \varepsilon_A \circ L(x) + \varepsilon_A \circ L(x)\\
&\quad \Longrightarrow \varepsilon_A \circ L(x) = 0\ .
\end{aligned}$$

Sabemos que $\varepsilon_A \circ \phi$ e $\varepsilon_{\mathcal{H}_{\rm CK}}$ são morfismos de álgebras de $\mathcal{H}_{\rm CK} \to \mathbb{K}$. Para mostrar que os morfismos são iguais, basta mostrar que são iguais aplicados nas árvores. Seja $t = B^+(t_1 \dots t_n)$ uma árvore com $|t| > 0$. Temos:

$$\varepsilon_A \circ \phi(t) = \varepsilon_A \circ \phi \circ B^+(t_1 \dots t_n) = \varepsilon_A \circ L \circ \phi(t_1 \dots t_n) = 0 = \varepsilon_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(t) \ .$$

Além disso,

$$\varepsilon_A \circ \phi(1) = \varepsilon_A(1_A) = 1_{\mathbb{K}} = \varepsilon_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(1) \ .$$

(ϕ preserva o coproduto:) Da mesma forma, sabemos que $\Delta_A \circ \phi$ e $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}$ são morfismos de álgebras, e basta mostrar que coincidem nas árvores para concluir que são iguais. Vamos mostrar por indução em $q = |t|$ número de vértices da árvore t.
Os casos $q = 0$ e $q = 1$ vêm de

$$\begin{aligned} \Delta_A \circ \phi(1) &= \Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A \\ &= (\phi \otimes \phi)(1 \otimes 1) = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(1) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_A \circ \phi(\bullet) &= \Delta_A \circ \phi \circ B^+(1) = \Delta_A \circ L \circ \phi(1) = \Delta_A(L(1_A)) \\ &= (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \Delta(1_A) + L(1_A) \otimes 1_A \\ &= 1_A \otimes L(1_A) + L(1_A) \otimes 1_A \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(\bullet) &= (\phi \otimes \phi)(\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet) \\ &= \phi(\bullet) \otimes 1_A + 1_A \otimes \phi(\bullet) \\ &= \phi(B^+(1)) \otimes 1_A + 1_A \otimes \phi(B^+(1)) \\ &= L(\phi(1)) \otimes 1_A + 1_A \otimes L(\phi(1)) \\ &= L(1_A) \otimes 1_A + 1_A \otimes L(1_A) \ , \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta_A \circ \phi(1) &= (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(1) \\ \Delta_A \circ \phi(\bullet) &= (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(\bullet) \ . \end{aligned}$$

Supomos que para toda árvore u com $|u| < q$ vértices, temos

$$\text{(HI)} \qquad \Delta_A \circ \phi(u) = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\rm CK}}(u) \ .$$

Seja $t = B^+(t_1 \dots t_n)$ uma árvore de q vértices. Temos $|t_1|, \dots, |t_n| < q$, e

$$\begin{aligned}
\Delta_A \circ \phi(t) &= \Delta_A \circ \phi \circ B^+(t_1 \dots t_n) \\
&= \Delta_A \circ L\big(\phi(t_1 \dots t_n)\big) \\
&\overset{2.}{=} (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \Delta_A\big(\phi(t_1 \dots t_n)\big) + L\big(\phi(t_1 \dots t_n)\big) \otimes 1_A \\
&\overset{(\mathrm{HI})}{=} (\mathrm{Id} \otimes L) \circ (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t_1 \dots t_n) + L\big(\phi(t_1 \dots t_n)\big) \otimes 1_A \\
&= \big(\phi \otimes (\phi \circ B^+)\big) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t_1 \dots t_n) + \phi\big(B^+(t_1 \dots t_n)\big) \otimes \phi(1) \\
&= (\phi \otimes \phi)\Big((\mathrm{Id} \otimes B^+) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t_1 \dots t_n) + \big(B^+(t_1 \dots t_n)\big) \otimes 1\Big) \\
&\overset{5.2.6}{=} (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}\big(B^+(t_1 \dots t_n)\big) \\
&= (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t) \ .
\end{aligned}$$

Portanto $\Delta_A \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}$. Temos que ϕ é morfismo de biálgebras, e portanto, de álgebras de Hopf (conforme a proposição 2.3.5).

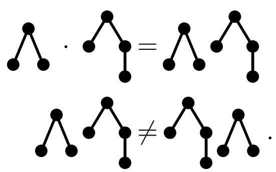
□

5.2.2 Versão ordenada

5.2.2.1 Estrutura de álgebra de Hopf

Existe uma versão não comutativa da álgebra de Connes-Kreimer estudada anteriormente. Com frequência, faremos referência ao caso anterior, das árvores (não-ordenadas), como "caso comutativo", em contraste ao "caso não comutativo", que será visto a seguir.

Definição 5.2.13. A *álgebra de árvores planares de Connes-Kreimer* é a álgebra livre associativa e com unidade gerada por PRT, e é denotada por $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. A unidade é o grafo vazio, denotado por 1, e o produto é a "concatenação" de grafos, respeitando a ordem das raízes que aparecem no produto. Por exemplo



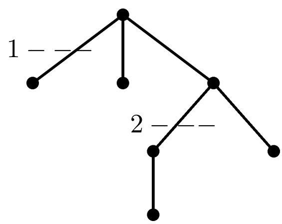
O contexto vai especificar se estamos falando da versão comutativa ou não comutativa de $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

As definições do coproduto e da counidade são análogas ao caso comutativo. As noções de cortes, cortes admissíveis, entre outros, se estendem naturalmente para o caso das árvores planares, já que a escolha de arestas não interfere na ordem dos vértices filhos de todos os vértices da árvore planar. Como surgirão alguns detalhes em relação à ordem dos vértices, repetiremos as definições, destacando os ajustes para o caso não comutativo.

Definição 5.2.14. Definimos corte e corte admissível abaixo, para o caso ordenado:

1. Um *corte* c numa árvore planar é uma escolha de arestas.

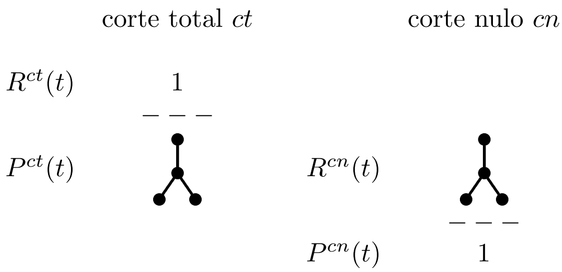
2. Um *corte admissível* c numa árvore t continua sendo um corte (não vazio) em que qualquer caminho partindo da raiz encontra no máximo uma aresta cortada. Pela observação 5.1.8, as folhas da árvore planar são ordenadas. Além disso, cada folha é ligada de maneira única à raiz (considerando ligações de vértice para vértice filho, apenas). Cada caminho desses pode interceptar no máximo um corte. Então, podemos ordenar o corte admissível pela ordem das folhas associadas a cada aresta do corte. Por exemplo:

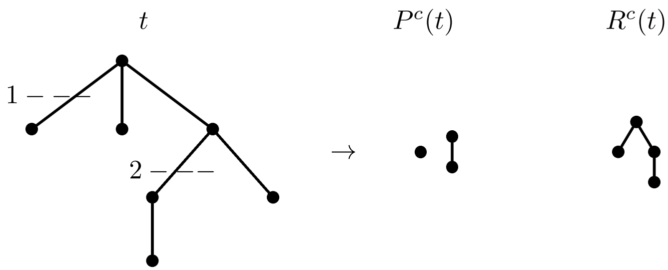
   O conjunto de cortes admissíveis de t árvore planar continua sendo denotado por $\mathrm{Adm}(t)$.

Vamos usar a mesma notação para corte nulo cn, corte total ct, e conjunto dos cortes admissíveis estendido $\overline{\mathrm{Adm}}(t)$ que no caso comutativo.

Como antes, é útil pensar nos cortes nulo e total como:



Um corte admissível c em uma árvore ordenada t continua a separá-la, como no caso anterior, em dois pedaços: o $R^c(t)$, composto de uma única árvore e que contém a raiz, e $P^c(t)$, uma floresta ordenada contendo o restante dos pedaços. Agora devemos tomar cuidado com a ordem dos vértices filhos. Para $R^c(t)$, a ordem é a mesma mantida pela árvore ordenada t. Para $P^c(t)$, a ideia é que cada subárvore obtida com o corte mantém a ordenação induzida por t, e podemos ordenar as raízes dessas subárvores de acordo com a ordem do corte admissível que as gerou (cada subárvore está associada a uma única aresta do corte).



Feitas as observações com relação à ordem das árvores num corte admissível, passamos à definição do coproduto.

Definição 5.2.15. Seja uma árvore ordenada t. Defina o coproduto em t por

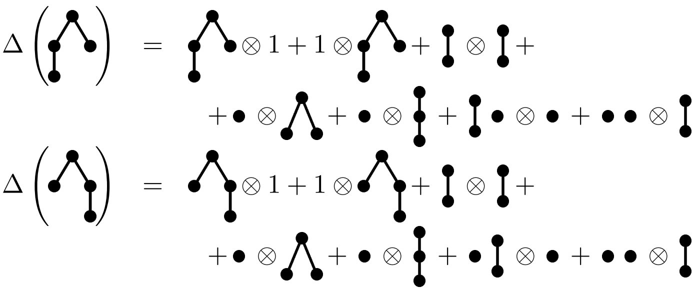
$$\begin{aligned}\Delta(t) &= t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) \\ &= \sum_{c \in \overline{\mathrm{Adm}}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t)\end{aligned}$$

e estenda a um morfismo de álgebras. A counidade será dada, para a árvore t, por

$$\varepsilon(t) = \delta_{1,t}$$

e estendemos esta função para um morfismo de álgebras também.

Exemplo 5.2.16.



Os resultados da seção anterior possuem análogos para o caso não comutativo. Apenas é necessário respeitar a ordem das árvores que aparecem numa floresta, e a ordem dos vértices filhos em todas as árvores. Por essa razão, suas provas são omitidas.

Lema 5.2.17. *Para todo $x \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, tem-se*

$$\Delta \circ B^+(x) = B^+(x) \otimes 1 + (\mathrm{Id} \otimes B^+) \circ \Delta(x) \ .$$

Teorema 5.2.18. *$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ com o produto, unidade, coproduto e counidade definidos acima é uma biálgebra (não comutativa).*

Proposição 5.2.19. *A biálgebra*

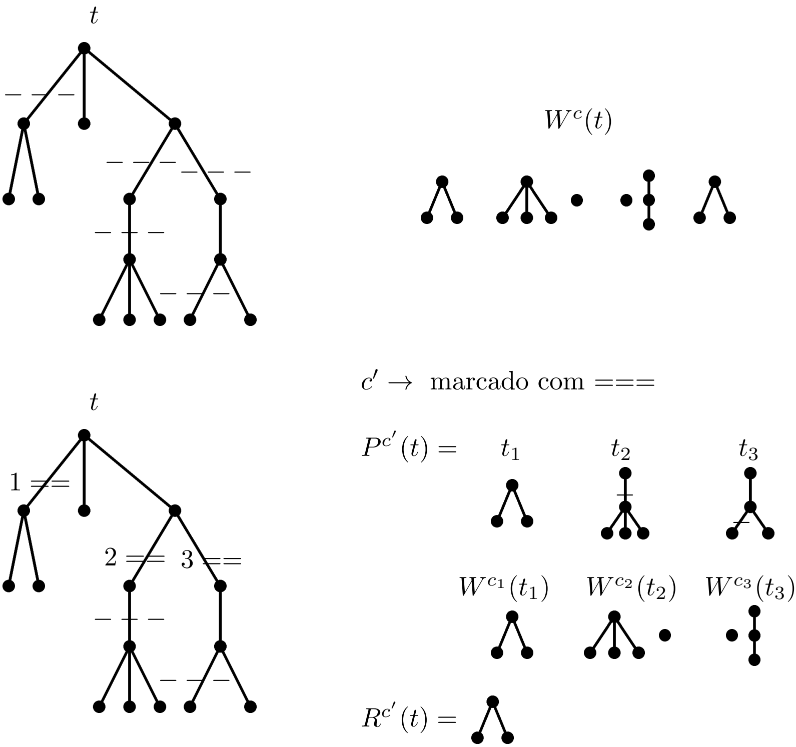
$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$$

é conexa com graduação, em que $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}(q)$ é o subespaço vetorial gerado pelas florestas ordenadas de q vértices. Portanto admite antípoda e é uma álgebra de Hopf.

O teorema a seguir, sobre a fórmula para a antípoda, também possui demonstração análoga ao do caso comutativo. Mas para isso, precisamos definir adequadamente $W^c(t)$ para uma árvore, determinando em que ordem os pedaços de t devem aparecer no produto. Precisamos que seja obedecida a relação

$$W^c(t) = W^{c_1}(t_1) \ldots W^{c_k}(t_k) \cdot R^{c'}(t) \ .$$

Aqui, t é uma árvore ordenada e $c \in \mathrm{Cut}(t)$ é um corte qualquer de t. O corte $c' \in \mathrm{Adm}(t)$ é o corte admissível obtido a partir de c considerando-se apenas as arestas que se ligam à raiz de t sem interceptar outras arestas do corte. Por fim, também denotamos $P^{c'}(t) = t_1 \dots t_k$, com $t_1, \dots, t_k$ ramos de t, e os cortes c_i são os cortes em t_i induzidos por c. A figura abaixo ilustra essas definições:

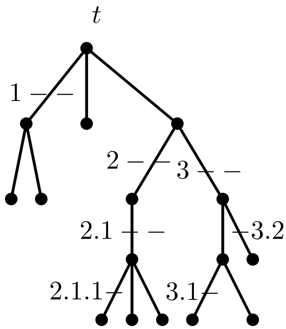


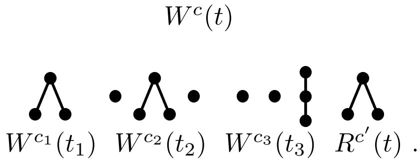
Repare que podemos ordenar os termos em $W^c(t)$ de maneira única para obtermos a relação desejada. Ordenamos os pedaços de forma indutiva. Primeiro, construímos c' a partir de c, e c' tem uma ordem intrínseca. Usamos c' para obter $P^{c'}(t) = t_1 \dots t_k$ como acima. Obtemos os cortes c_i de t_i, com $n_{c_i} < n_c$. Colocamos os pedaços obtidos na seguinte ordem: os pedaços oriundos da primeira componente t_1 primeiro, depois os da componente t_2, e assim por diante, até t_k; por último, o pedaço que contém a raiz de t. Obtemos

$$W^c(t) = W^{c_1}(t_1) \dots W^{c_k}(t_k) \cdot R^{c'}(t) \ ,$$

a menos da ordem em cada pedaço de $W^{c_i}(t_i)$. Mas cada termo desses é ordenado pelo mesmo procedimento[1], até esgotarmos a quantidade de pedaços.

A figura abaixo ilustra a ordenação dos pedaços de $W^c(t)$:





Com essa definição de $W^c(t)$ para o caso ordenado, a fórmula para a antípoda no teorema abaixo é válida.

Teorema 5.2.20. *Seja t árvore ordenada. A antípoda é dada, recursivamente, por*

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \\ S(t) &= -t - \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} S\big(P^c(t)\big) R^c(t) \ . \end{aligned}$$

Também podemos escrevê-la em termos de cortes. Temos:

$$S(t) = - \sum_{c \in \mathrm{Cut}(t)} (-1)^{n_c} W^c(t) \ ,$$

em que

> $\mathrm{Cut}(t)$ *é o conjunto de cortes (não totais, mas incluindo o corte nulo e os cortes não-admissíveis) de t;*
>
> $\mathrm{Adm}(t)$ *é o conjunto de cortes admissíveis (excluindo corte nulo e corte total);*
>
> n_c *é o número de arestas cortadas por c;*

[1] Consideramos o corte admissível c_i' construído a partir de c_i. Obtemos $P^{c_i'}(t_i) = t_{i,1} \dots t_{i,k_i}$ e obtemos cortes $c_{i,j}$ nas componentes $t_{i,j}$ induzidos por c_i. Escrevemos cada $W^{c_i}(t_i)$ como $W^{c_{i,1}}(t_{i,1}) \dots W^{c_{i,k_i}}(t_{i,k_i}) \cdot R^{c_i'}(t_i)$, e ordenamos cada $W^{c_{i,j}}(t_{i,j})$ que ainda tiver mais de uma componente pelo mesmo procedimento...

$W^c(t)$ é a floresta obtida deletando-se as arestas de c em t, com os pedaços na ordem definida acima;

$P^c(t)$ e $R^c(t)$ estão especificados logo acima da definição 5.2.15.

Com isso, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ também é uma álgebra de Hopf no caso não comutativo.

5.2.2.2 Propriedade universal

A álgebra de árvores ordenadas de Connes-Kreimer também admite uma definição por propriedade universal. Também se usa o comportamento de $\Delta \circ B^+$ dado no lema 5.2.17, que é idêntico ao 5.2.6. Novamente, a demonstração é análoga à do caso comutativo, apenas cuidando-se a ordem das árvores e subárvores.

Definição 5.2.21. (H, b) é a álgebra de Connes-Kreimer (versão não-comutativa) se temos

1. H é uma álgebra associativa e com unidade
2. $b\colon H \to H$ é um operador linear

e se a seguinte propriedade universal é satisfeita:

3.(a) Dadas A álgebra associativa com unidade e $L\colon A \to A$ operador linear, existe um único morfismo de álgebras $\phi\colon H \to A$ tal que $\phi \circ b = L \circ \phi$. Isto é:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "L"] \\ H \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd}$$

3.(b) Se H e A são álgebras de Hopf, e L satisfaz

$$\Delta \circ L(x) = (\mathrm{Id} \otimes L) \circ \Delta(x) + L(x) \otimes 1_A$$

então ϕ é um morfismo de álgebras de Hopf.

Proposição 5.2.22. *$(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, B^+)$ satisfaz a propriedade universal.*

5.3 Álgebra de Grossman-Larson

Definiremos outra álgebra de Hopf utilizando os grafos tipo árvore como geradores, obtendo a álgebra de Grossman-Larson. Consideraremos sua versão para árvores ordenadas também.

5.3.1 Versão não-ordenada

Considere o espaço vetorial livre gerado pelas árvores não vazias RT, denotado por $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$. Vamos definir uma estrutura de álgebra de Hopf nesse espaço.

Definição 5.3.1. Definiremos uma multiplicação da seguinte forma. Dadas duas árvores $u \neq \bullet$ e v, tomamos a primeira, u, deletamos a raiz e as arestas ligadas à raiz, ficando com $u_1, \ldots, u_k$ subárvores. Penduramos essas subárvores em alguns vértices de v (ligando por uma aresta o vértice de v com a raíz de uma das subárvores). Somamos sobre todas as possíveis maneiras de pendurar as subárvores nos vértices de v (é permitido pendurar mais de uma subárvore num vértice, e deve-se conectar todas as subárvores exatamente uma vez). Essa soma é definida como $u \cdot v$, e tem $|v|^k$ termos (ou, maneiras diferentes de se pendurar). Estendemos essa definição para $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ por distributividade.

Também definimos que $\bullet \cdot v = v$. A unidade para esse produto é $\bullet$.

Definiremos também uma notação auxiliar para esse produto. Seja

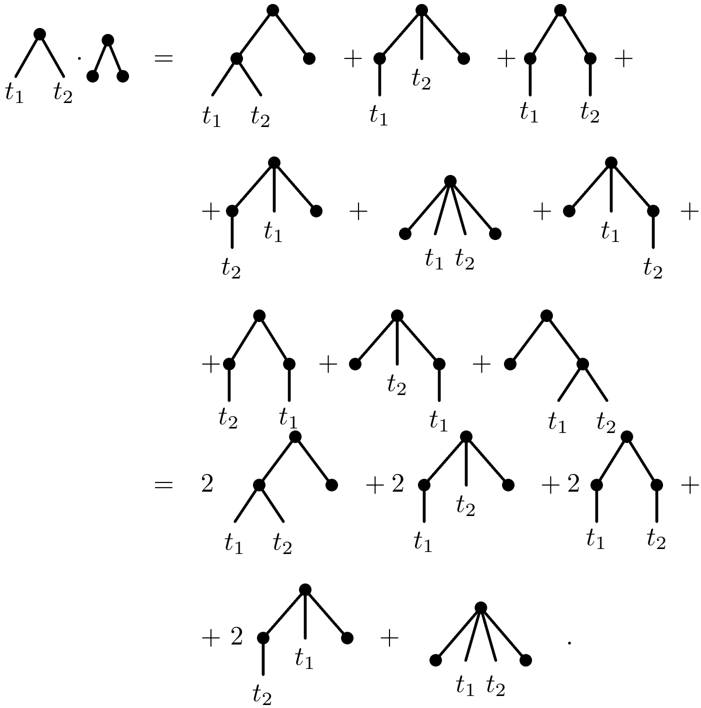
$$\sigma\colon \mathrm{Edge}(u) \to \mathrm{Vert}(v)$$

uma função, em que $\mathrm{Edge}(u)$ é o conjunto de arestas que ligam as subárvores de u à raiz e $\mathrm{Vert}(v)$ é o conjunto de vértices de v. Essa função determina uma maneira de se pendurar as subárvores $u_1, \ldots, u_k$ de u nos vértices de v, da maneira indicada acima (a cada aresta $x_i \in \mathrm{Edge}(u)$ se corresponde uma única subárvore u_i, aquela que é ligada à raiz de u por x_i). Denotamos a árvore resultante dessa maneira σ de se pendurar por v^σ. Temos $v^\sigma \supseteq v, u_1, \ldots, u_k$, isto é, há uma cópia de cada uma destas árvores em v^σ. Se chamarmos de $F(u,v)$ o conjunto de todas as funções $\mathrm{Edge}(u) \to \mathrm{Vert}(v)$, então podemos denotar o produto por

$$u \cdot v = \sum_{\sigma \in F(u,v)} v^\sigma \ .$$

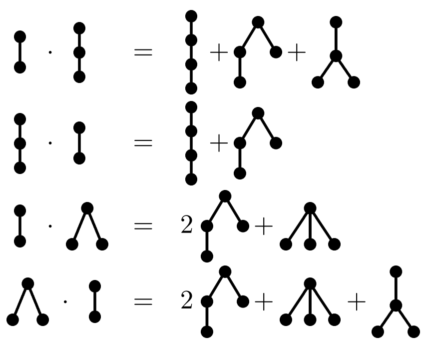
Repare que o número de termos da soma é $|F(u,v)| = |\mathrm{Vert}(v)|^{|\mathrm{Edge}(u)|} = |v|^k$, como antes.

Exemplo 5.3.2. Um esquema de como calcular o produto:



Dependendo do formato das árvores t_1 e t_2, é possível simplificar mais a expressão. Note que como estamos trabalhando com árvores não-ordenadas, podemos comutar os ramos das árvores e permanecer com o mesmo elemento. O número de termos (antes de juntar) é $3^2 = 9$, pois podemos pendurar a árvore t_1 de 3 maneiras diferentes, e a árvore t_2 também de 3 maneiras diferentes; e as maneiras de pendurar são independentes.

Exemplo 5.3.3. Mais alguns exemplos



Observação 5.3.4. Pelo exemplo anterior, podemos ver que o produto não é comutativo.

Não é imediato que o produto seja associativo. Veremos na proposição a seguir.

Proposição 5.3.5. *O produto definido acima é associativo.*

Demonstração. Pela bilinearidade do produto, basta mostrar a relação $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ para $r, s, t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$. Faremos uma correspondência dos termos da soma $(r \cdot s) \cdot t$ com os termos da soma $r \cdot (s \cdot t)$, em que r, s e t são árvores não-nulas.

Começaremos fixando uma notação para esta demonstração. Usaremos a notação da definição 5.3.1 (do produto em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$), repetida aqui por conveniência. Para dadas $u, v \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$, considere o conjunto $F(u, v)$ das funções $\mathrm{Edge}(u) \to \mathrm{Vert}(v)$, em que $\mathrm{Edge}(u)$ é o conjunto de vértices ligados à raiz em u e $\mathrm{Vert}(v)$ é o conjunto dos vértices de v. Cada função

$$\varrho \in F(u, v)$$

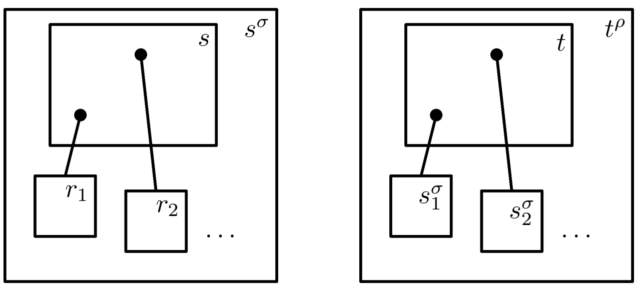
representa uma maneira distinta de se pendurar as subárvores de u em v, e define uma árvore v^ϱ dada por essa maneira de pendurar. O produto é dado, então, por

$$u \cdot v = \sum_{\varrho \in F(u,v)} v^\varrho \ .$$

Passamos, então, à correspondência entre os termos de $(r \cdot s) \cdot t$ e de $r \cdot (s \cdot t)$. Cada termo da soma em $(r \cdot s) \cdot t$ é resultado de:

1º pendurar as subárvores $r_1, r_2, \ldots$ de r em s de uma maneira dada por $\sigma \in F(r, s)$, obtendo-se s^σ ;

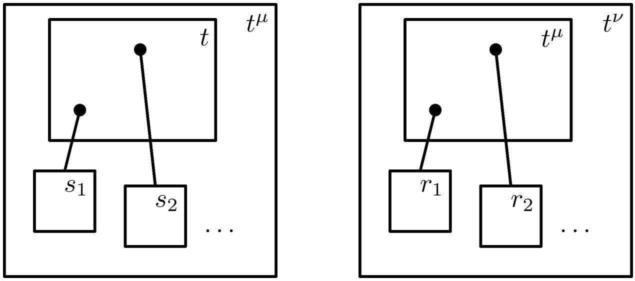
2º pendurar as subárvores $s_1^\sigma, s_2^\sigma, \ldots$ de s^σ em t de uma maneira $\rho \in F(s^\sigma, t)$, obtendo-se t^ρ.



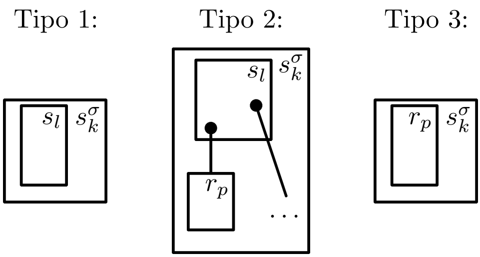
Cada termo da soma que aparece em em $r \cdot (s \cdot t)$ é resultado de:

1º pendurar as subárvores $s_1, s_2, \ldots$ de s em t da maneira dada por uma $\mu \in F(s,t)$, obtendo-se t^μ ;

2º pendurar as subárvores $r_1, r_2, \ldots$ de r em t^μ da maneira definida por uma $\nu \in F(r, t^\mu)$, obtendo-se t^ν.



Note que as subárvores de s^σ podem ser de 3 tipos diferentes, dependendo da maneira de pendurar σ e das subárvores penduradas. Apresentamos um esquema de cada um desses tipos abaixo. Cada s_l, s_k^σ e r_p representa alguma subárvore de s, s^σ e r, respectivamente.



(Cada termo da soma $(r \cdot s) \cdot t$ corresponde a um termo de $r \cdot (s \cdot t)$:)

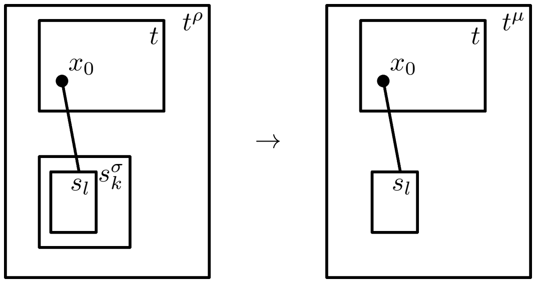
Sejam $\sigma \in F(r,s)$ e $\rho \in F(s^\sigma, t)$ correspondentes a um termo t^ρ da soma $(r \cdot s) \cdot t$. Exibiremos um termo correspondente em $r \cdot (s \cdot t)$. Isto é, definiremos $\mu \in F(s,t)$, t^μ, $\nu \in F(r, t^\mu)$ e t^ν tais que $t^\nu = t^\rho$.

Primeiramente, definimos $\mu \in F(s,t)$ e t^μ da seguinte forma. Seja s_l subárvore de s. Precisamos determinar onde essa subárvore é pendurada, em t. Seja s_k^σ a subárvore de $s^\sigma \supseteq s$ que contém s_l. Temos dois casos:

Caso 1: s_k^σ é do tipo 1:

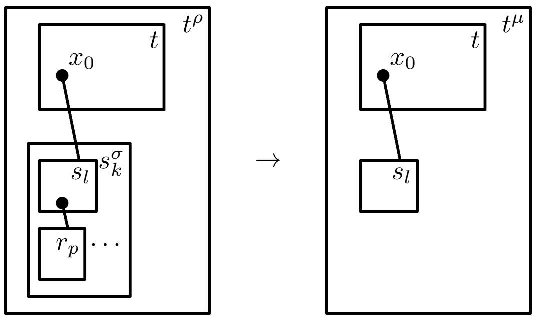
Temos que s_k^σ está pendurada em um vértice x_0 de $t \subseteq t^\rho$. Nesse caso, $s_l = s_k^\sigma$, e podemos pendurar s_l em t no mesmo vértice x_0.

Veja a seguinte figura:



Caso 2: s_k^σ é do tipo 2:

A subárvore s_k^σ está pendurada em um vértice x_0 de $t \subseteq t^\rho$. Como $s_l \subseteq s_k^\sigma$ engloba a raiz dessa subárvore, podemos pendurar s_l em x_0, para formar t^μ.

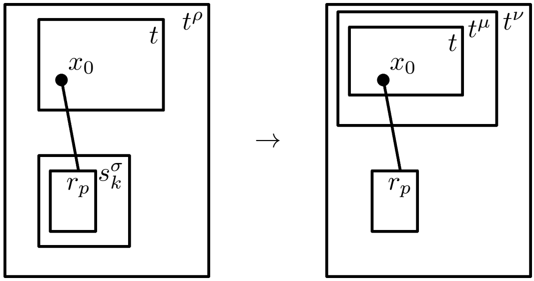


Agora definimos $\nu \in F(r, t^\mu)$ e t^ν. Seja r_p subárvore de r. Precisamos determinar onde essa subárvore é pendurada em t^μ para formar $t^\nu = t^\rho$. Temos que $r_p \subseteq s_k^\sigma$ para alguma subárvore s_k^σ de s^σ. Temos dois casos a se considerar:

Caso 1: s_k^σ é do tipo 3:

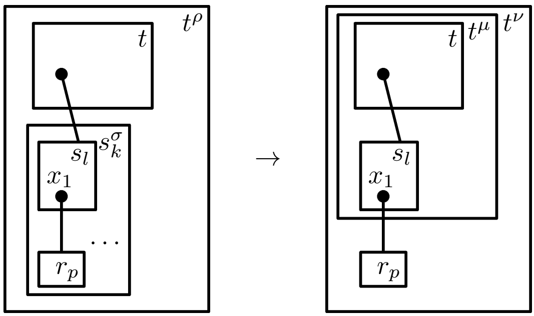
Seja x_0 o vértice no qual s_k^σ está pendurado, em t. Como $s_k^\sigma = r_p$ para alguma subárvore r_p de r, definimos a maneira de pendurar ν para formar t^ν pondo r_p pendurado diretamente no vértice x_0 em

$t \subseteq t^\mu$. Veja a figura abaixo:



Caso 2: s_k^σ é do tipo 2:

Nesse caso, temos que r_p está pendurado em alguma subárvore s_l de s, dentro de alguma subárvore s_k^σ de s^σ. Seja x_1 o vértice de s_l em que r_p está pendurado. Temos que x_1 é um vértice de $t^\mu \supseteq s_l$ também. Definimos, então, a maneira ν de pendurar para formar t^ν fazendo r_p pendurado em x_1, conforme a figura abaixo.



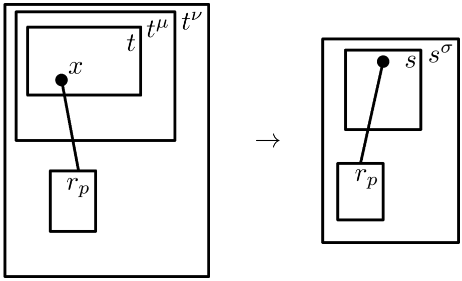
Assim, para cada termo t^ρ da soma em $(r \cdot s) \cdot t$, obtivemos um termo $t^\nu = t^\rho$ da soma em $r \cdot (s \cdot t)$.

(Cada termo da soma $r \cdot (s \cdot t)$ corresponde a um termo de $(r \cdot s) \cdot t$:)

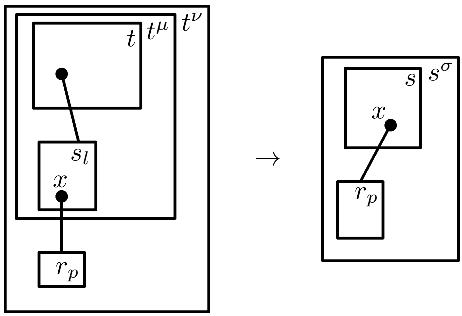
Sejam $\mu \in F(s,t)$ e $\nu \in F(r, t^\mu)$ correspondentes a um termo t^ν da soma em $r \cdot (s \cdot t)$. Exibiremos um termo correspondente em $(r \cdot s) \cdot t$, isto é, definiremos $\sigma \in F(r,s)$, s^σ, $\rho \in F(s^\sigma, t)$ e t^ρ tais que $t^\rho = t^\nu$.

Começamos obtendo $\sigma \in F(r,s)$ e s^σ. Seja r_p uma subárvore de r. Precisamos determinar em que vértice de s devemos pendurar r_p. Seja x o vértice de $t^\mu \subseteq t^\nu$ no qual r_p está pendurado (em t^ν). Temos dois casos a considerar:

Caso 1: x é um vértice de t:
Definimos a maneira de pendurar r_p em s pondo a subárvore r_p na raiz de s.



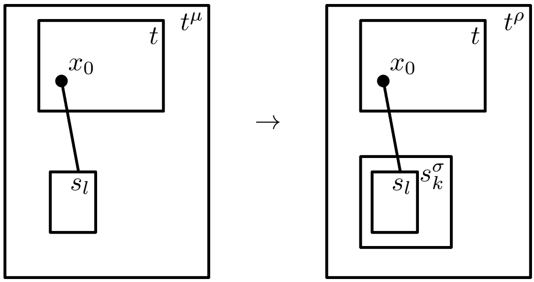
Caso 2: x não é um vértice de t, e portanto, está em alguma subárvore s_l de s (que está pendurada em t formando t^μ):
Aqui, definimos a maneira de pendurar r_p em s (para obter s^σ ao final) pondo r_p no vértice x, que é vértice de s.



Por fim, definimos a maneira $\rho \in F(s^\sigma, t)$ de pendurar e o termo t^ρ a seguir. Seja s_k^σ uma subárvore de s^σ. Precisamos determinar onde, em t, essa subárvore deve ser pendurada. Consideramos os seguintes casos, conforme os diferentes formatos da subárvore s_k^σ.

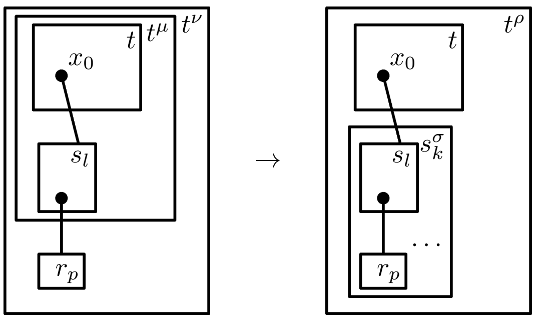
Caso 1: s_k^σ é do tipo 1:

Se $s_k^\sigma = s_l$, então quer dizer que em t^ν não há nenhuma subárvore de r pendurada em s_l, que é pendurada em t. Seja x_0 o vértice de $t \subseteq t^\nu$ em que s_l está pendurado. Definimos a maneira de pendurar s_k^σ em t pondo s_k^σ em x_0. A figura abaixo ilustra essa maneira de pendurar s_k^σ em t.



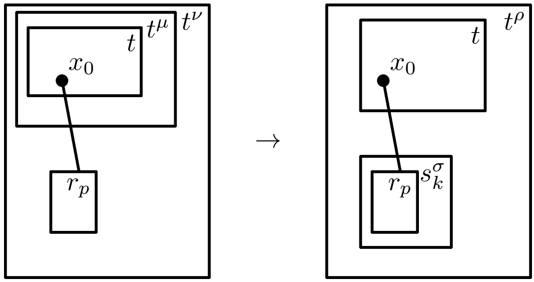
Caso 2: s_k^σ é do tipo 2:

Se s_k^σ é desse formato, então existe uma subárvore s_l de s contida em s_k^σ. Considerando s_l em t^μ, seja x_0 o vértice de $t \subseteq t^\mu$ em que s_l está pendurado. Definimos a maneira de pendurar s_k^σ em t pendurando-se s_k^σ em x_0.



Caso 3: s_k^σ é do tipo 3:

Pela definição de s^σ, esse formato de subárvore só ocorre se r_p tiver sido pendurado diretamente em t (em t_ν). (Ver *caso 1* da definição de s^σ). Seja x_0 o vértice de $t \subseteq t^\nu$ em que r_p está pendurado. Temos:



Por fim, concluímos que há uma bijeção entre as maneiras de pendurar em $r \cdot (s \cdot t)$ e em $(r \cdot s) \cdot f$. Essas maneiras de pendurar produzem os mesmos elementos $t^\rho = t^\nu$. Portanto, temos $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$. $\square$

Vamos à definição do coproduto e da counidade.

Definição 5.3.6. Δ será definido desta forma. Seja t uma árvore. Remova a raiz, ficando com $t_1, \ldots, t_n$ árvores, e em seguida selecione algumas dessas subárvores. Digamos que foram selecionadas $t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}$ e sobraram $t_{j_1}, \ldots, t_{j_l}$, com $k + l = n$. Adicione uma raiz e pendure todas as subárvores selecionadas nela. Também adicione uma nova raiz e pendure as subárvores que sobraram. Ficamos com duas árvores, uma para as subárvores selecionadas e outra para o resto. Colocamos as duas nas entradas de um tensor, sendo a primeira a selecionada e a segunda a das sobras. Agora some sobre todas as maneiras de selecionar subárvores. Essa soma será o resultado de $\Delta(t)$. Por fim, estenda linearmente para combinações de árvores. Escrevendo de outra forma, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \bullet \\
\Delta(t) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} B^+\big(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\big) \otimes B^+\big(t_{\sigma(k+1)} \ldots t_{\sigma(n)}\big) \\
&= t \otimes \bullet + \bullet \otimes t + \\
&\qquad \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} B^+\big(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\big) \otimes B^+\big(t_{\sigma(k+1)} \ldots t_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} t^\sigma_{(1)} \otimes t^\sigma_{(2)} \ ,
\end{aligned}
$$

em que $S_{n,k}$ é o conjunto das permutações σ do tipo "shuffle" de $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, são permutações tais que:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(l) \\ &\sigma(l+1) < \sigma(l+2) < \ldots < \sigma(k) \ , \end{aligned}$$

e definimos a notação auxiliar:

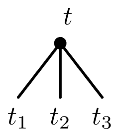
$$\begin{aligned} t^{\sigma}_{(1)} &:= B^{+}\big(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\big) \\ t^{\sigma}_{(2)} &:= B^{+}\big(t_{\sigma(k+1)} \ldots t_{\sigma(n)}\big) \ . \end{aligned}$$

Se a árvore t tem n subárvores $t_1, \ldots, t_n$, o número de termos da soma é

$$\sum_{k=0}^{n} |S_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

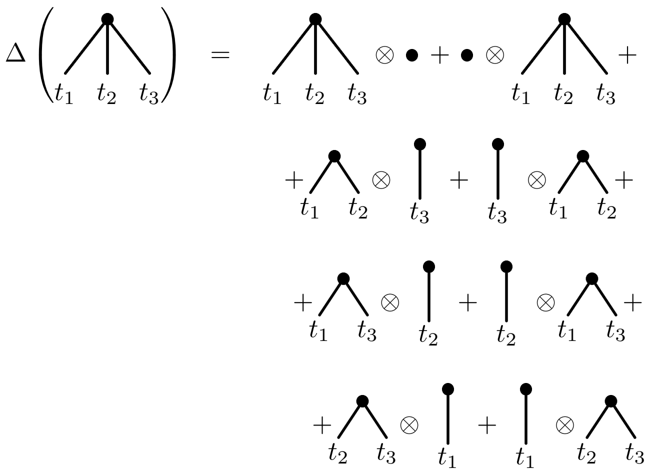
A counidade é a transformação linear definida na base por $\varepsilon(t) = \delta_{t,\bullet}$.

Exemplo 5.3.7. Um exemplo do processo de cálculo do coproduto:

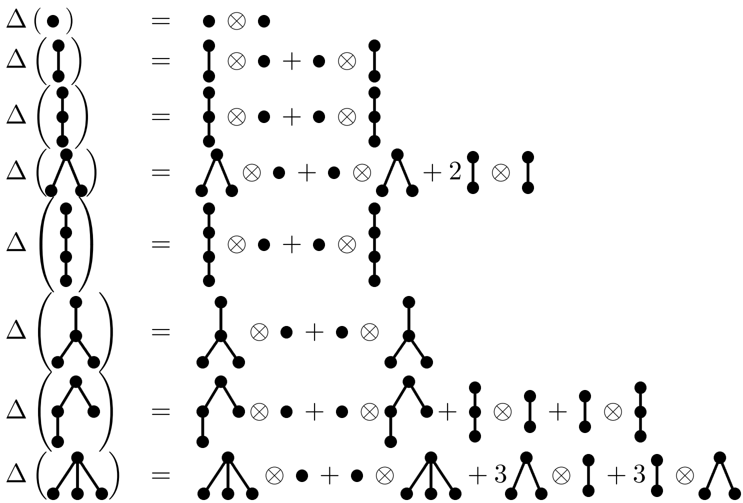


$\to$ $B^-(t)$: $t_1 \ t_2 \ t_3$ $\to$

selecionado	resto
$t_1 t_2 t_3$	
	$t_1 t_2 t_3$
t_1	$t_2 t_3$
$t_2 t_3$	t_1
t_2	$t_1 \ t_3$
$t_1 \ t_3$	t_2
t_3	$t_1 t_2$
$t_1 t_2$	t_3



Exemplo 5.3.8. Cálculo do coproduto das árvores com tamanho de 1 até 4:



Observação 5.3.9. Verificando que $\varepsilon(t) = \delta_{t,\bullet}$ é counidade para Δ. Seja t árvore. Em $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(t))$, aplicamos ε na primeira entrada de $\Delta(t)$. O único termo de $\Delta(t)$ que não vai se anular é o que tem $\bullet$ na primeira entrada, que é $\bullet \otimes t$. Assim, a menos do isomorfismo canônico $\mathbb{K} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$,

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(t)) = 1 \cdot t \ .$$

A equação $(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta(t)) = t$ se mostra de forma análoga.

Observação 5.3.10. Os elementos da forma $B^+(t)$ são primitivos em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$. De fato, seja t árvore. Temos $B^+(t)$ primitivo pois pela definição do coproduto (as únicas seleções de subárvores possíveis em $B^+(t)$ são a seleção nula e a total), $\Delta\big(B^+(t)\big) = B^+(t) \otimes \bullet + \bullet \otimes B^+(t)$.

Por outro lado, se u árvore é um elemento primitivo em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$, então $u = B^+(t)$ para alguma árvore t. De fato, se não fosse, u conteria pelo menos duas subárvores, e ao calcularmos $\Delta(u)$, além de parcelas referentes à seleção nula e à seleção total, que forneceriam os termos $u \otimes \bullet + \bullet \otimes u$, teríamos mais parcelas com outras seleções de subárvores (e que não podem se cancelar). Assim, u não poderia ser primitivo, e temos uma contradição.

Dessa forma,

$$\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}) = \mathrm{span}\{B^+(t) \colon t \in \mathrm{RT}\} \ .$$

Proposição 5.3.11. *O coproduto é coassociativo e cocomutativo.*

Demonstração. Basta verificar essas propriedades para uma árvore t qualquer.
(Cocomutatividade do coproduto:)

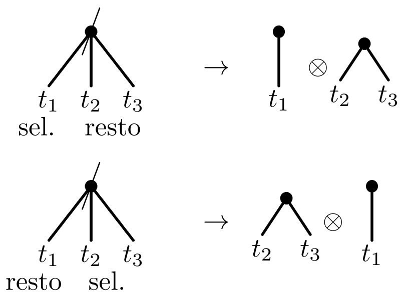
A cocomutatividade vem do fato de que para qualquer escolha de subárvores, podemos fazer a "escolha contrária" de subárvores (escolhendo as do resto). Então na soma que define $\Delta(t)$, teremos um termo do tipo

$$t_{\text{escolha}} \otimes t_{\text{resto}}$$

e outro termo do tipo

$$t_{\text{escolha contrária}} \otimes \ t_{\text{resto contrário}} = t_{\text{resto}} \otimes t_{\text{escolha}} \ .$$

Por exemplo:

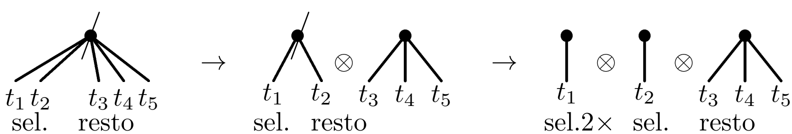


Portanto, o coproduto é cocomutativo.

(Coassociatividade do coproduto:)
Para a coassociatividade, procuraremos uma correspondência entre as parcelas de $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(t)$ e de $(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(t)$. Essas parcelas são analisadas mais detalhadamente abaixo:

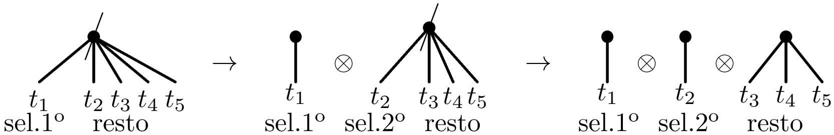
> *Caso 1:* Um termo da soma em $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(t)$ corresponde a selecionar subárvores de t e, dentre as selecionadas, selecionar de novo, e montar o termo

$$t_{\text{selecionada2}\times} \otimes t_{\text{selecionada}} \otimes t_{\text{resto}} \ .$$



Caso 2: Um termo da soma em $(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(t)$ corresponde a selecionar subárvores de t e selecionar dentre as subárvores do resto, e montar o termo

$$t_{\text{selecionada primeiro}} \otimes t_{\text{selecionada depois}} \otimes t_{\text{resto}} \ .$$



É possível ver que as seleções em um caso têm relação um para um com as seleções no outro, e os termos correspondentes são iguais. Assim, como fazemos a soma sobre todas as seleções possíveis, temos $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(t) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(t)$ e segue a coassociatividade. □

Mostramos agora que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma biálgebra com a estrutura acima.

Proposição 5.3.12. *Com o produto, unidade, coproduto e counidade definidos acima, $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma biálgebra cocomutativa.*

Demonstração. Falta verificar que Δ e ε são morfismos de álgebras. Já temos que

$$\Delta(\bullet) = \bullet \otimes \bullet$$
$$\varepsilon(\bullet) = 1 \ .$$

Basta, então, mostrar as relações

$$\Delta(t \cdot u) = \Delta(t) \cdot \Delta(u)$$
$$\varepsilon(t \cdot u) = \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(u)$$

para árvores $t, u \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$.

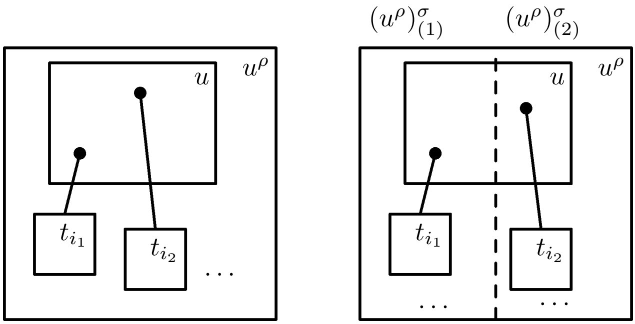
(Δ é morfismo de álgebras:)

Mostraremos uma correspondência entre os termos das somas de $\Delta(t \cdot u)$ e $\Delta(t) \cdot \Delta(u)$. Começaremos fixando a notação.

Cada termo da soma em $\Delta(t \cdot u)$ é resultado de:

1º pendurar as subárvores $t_1, t_2, \ldots$ de t em u de uma determinada maneira, digamos, $\rho \in F(t, u)$, obtendo u^ρ;

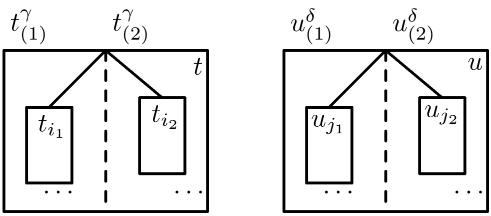
2º cortar e selecionar as subárvores de u^ρ por meio da permutação $\sigma \in S_{n(u^\rho),k(u^\rho)}$, obtendo-se o elemento $(u^\rho)_1^\sigma \otimes (u^\rho)_2^\sigma$ (em que $n(u^\rho)$ é o número de subárvores de u^ρ e $k(u^\rho)$ é o número de subárvores que foram selecionadas).

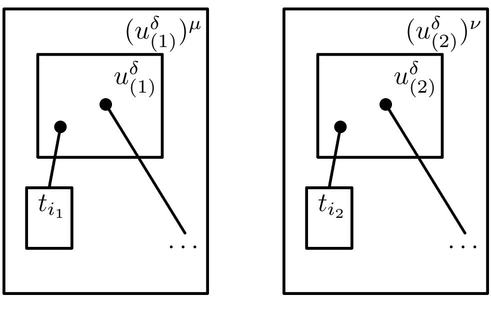


Cada termo da soma em $\Delta(t) \cdot \Delta(u)$ é resultado de:

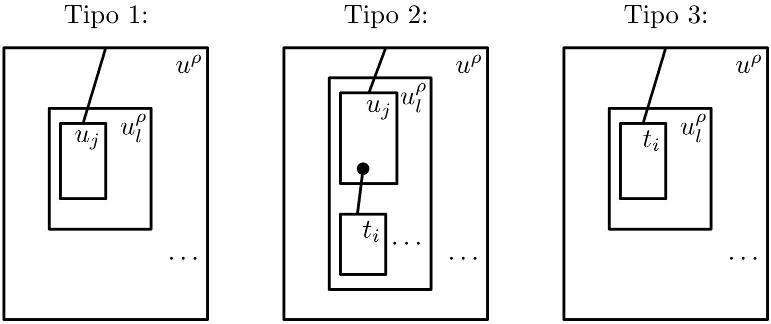
1º cortar e selecionar as subárvores de t e de u, por meio das permutações $\gamma \in S_{n(t),k(t)}$ e $\delta \in S_{n(u),k(u)}$, e os termos obtidos são $t^\gamma_{(1)} \otimes t^\gamma_{(2)}$ e $u^\delta_{(1)} \otimes u^\delta_{(2)}$;

2º pendurar $t^\gamma_{(1)}$ em $u^\delta_{(1)}$ e $t^\gamma_{(2)}$ em $u^\delta_{(2)}$, dos modos dados por $\mu \in F(t^\gamma_{(1)}, u^\delta_{(1)})$ e $\nu \in F(t^\gamma_{(1)}, u^\delta_{(1)})$, obtendo-se $(u^\delta_{(1)})^\mu \otimes (u^\delta_{(2)})^\nu$.





Ilustramos também o formato das subárvores de u^ρ. Estas podem ser de 3 tipos diferentes, conforme a figura abaixo:



Passamos, então, à correspondência entre os termos da soma.
(Cada termo da soma em $\Delta(t \cdot u)$ corresponde a um termo de $\Delta(t) \cdot \Delta(u)$:)

Sejam dados

$\rho \in F(t,u)$, que resulta na árvore u^ρ, e

$\sigma \in S_{n(u^\rho),k(u^\rho)}$, que resulta nas árvores $(u^\rho)^\sigma_{(1)}$ e $(u^\rho)^\sigma_{(2)}$.

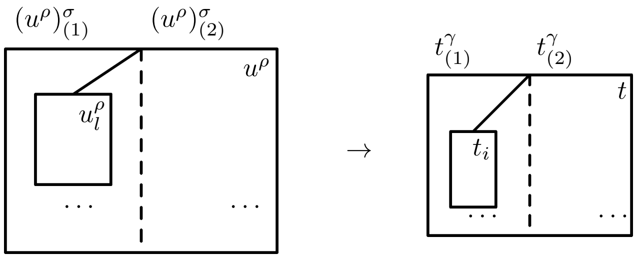
O termo $(u^\rho)^\sigma_{(1)} \otimes (u^\rho)^\sigma_{(2)}$ é o termo da soma $\Delta(t \cdot u)$ considerado. Exibiremos

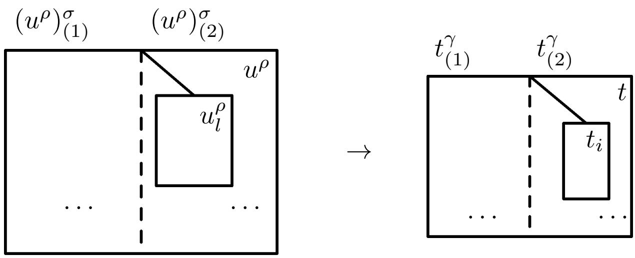
$\gamma \in S_{n(t),k(t)}$, $\delta \in S_{n(u),k(u)}$, que fornecem as árvores $t^\gamma_{(1)}$, $t^\gamma_{(2)}$, $u^\delta_{(1)}$ e $u^\delta_{(2)}$,

$\mu \in F(t^\gamma_{(1)}, u^\delta_{(1)})$ e $\nu \in F(t^\gamma_{(2)}, u^\delta_{(2)})$, que fornecem as árvores $(u^\delta_{(1)})^\mu$ e $(u^\delta_{(2)})^\nu$

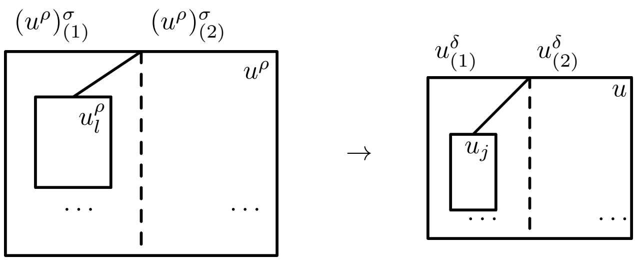
tais que $(u^\delta_{(1)})^\mu \otimes (u^\delta_{(2)})^\nu = (u^\rho)^\sigma_{(1)} \otimes (u^\rho)^\sigma_{(2)}$.

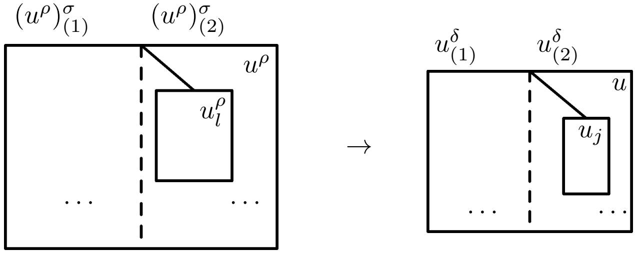
Para definir γ, devemos determinar as condições para uma certa subárvore de t ser selecionada (tornando-se, então, subárvore de $t^\gamma_{(1)}$) ou não (tornando-se subárvore de $t^\gamma_{(2)}$). Seja t_i uma subárvore de t. Temos t_i contido em u^ρ, e portanto está contido em uma única subárvore u_l^ρ de u^ρ. Essa subárvore está ou em $(u^\rho)^\sigma_{(1)}$ ou em $(u^\rho)^\sigma_{(2)}$. No primeiro caso, definimos que t_i é selecionada para compor $t^\gamma_{(1)}$, e no segundo caso, definimos que t_i não é selecionada, compondo o termo $t^\gamma_{(2)}$.





Definimos δ de modo parecido. Seja u_j uma subárvore de $u \subset u^\rho$. Então u_j está contido numa única subárvore u^ρ_l de u^ρ. Se $u^\rho_l \subseteq (u^\rho)^\sigma_1$, então definimos que u_i é selecionada, compondo $u^\delta_{(1)}$, e se $u^\rho_l \subseteq (u^\rho)^\sigma_2$, definimos que u_i não é selecionada, compondo o termo $u^\delta_{(2)}$.

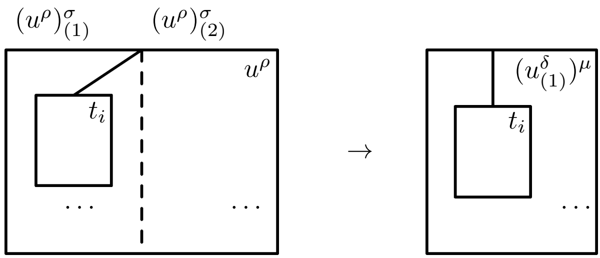




Vamos à definição das maneiras de pendurar μ e ν. Para definir μ, precisamos considerar uma subárvore de $t^\gamma_{(1)}$ e definir em que vértice de $u^\delta_{(1)}$ deve ser pendurado. Seja t_i um uma subárvore de $t^\gamma_{(1)}$, e automaticamente, uma subárvore de t. Seja u^ρ_l a subárvore de u^ρ na qual t_i está contido. A subárvore u^ρ_l pode ser ou do tipo 2 ou do tipo 3. Temos os dois casos abaixo.

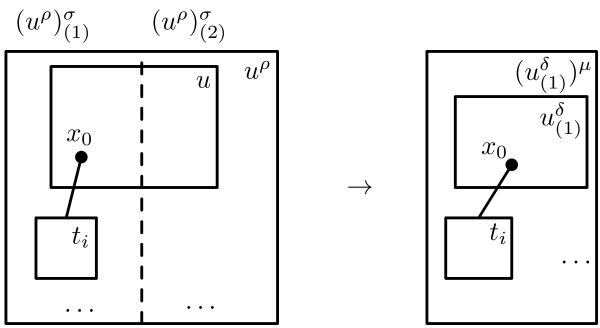
Caso 1: u^ρ_l é do tipo 3:

t_i está pendurado na raiz de u^ρ. Definimos a maneira de pendurar t_i em $u^\delta_{(1)}$ pondo t_i na raiz de $u^\delta_{(1)}$.



Caso 2: u^ρ_l é do tipo 2:

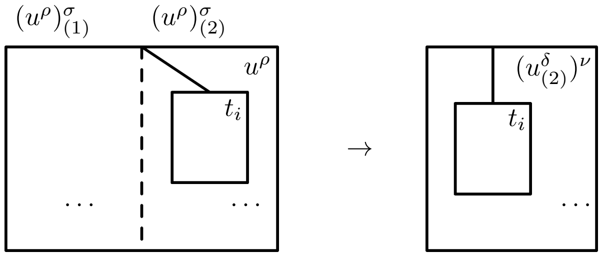
t_i está pendurado em um vértice x_0 de u, numa subárvore $u_j \subseteq u^\rho_l$. Por definição de γ, temos que a subárvore u^ρ_l está na parte selecionada $(u^\rho)^\sigma_{(1)}$. Em consequência, pela definição de δ, temos $u_j \subseteq u^\delta_{(1)}$. Portanto $x_0 \in u^\delta_{(1)}$, e podemos definir a maneira de pendurar t_i em $u^\delta_{(1)}$ pondo t_i em x_0.



Para definir ν, consideramos uma subárvore de $t^\gamma_{(2)}$ e definimos em que vértice de $u^\delta_{(2)}$ esta deve ser pendurada. Seja t_i uma subárvore de $t^\gamma_{(2)}$, automaticamente sendo uma subárvore de t. Sabemos que t_i está contido numa única u_l^ρ subárvore de u^ρ. A subárvore u_l^ρ pode ser ou do tipo 2 ou do tipo 3, e como antes, consideramos os dois casos.

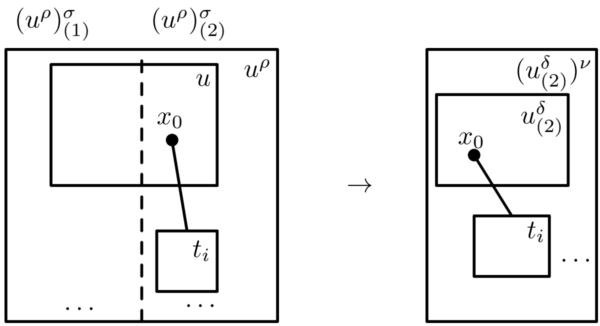
Caso 1: u_l^ρ é do tipo 3:

t_i está pendurado na raiz de u^ρ. Definimos a maneira de pendurar t_i em $u_{(2)}^\delta$ pondo t_i na raiz de $u_{(2)}^\delta$.



Caso 2: u_l^ρ é do tipo 2:

t_i está pendurado em um vértice x_0 de u, numa subárvore $u_j \subseteq u_l^\rho$. Por definição de γ, temos que a subárvore u_l^ρ está na parte restante $(u^\rho)^\sigma_{(2)}$. Em consequência, pela definição de δ, temos $u_j \subseteq u^\delta_{(2)}$. Dessa forma, $x_0 \in u^\delta_{(2)}$, e podemos definir a maneira de pendurar t_i em $u^\delta_{(2)}$ fazendo t_i pendurado em x_0.



(Cada termo da soma em $\Delta(t)\cdot\Delta(u)$ corresponde a um termo de $\Delta(t\cdot u)$:)

Agora, sejam dados

$\gamma \in S_{n(t),k(t)}$, $\delta \in S_{n(u),k(u)}$, que fornecem as árvores $t^\gamma_{(1)}$, $t^\gamma_{(2)}$, $u^\delta_{(1)}$ e $u^\delta_{(2)}$ e

$\mu \in F(t^\gamma_{(1)}, u^\delta_{(1)})$ e $\nu \in F(t^\gamma_{(2)}, u^\delta_{(2)})$, que fornecem as árvores $(u^\delta_{(1)})^\mu$ e $(u^\delta_{(2)})^\nu$.

O termo $(u^{\delta}_{(1)})^{\mu} \otimes (u^{\delta}_{(2)})^{\nu}$ é o termo da soma em $\Delta(t) \cdot \Delta(u)$ considerado. Exibiremos

$\rho \in F(t,u)$, que resulta na árvore u^{ρ} e

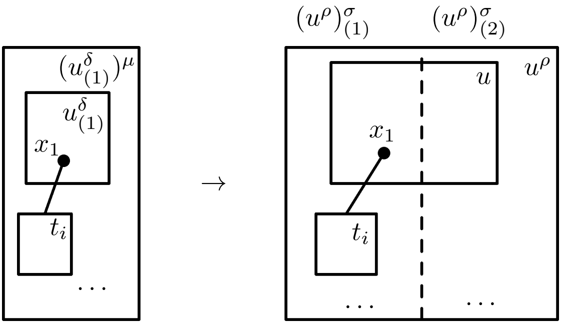
$\sigma \in S_{n(u^{\rho}),k(u^{\rho})}$, que resulta nas árvores $(u^{\rho})^{\sigma}_{(1)}$ e $(u^{\rho})^{\sigma}_{(2)}$

tais que $(u^{\rho})^{\sigma}_{(1)} \otimes (u^{\rho})^{\sigma}_{(2)} = (u^{\delta}_{(1)})^{\mu} \otimes (u^{\delta}_{(2)})^{\nu}$.

Começamos exibindo ρ. Para definí-lo, precisamos tomar uma subárvore de t e mostrar como pendurá-la em u. Seja t_i uma subárvore de t. Então é uma subárvore ou de $t^{\gamma}_{(1)}$ ou de $t^{\gamma}_{(2)}$.

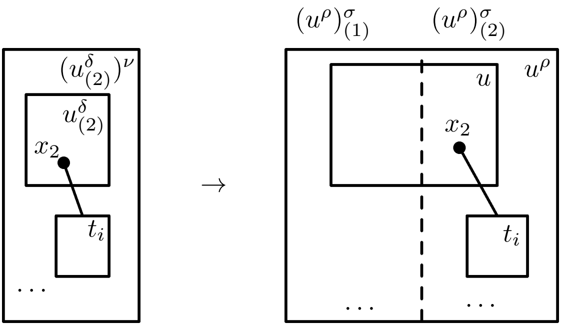
Caso 1: t_i é subárvore de $t^{\gamma}_{(1)}$:

Considere $(u^{\delta}_{(1)})^{\mu}$. Então existe um vértice x_1 de $u^{\delta}_{(1)}$ no qual t_i está pendurado. Considere x_1 em u e defina a maneira de pendurar t_i em u como sendo pendurar t_i no vértice x_1.



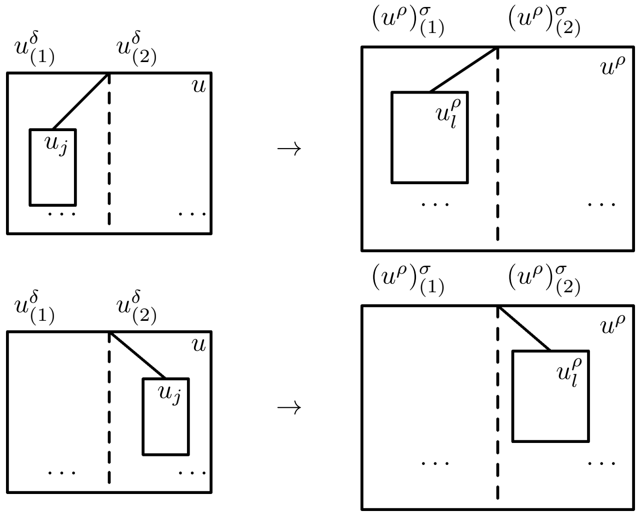
Caso 2: t_i é subárvore de $t^{\gamma}_{(2)}$:

Considere $(u^{\delta}_{(2)})^{\nu}$. Existe um vértice x_2 de $u^{\delta}_{(2)}$ no qual t_i está pendurado. Considere x_1 em u e defina o modo de pendurar t_i em u como sendo pendurar t_i no vértice x_2.

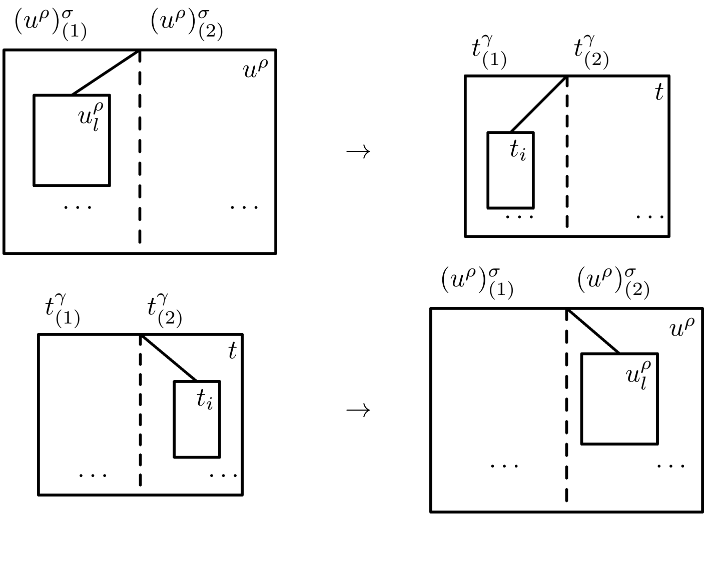


Definimos, agora, σ. Precisamos tomar uma subárvore de u^{ρ} e decidir se esta é selecionada (tornando-se subárvore de $(t^{\rho})^{\sigma}_{(1)}$) ou não (tornando-se subárvore de $(t^{\rho})^{\sigma}_{(2)}$). Seja u^{ρ}_{l} uma subárvore de u^{ρ}. Esta pode ser de três formatos diferentes. Consideramos cada caso abaixo.

Caso 1: u_l^ρ dos tipos 1 e 2:
Temos $u_j \subseteq u_l^\rho$ para alguma subárvore de u. Definimos $u_l^\rho \subseteq (u_l^\rho)^\sigma_{(1)}$ se $u_j \subseteq u^\delta_{(1)}$ e $u_l^\rho \subseteq (u_l^\rho)^\sigma_{(2)}$ se $u_j \subseteq u^\delta_{(2)}$.



Caso 2: u_l^ρ do tipo 3:
Temos $u_l^\rho = t_i$ para alguma subárvore de t. Definimos $u_l^\rho \subseteq (u_l^\rho)^\sigma_{(1)}$ se $u_j \subseteq t^\gamma_{(1)}$ e $u_l^\rho \subseteq (u_l^\rho)^\sigma_{(2)}$ se $u_j \subseteq t^\gamma_{(2)}$.



Terminamos, pois, obtendo a equivalência entre os termos de $\Delta(t\cdot u)$ e $\Delta(t)\cdot\Delta(u)$. Com isso concluímos que Δ é um morfismo de álgebras.

Passamos, então, à verificação de que ε é morfismo de álgebras.

(ε é morfismo de álgebras:)
Basta ver que dadas t e u árvores, $t\cdot u$ terá sempre termos com mais vértices que $\bullet$, a não ser que $t = u = \bullet$. Portanto

$$\begin{aligned} \varepsilon(t\cdot u) = 0 = \varepsilon(t)\varepsilon(u) &\quad \text{se } t \neq \bullet \text{ ou } u \neq \bullet \\ \varepsilon(t\cdot u) = \varepsilon(\bullet) = 1 = \varepsilon(t)\varepsilon(u) &\quad \text{se } t = u = \bullet \end{aligned}$$

e temos que ε é morfismo de álgebras. □

A biálgebra $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ admite uma graduação natural dada pelo número de vértices das árvores, e portanto é uma biálgebra conexa. Pelo teorema 4.2.1, é uma álgebra de Hopf.

Proposição 5.3.13. *A biálgebra*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$$

é conexa com graduação. Acima, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$ são os espaços gerados pelas árvores com número de vértices igual a $q+1$.

Demonstração. Mostraremos que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$ é uma graduação e torna $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ conexa. Temos que:

1. $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(0) = \mathbb{K}\bullet$;

2. Por construção, $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} = \displaystyle\bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$;

3. O produto $u\cdot v$ de árvores com tamanho $|u| = p+1$ e $|v| = q+1$ produz uma soma de árvores com tamanho $|u\cdot v| = |u| + |v| - 1 = p+q+1$, portanto $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(p)\cdot\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q) \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(p+q)$;

4. Seja t uma árvore com $|t| = q+1$. As parcelas de $\Delta(t)$ consistem na concatenação via B^+ de algumas subárvores de t na primeira entrada do tensor e do restante das subárvores concatenadas via B^+ na segunda entrada. Lembramos que $|B^+(x)| = |x| + 1$ para qualquer árvore x. Se $l+1$ é a ordem da árvore que ficou na primeira

entrada, então $q-l+1$ é a ordem da árvore na segunda entrada do produto tensorial. Portanto $\Delta(t) \in \sum_{l=0}^{q} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(l) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q-l)$, e $\Delta(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)) \subseteq \sum_{l=0}^{q} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(l) \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q-l)$.

□

Proposição 5.3.14. *$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma álgebra de Hopf, com antípoda dada recursivamente por:*

$$
\begin{aligned}
S(\bullet) &= \bullet \\
S(t) &= -t - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} S\Big(B^+\big(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(l)}\big)\Big) \cdot B^+\big(t_{\sigma(l+1)} \dots t_{\sigma(k)}\big) \\
&= -t - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} S\big(t^{\sigma}_{(1)}\big) \cdot t^{\sigma}_{(2)} \ ,
\end{aligned}
$$

em que:

$t = B^+(t_1 \dots t_n)$ *é uma árvore com n subárvores;*

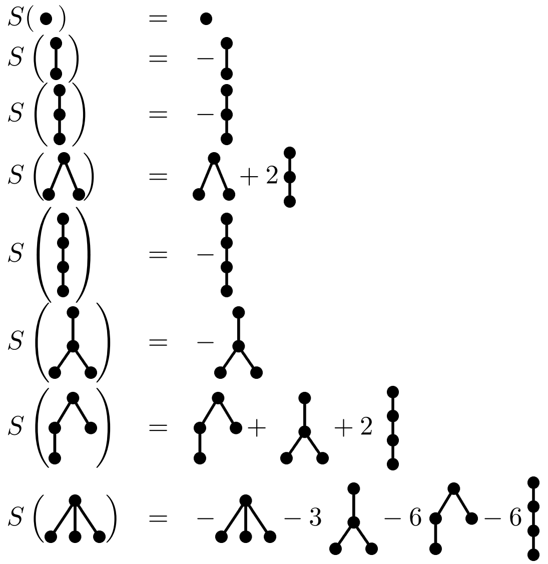
$S_{n,k}$ *é o conjunto das permutações do tipo "shuffle" de $\{1, 2, \dots, n\}$, isto é, permutações σ tais que*

$$
\begin{gathered}
\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \\
\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(n) \ ;
\end{gathered}
$$

$t^{\sigma}_{(1)} = B^+\big(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(l)}\big)$ *e* $t^{\sigma}_{(2)} = B^+\big(t_{\sigma(l+1)} \dots t_{\sigma(k)}\big)$.

Demonstração. Segue do teorema 4.2.1 e da definição do coproduto. □

Exemplo 5.3.15. Cálculo da antípoda para árvores de 1 a 4 vértices:



5.3.2 Versão ordenada

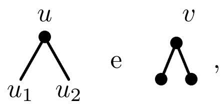
Nesta seção construiremos uma versão da álgebra de Grossman-Larson usando árvores ordenadas. Denote por $\mathcal{H}_{\text{GL}}$ o espaço vetorial gerado pelas árvores ordenadas não vazias PRT $\setminus \{1\}$. Usaremos, por simplicidade, a mesma notação do caso das árvores (não-ordenadas), e ficará especificado pelo contexto a que caso estamos nos referindo.

Repetiremos as definições e proposições, análogas às da seção anterior, chamando a atenção para as diferenças, que consistem em preservar a ordenação nas árvores. As demonstrações das proposições, por serem essencialmente as mesmas, serão omitidas.

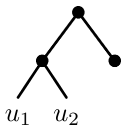
Definição 5.3.16. Definimos o produto entre duas árvores não-ordenadas e estendemos por bilinearidade.

Dadas duas árvores $u \neq \bullet$ e v, tomamos a primeira, u, deletamos a raíz e seus vértices, ficando com $u_1, \ldots, u_k$ subárvores. Penduramos essas subárvores em alguns vértices de v (ligando por uma aresta o vértice de v com a raíz de uma das subárvores). Somamos sobre todas as possíveis maneiras de pendurar as subárvores nos vértices de v, e a soma é definida como $u \cdot v$. É permitido pendurar mais de uma subárvore num vértice, e deve-se conectar todas as subárvores exatamente uma vez, como no caso das árvores não-ordenadas.

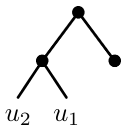
A diferença, nesse caso, é que devemos manter a ordem das subárvores quando estas são penduradas no mesmo vértice. Também quando penduramos uma subárvore num vértice que tenha outros galhos (da árvore original) é importante observar a maneira como a subárvore e os galhos estão intercalados. Desse modo, se temos



então

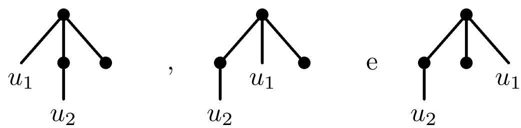


é uma maneira permitida de pendurar,



não é uma maneira permitida de pendurar,

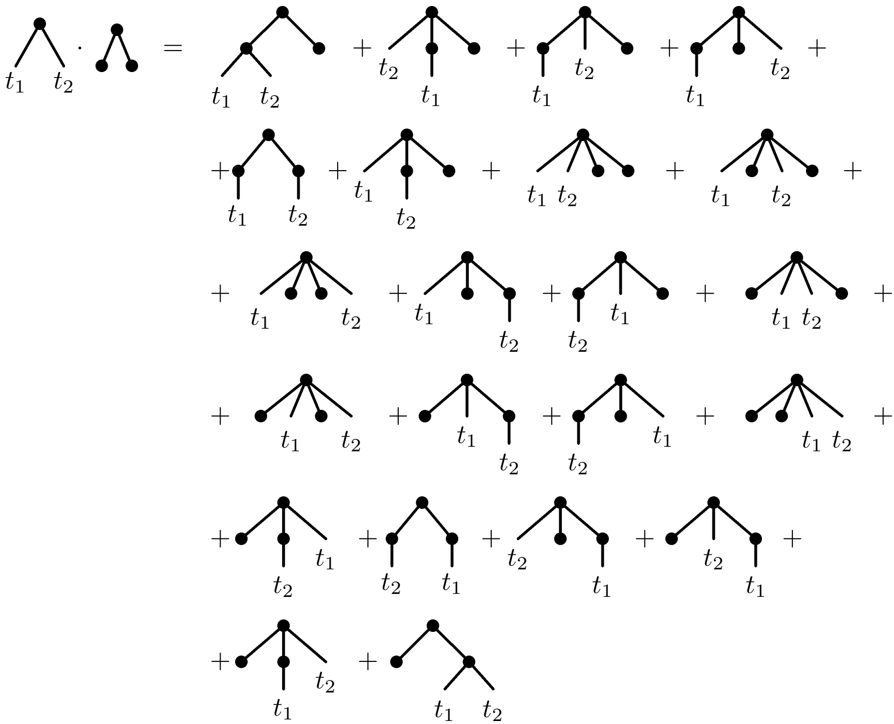
e temos que



são maneiras *diferentes* de pendurar.

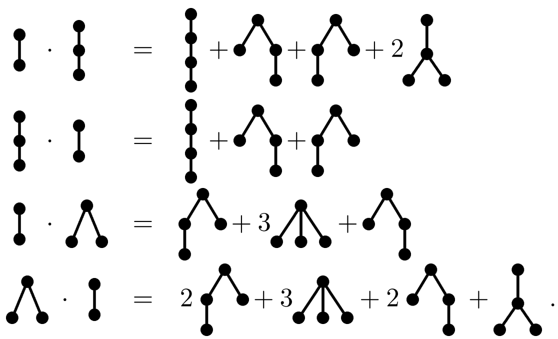
Também definimos que $\bullet \cdot v = v$, e portanto, a unidade para esse produto é $\bullet$.

Exemplo 5.3.17. Segue abaixo um esquema de cálculo do produto. Compare com o caso das árvores não-ordenadas do exemplo 5.3.2.



Não é possível juntar alguns desses termos se não soubermos o formato das árvores ordenadas t_1 e t_2.

Exemplo 5.3.18. Seguem mais alguns exemplos. Compare com o exemplo 5.3.3 do caso das árvores não-ordenadas.



Observação 5.3.19. Pelo exemplo anterior, podemos ver que o produto do caso não-ordenado continua sendo não comutativo.

Da mesma forma que no caso das árvores (não-ordenadas), esse produto é associativo. A demonstração segue a mesma ideia da do caso das árvores não ordenadas, com uma complicação adicional devido ao fato de podermos pendurar de maneiras diferentes num mesmo vértice (intercalando as subárvores nos ramos já existentes).

Proposição 5.3.20. *O produto definido acima é associativo.*

O coproduto é análogo ao caso das árvores não-ordenadas.

Definição 5.3.21. Δ é definido, para $t = B^+(t_1 \dots t_n)$ árvore ordenada, por

$$\begin{aligned}
\Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \bullet \\
\Delta(t) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} B^+\big(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(k)}\big) \otimes B^+\big(t_{\sigma(k+1)} \dots t_{\sigma(n)}\big) \\
&= t \otimes \bullet + \bullet \otimes t + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} B^+\big(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(k)}\big) \otimes B^+\big(t_{\sigma(k+1)} \dots t_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} t^{\sigma}_{(1)} \otimes t^{\sigma}_{(2)} \ ,
\end{aligned}$$

em que $S_{n,k}$ é o conjunto das permutações σ do tipo "shuffle" de $\{1, 2, \dots, n\}$, isto é, são permutações tais que

$$\begin{aligned}
&\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(l) \\
&\sigma(l+1) < \sigma(l+2) < \dots < \sigma(k) \ .
\end{aligned}$$

Também definimos a seguinte notação auxiliar, como antes:

$$\begin{aligned}
t^{\sigma}_{(1)} &:= B^+\big(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(k)}\big) \\
t^{\sigma}_{(2)} &:= B^+\big(t_{\sigma(k+1)} \dots t_{\sigma(n)}\big) \ .
\end{aligned}$$

A diferença desse caso, das árvores ordenadas, é que a operação B^+ preserva a ordem das árvores componentes da floresta ordenada. Note que a permutação do tipo "shuffle" também mantém a ordem das subárvores da árvore t nas duas componentes tensoriais do coproduto.
Se a árvore t tem n subárvores $t_1, \dots, t_n$, o número de termos da soma continua sendo

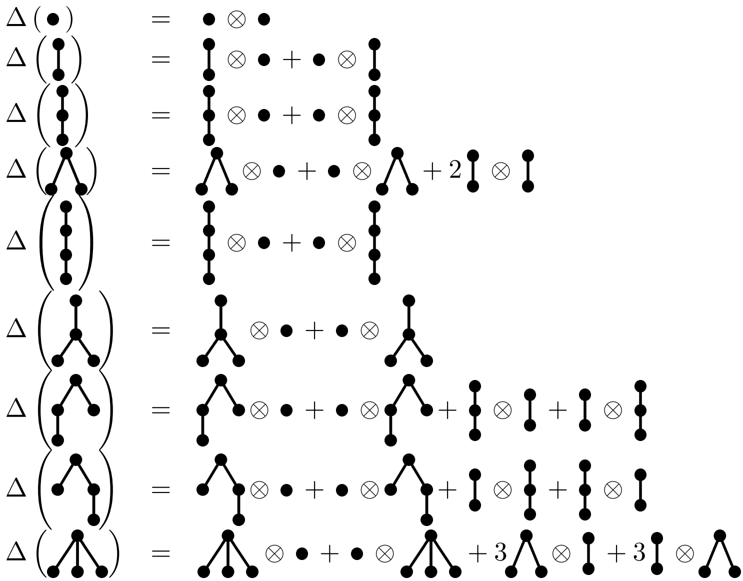
$$\sum_{k=0}^{n} |S_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

A counidade é a transformação linear definida na base por $\varepsilon(t) = \delta_{t,\bullet}$.

Observação 5.3.22. Os elementos da forma $B^+(t)$ são primitivos em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$, e

$$\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}) = \mathrm{span}\{B^+(t) \colon t \in \mathrm{PRT}\} \ .$$

Exemplo 5.3.23. Cálculo do coproduto das árvores de tamanho até 4:



Proposição 5.3.24. *O coproduto é coassociativo e cocomutativo.*

Proposição 5.3.25. *$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma biálgebra cocomutativa.*

Proposição 5.3.26. *A biálgebra*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$$

é conexa com graduação. Acima, os subespaços $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}(q)$ são os espaços gerados pelas árvores ordenadas com número de vértices igual a $q+1$.

Proposição 5.3.27. *A álgebra $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma álgebra de Hopf, com antípoda* *dada recursivamente, para $t = B^+(t_1 \ldots t_n)$, por:*

$$
\begin{aligned}
S(\bullet) &= \bullet \\
S(t) &= -t - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} S\Big(B^+\big(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(l)}\big)\Big) \cdot B^+\big(t_{\sigma(l+1)} \ldots t_{\sigma(k)}\big) \\
&= -t - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} S\big(t^{\sigma}_{(1)}\big) \cdot t^{\sigma}_{(2)} \ ,
\end{aligned}
$$

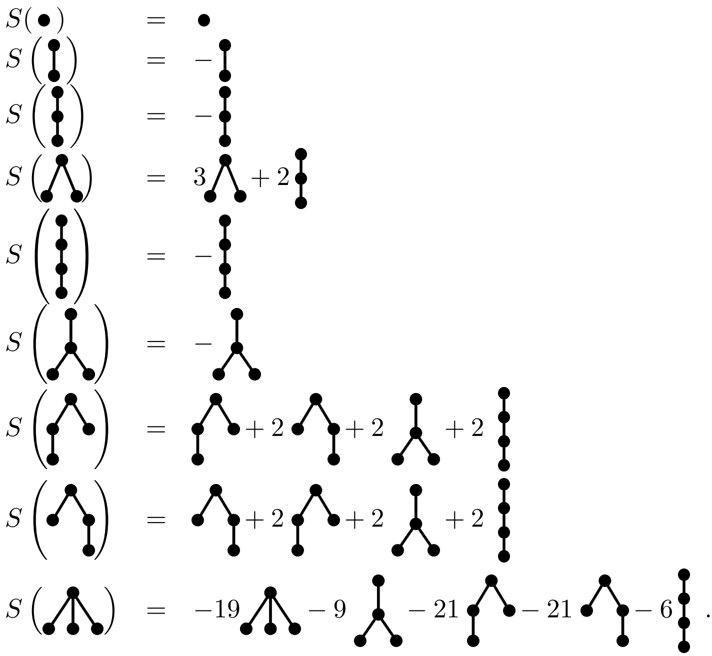
em que $S_{n,k}$ é o conjunto das permutações do tipo "shuffle" de $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, permutações σ tais que

$$
\begin{aligned}
&\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k) \\
&\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \ldots < \sigma(n) \ .
\end{aligned}
$$

Usamos também a notação auxiliar do coproduto:

$$
\begin{aligned}
t^{\sigma}_{(1)} &= B^+\big(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(l)}\big) \\
t^{\sigma}_{(2)} &= B^+\big(t_{\sigma(l+1)} \ldots t_{\sigma(k)}\big) \ .
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.3.28. Cálculo da antípoda aplicada nas árvores ordenadas com tamanho de 1 até 4:



5.4 Teorema de Panaite

As álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson são álgebras de Hopf conexas que admitem graduação. Exploraremos a relação entre essas duas álgebras no restante do trabalho.

Para mostrar a relação entre essas duas álgebras, será necessário mostrar o teorema de Panaite. Inicialmente, prepararemos a notação para abordar esse teorema. No decorrer, faremos uso do teorema de Milnor-Moore (teorema 4.4.12), e portanto será necessário assumir que o corpo $\mathbb{K}$ tenha característica nula.

O teorema de Panaite caracteriza a álgebra de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ como a álgebra envolvente universal de uma certa álgebra de Lie $\mathcal{F}$. Essa álgebra de Lie está no dual da álgebra de Connes-Kreimer, e será definida adequadamente no decorrer da seção.

Primeiramente, estabelecemos uma notação para os cortes admissíveis que selecionam apenas uma aresta. Será útil distinguí-los dos demais.

Definição 5.4.1. Seja $t \in \mathrm{RT}$ ou $t \in \mathrm{PRT}$. Chamamos de *cortes elementares* de t os cortes $c \in \mathrm{Cut}(t)$ que pegam apenas uma aresta de t. Os cortes elementares são cortes admissíveis, e denotamos o conjunto de cortes elementares por $\mathrm{Adm}_1(t)$. O conjunto de cortes admissíveis que pegam mais de uma aresta é denotado por $\mathrm{Adm}_{>1}(t)$.

Observação 5.4.2. Seja $t \in \mathrm{RT}$ ou $t \in \mathrm{PRT}$, e seja $c \in \mathrm{Adm}(t)$. Observe que são equivalentes:

1. $c \in \mathrm{Adm}_1(t)$ é corte elementar;

2. $P^c(t)$ é uma árvore (ordenada ou não-ordenada, dependendo do contexto);

3. $P^c(t)$ e $R^c(t)$ são árvores (ordenadas ou não-ordenadas).

De fato, 2. $\Leftrightarrow$ 3. é imediato pois $R^c(t)$ sempre é uma árvore. E 1. $\Leftrightarrow$ 2. porque o número de árvores em $P^c(t)$ é igual ao número de arestas cortadas por $c \in \mathrm{Adm}(t)$.

No restante da seção adotaremos a notação abaixo para os coeficientes dos termos do produto em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ e do coproduto em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

Definição 5.4.3. Sejam $u, v, r \in \mathrm{RT}$. Denote por:

$n(u, v; r)$ o coeficiente em r do produto $B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} v$, ou seja, o número de maneiras de se pendurar u em v e obter r;

$m(u, v; r)$ o coeficiente em $u \otimes v$ de $\Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(r)$, ou seja, o número de cortes (elementares) c de r tais que $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$.

Nessa notação, temos

$$B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} v = \sum_r n(u, v; r) r$$

$$\Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(r) = r \otimes 1 + 1 \otimes r + \sum_{u,v} m(u, v; r) u \otimes v + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_{>1}(r)} P^c(r) \otimes R^c(r) \ .$$

As somas são sobre todas as árvores (ordenadas ou não-ordenadas, dependendo do contexto em que estivermos), e apenas uma quantidade finita de coeficientes é não-nula em cada soma. Usaremos essa notação tanto no contexto das árvores não-ordenadas como no das árvores ordenadas.

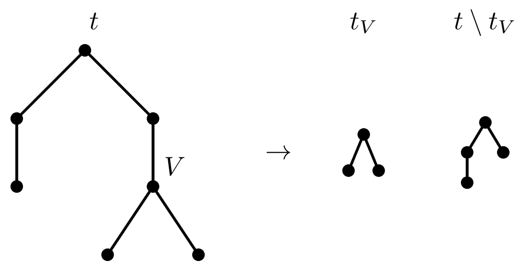
Há relação entre esses dois coeficientes, nos dois contextos. No caso das árvores ordenadas, esses coeficientes são iguais, e no caso não-ordenado, a relação é simples, mas exige alguns coeficientes multiplicativos para dar conta da comutatividade dos ramos das árvores. Veremos essas relações no começo das próximas seções.

5.4.1 Versão para árvores não-ordenadas

No caso das árvores não-ordenadas, podemos comutar os ramos de uma árvore e não alteramos a árvore considerada. Em particular, vamos voltar nossa atenção para as permutações entre ramos idênticos.

Definição 5.4.4. Seja $t \in \mathrm{RT}$ uma árvore não-ordenada. Dado um vértice V de t, podemos definir uma árvore t_V com V como raiz e formada apenas pelos vértices descendentes de V, com as mesmas arestas que tinham em t. Definimos também $t \setminus t_V$ como sendo a árvore t excluindo-se o ramo t_V.

A figura abaixo ilustra essa definição.

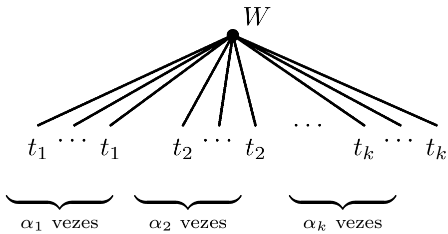


Definição 5.4.5. Definimos:

1. Dado um vértice W de t, seja $\mathrm{SG}(t, W)$ o grupo de permutações de ramos idênticos de t saindo de W sem permutar os "sub-ramos"desses ramos, isto é, trocando apenas a ordem dos vértices filhos de W, sem trocar a ordem de outros vértices descendentes.

   Se W tem n vértices filhos e n ramos idênticos pendurados, o grupo $\mathrm{SG}(t, W)$ é isomorfo a S_n.

   Numa situação mais geral, seja W com $n = \alpha_1 + \ldots \alpha_k$ vértices filhos, em que para cada $i = 1, \ldots, k$, temos α_i ramos idênticos (a um ramo t_i). Aqui consideramos todos os t_i's distintos. A figura abaixo ilustra o formato dos ramos pendurados a W considerados:

   Temos que o grupo $\mathrm{SG}(t, W)$ é isomorfo a $S_{\alpha_1} \times \ldots \times S_{\alpha_k}$.

2. $\mathrm{SG}(t)$ como o grupo de todas as permutações de ramos idênticos de t, saindo de um mesmo vértice (e todas as composições dessas permutações).

   Temos o produto direto de grupos

   $$\mathrm{SG}(t) = \prod_{W \in \mathrm{Vert}(t)} \mathrm{SG}(t, W) \ ;$$

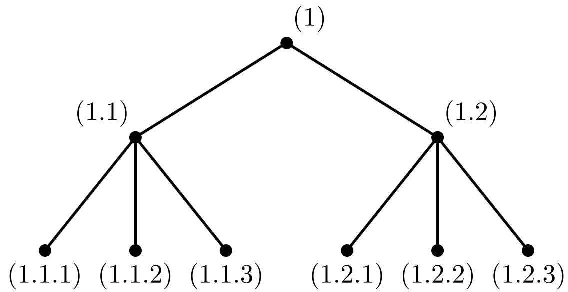
3. $\mathrm{Fix}(V, t)$ como o subgrupo de $\mathrm{SG}(t)$ que mantém fixo o vértice V;

4. $\mathrm{Fix}(c, t)$ como o subgrupo de $\mathrm{SG}(t)$ que mantém fixa a aresta c, isto é, mantém fixos os vértices c_i e c_f, origem e término da aresta c;

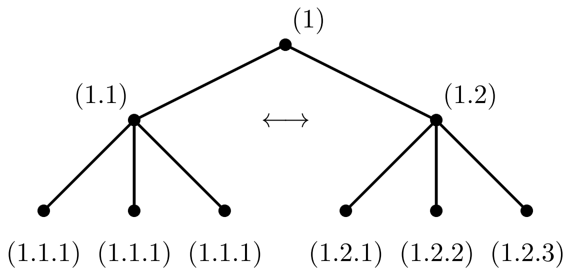
5. $\mathrm{Fix}(t_V, t)$ o subgrupo de $\mathrm{SG}(t)$ que mantém todos os vértices de t_V fixos, em que V é um vértice de t e t_V é a árvore formada por todos os vértices descendentes de V em t, com as mesmas arestas de t;

6. $s_t := |\mathrm{SG}(t)|$ o número de permutações possíveis entre ramos idênticos. Chamamos s_t de *fator de simetria* de t.

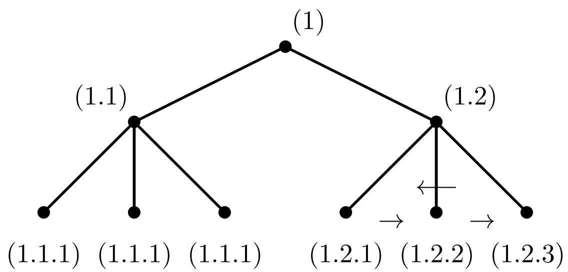
Exemplo 5.4.6. Seja

$t =$  .

Considere as permutações de ramos idênticos p_1, p_2 e p_3 dadas abaixo:

p_1 : 

(trocar $t_{(1.1)} \leftrightarrow t_{(1.2)}$)

p_2 : 

(trocar $t_{(1.2.1)} \rightarrow t_{(1.2.2)} \rightarrow t_{(1.2.3)} \rightarrow t_{(1.2.1)}$)

p_3 : (trocar $t_{(1.1.1)} \leftrightarrow t_{(1.2.2)}$)

Temos que

$$p_1, p_2 \in \mathrm{SG}(t) \quad \text{e} \quad p_3 \notin \mathrm{SG}(t) .$$

Para a permutação de ramos idênticos estar em $\mathrm{SG}(t)$, podemos permutar ramos que estejam ligados a um mesmo vértice (como no caso de p_1 e p_2), mas não podemos permutar ramos idênticos presos a vértices diferentes (como em p_3).

Além disso, sejam c a aresta que liga (1) a (1.2) e V o vértice (1.1). Temos que p_2 não muda c, V nem t_V de lugar, portanto

$$p_2 \in \mathrm{Fix}(c,t) \ , \quad p_2 \in \mathrm{Fix}(V,t) \quad \text{e} \quad p_2 \in \mathrm{Fix}(t_V,t) \ .$$

Por fim, o fator de simetria de t é

$$s_t = 2! \cdot 3! \cdot 3! = 72 \ .$$

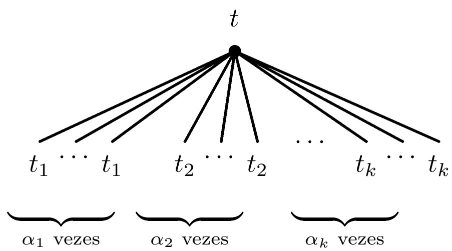
Proposição 5.4.7. *Podemos escrever o fator de simetria s_t por meio de uma fórmula recursiva. Para a árvore vazia e a árvore de um vértice, temos:*

$$s_1 = 1$$
$$s_\bullet = 1 \ .$$

Para $t = B^+(t_1^{\alpha_1} \cdots t_k^{\alpha_k})$, com árvores distintas $t_1, \ldots, t_k$, o fator de simetria é dado por:

$$s_t = s_{B^+(t_1^{\alpha_1} \cdots t_k^{\alpha_k})} = s_{t_1}^{\alpha_1} \alpha_1! \cdots s_{t_k}^{\alpha_k} \alpha_k! \ .$$

Demonstração. De fato, considere a seguinte figura:



Uma permutação de ramos idênticos de t corresponde exatamente a

uma permutação de ramos idênticos $\mathrm{SG}(t, \mathrm{raiz})$ (quantidade: $\alpha_1! \ldots \alpha_k!$)

combinada (de maneira independente) com

α_1 permutações de ramos idênticos de t_1 (quantidade: $s_{t_1}^{\alpha_1}$) ,

$\vdots$

α_k permutações de ramos idênticos de t_k (quantidade: $s_{t_k}^{\alpha_k}$) .

O número de permutações de ramos idênticos de t é, então,

$$s_t = \alpha_1! \dots \alpha_k! \cdot s_{t_1}^{\alpha_1} \cdot s_{t_k}^{\alpha_k} \ .$$

□

Proposição 5.4.8. *Seja t uma árvore e c uma aresta de t, partindo do vértice c_i ao vértice c_f.*

1. *O conjunto das permutações que fixam a aresta c pode ser escrito por:*

$$\mathrm{Fix}(c,t) = \mathrm{Fix}\big(B^+(t_{c_f}),t\big) \times \mathrm{SG}(t_{c_f}) \ .$$

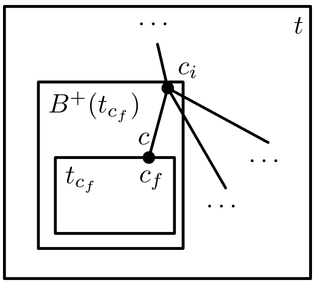
2. *Vale a seguinte igualdade de permutações:*

$$\mathrm{Fix}\big(c_i, t \setminus t_{c_f}\big) = \mathrm{Fix}\big(B^+(t_{c_f}),t\big) \ ,$$

em que $t \setminus t_{c_f}$ é a árvore obtida deletando-se o ramo t_{c_f} de t.

Demonstração.

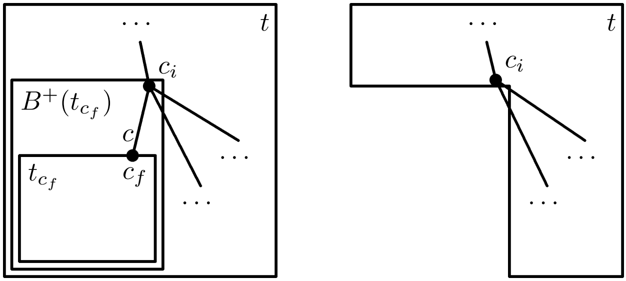
1. Veja a seguinte figura.



Como desejamos fixar apenas c_i e c_f, podemos fazer isso fixando os vértices de $B^+(t_{c_f})$ (e permutando os ramos iguais fora de $B^+(t_{c_f})$) , e, independentemente, permutando os ramos de t_{c_f} dentro de $B^+(t_{c_f})$. Com isso, temos

$$\mathrm{Fix}(c,r) = \mathrm{Fix}\big(B^+(t_{c_f}),r\big) \times \mathrm{SG}(t_{c_f}) \ .$$

2. Note que $t \setminus t_{c_f}$ é idêntico a t quando se colapsa o ramo $B^+(t_{c_f})$ de t num vértice $\bullet$ (nomeado por c_i).



Fixar $B^+(t_{c_f})$ em t, e permutar os outros ramos, é equivalente, então, a fixar o vértice c_i em $t \setminus t_{c_f}$ e permutar os outros ramos. $\square$

Com essa notação, veremos a relação entre os coeficientes $n(u, v; r)$ e $m(u, v; r)$.

Lema 5.4.9. *Sejam $u, v, r \in \mathrm{RT}$. Temos*

$$n(u, v; r)s_r = m(u, v; r)s_u s_v \ ,$$

em que, relembrando,

$n(u, v; r)$ é o coeficiente em r do produto $B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} v$, ou seja, é o número de maneiras de se pendurar u em v e obter r

$m(u, v; r)$ é o coeficiente em $u \otimes v$ de $\Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(r)$, ou seja, é o número de cortes (elementares) c de r tais que $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$

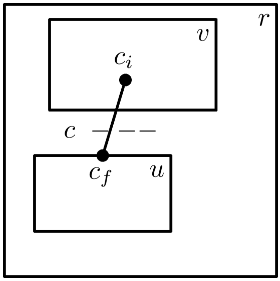
s_t é o fator de simetria de $t \in \mathrm{RT}$.

Demonstração. Mostramos, primeiramente, que ambos os coeficientes se anulam simultaneamente. Ou, de modo equivalente, ambos são não nulos simultaneamente.

Afirmação: $n(u, v; r) \neq 0$ sse $m(u, v; r) \neq 0$.

Prova da afirmação. De fato, se $n(u, v; r) \neq 0$, então é possível obter r pendurando u em algum vértice V de v. Tomando como corte elementar c exatamente a aresta que é formada ao pendurar u em V, obtemos $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$, de modo que $m(u, v; r) \neq 0$. Reciprocamente, se $m(u,v;r) \neq 0$, então é possível cortar com c uma aresta de forma que $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$. Denotando por V o vértice origem da aresta cortada, temos que V também é vértice de v; e se pendurarmos u em V, recobramos r. Portanto $n(u,v;r) \neq 0$. ⌟

Suponha agora que ambos $m(u,v;r), n(u,v;r)$ são não nulos. Fixe c um corte elementar tal que $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$. Denote por c_i e c_f os vértices inicial e final da aresta c. Temos que c_i é um vértice de r e também de v, e c_f é um vértice de r mas também corresponde à raiz de u. Ainda, temos $r_{c_f} = P^c(r) = u$.



Note que pelo item 1. proposição 5.4.8 anterior,

$$\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big) \times \mathrm{SG}(r_{c_f})$$

é o grupo de permutações que fixam a aresta c de r. Portanto, a quantidade de classes de permutações (de ramos idênticos) em r que mudam c de lugar para um mesmo lugar é:

$$\frac{|\mathrm{SG}(r)|}{|\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big) \times \mathrm{SG}(r_{c_f})|} = \frac{|\mathrm{SG}(r)|}{|\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big) \times \mathrm{SG}(u)|} .$$

Todas as permutações que trocam c de lugar produzem os mesmos elementos $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$. E temos que $m(u,v;r)$ é a quantidade de classes de permutações que mudam c para um mesmo lugar. Então

$$\begin{aligned} m(u,v;r) &= \left| \frac{\mathrm{SG}(r)}{\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big) \times \mathrm{SG}(u)} \right| \\ &= \frac{|\mathrm{SG}(r)|}{|\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big)| \cdot |\mathrm{SG}(u)|} \\ &= \frac{s_r}{|\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big)| \cdot s_u} . \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\mathrm{Fix}(c_i, v)$$

é o grupo das permutações que fixam o vértice c_i, e portanto a quantidade de classes de permutações (de ramos idênticos) em v que mudam o vértice c_i de lugar, para um mesmo lugar, é:

$$\frac{|\mathrm{SG}(v)|}{|\mathrm{Fix}(c_i, v)|} \ .$$

Temos que $n(u, v; r)$ é essa quantidade de classes, portanto:

$$\begin{aligned} n(u, v; r) &= \left| \frac{\mathrm{SG}(v)}{\mathrm{Fix}(c_i, v)} \right| \\ &= \frac{|\mathrm{SG}(v)|}{|\mathrm{Fix}(c_i, v)|} \\ &= \frac{s_v}{|\mathrm{Fix}(c_i, v)|} \ . \end{aligned}$$

Agora, note que há uma correspondência $\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big) = \mathrm{Fix}(c_i, v)$, pelo item 2. da proposição 5.4.8 (em que $v = r \setminus r_{c_f}$). Portanto:

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Fix}\big(B^+(r_{c_f}), r\big)| = |\mathrm{Fix}(c_i, v)| \\ \Longrightarrow \quad & \frac{s_r}{m(u, v; r) \cdot s_u} = \frac{s_v}{n(u, v; r)} \\ \Longrightarrow \quad & n(u, v; r) s_r = m(u, v; r) s_u s_v \ . \end{aligned}$$

□

Definimos abaixo um conjunto de funcionais em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Descobriremos que esses funcionais têm uma relação interessante com a álgebra $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$.

Definição 5.4.10. Seja $t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$. Defina os funcionais $Z_t, Z'_t \in \mathcal{H}^\circ_{\mathrm{CK}}$ pondo

$$\begin{aligned} Z_t(f) &= \delta_{t,f} \\ Z'_t(f) &= s_t \delta_{t,f} \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathrm{RF}$.

Denote o espaço vetorial gerado por esses funcionais por

$$\mathfrak{z} := \mathrm{span}\big\{Z_t \mid t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}\big\} = \mathrm{span}\big\{Z'_t \mid t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}\big\} \ .$$

Observação 5.4.11. Z_t e Z'_t são derivações. De fato, dados $f_1, f_2 \in \mathrm{RF} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, temos:

$$\begin{aligned} Z_t(f_1 \cdot f_2) &= \begin{cases} 1, & f_1 = 1, f_2 = t \text{ ou } f_1 = t, f_2 = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= Z_t(f_1)\varepsilon(f_2) + \varepsilon(f_1)Z_t(f_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z'_t(f_1 \cdot f_2) &= \begin{cases} s_t, & f_1 = 1, f_2 = t \text{ ou } f_1 = t, f_2 = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= Z'_t(f_1)\varepsilon(f_2) + \varepsilon(f_1)Z'_t(f_2) \ . \end{aligned}$$

O produto $f_1 \cdot f_2$ e a counidade $\varepsilon(f) = \delta_{f,1}$, aqui, são em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Dessa forma, $Z_t, Z'_t \in \mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$, como afirmado.

Isso também implica que $Z_t, Z'_t \in \mathcal{H}^\circ_{\mathrm{CK}}$, pois satisfazem a condição 1. do teorema 1.3.13.

Observação 5.4.12. Por Z_t e Z'_t serem derivações, temos $Z_t(1) = 0$ e $Z'_t(1) = 0$.

Veremos como esses funcionais se comportam com relação ao produto de convolução em $\mathcal{H}^\circ_{\mathrm{CK}}$.

Proposição 5.4.13. *Para árvores $u, v \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$, temos*

1. $Z_u * Z_v(t) = \sum_{r \in \mathrm{RT}} m(u, v; r) Z_r(t) \ , \quad \forall t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$;
2. $[Z_u, Z_v] = \sum_{r \in \mathrm{RT}} \big(m(u, v; r) - m(v, u; r)\big) Z_r \ ;$
3. $Z'_u * Z'_v(t) = \sum_{r \in \mathrm{RT}} n(u, v; r) Z'_r(t) \ , \quad \forall t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$;
4. $[Z'_u, Z'_v] = \sum_{r \in \mathrm{RT}} \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) Z'_r \ .$

De 2. ou 4. segue que $\mathfrak{z}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$*.*

Demonstração. Sabemos que o colchete de duas derivações é uma derivação. Portanto, em 2. e em 4., precisamos apenas mostrar a igualdade para árvores. Mas estas seguem de 1. e 3., respectivamente, lembrando que o colchete em $\mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$ é dado pelo comutador

$$[g, h] = g * h - h * g, \quad \forall g, h \in \mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}) \ .$$

Portanto basta mostrar 1. e 3..

1. Temos $Z_u * Z_v = \mu_{\mathbb{K}} \circ (Z_u \otimes Z_v) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}$. Seja $t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$. Escrevemos

$$\Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_{>1}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t)\ .$$

Aplicando $Z_u \otimes Z_v$, sobra apenas a soma sobre cortes elementares $c \in \mathrm{Adm}_1(t)$, já que Z_u e Z_v se anulam em 1 e em florestas com mais de uma componente[2]. Portanto

$$Z_u * Z_v(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} Z_u\big(P^c(t)\big) \cdot Z_v\big(P^c(t)\big)\ .$$

Além disso, os termos $Z_u\big(P^c(t)\big) \cdot Z_v\big(P^c(t)\big)$ se anulam, a não ser que $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$, quando valem 1. Assim, a soma fica igual ao número $m(u, v; t)$ de cortes elementares que fornecem $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$. Decorre que:

$$\begin{aligned} Z_u * Z_v(t) &= m(u, v; t) \\ &= \sum_{r \in \mathrm{RT}} m(u, v; r) \delta_{r,t} \\ &= \sum_{r \in \mathrm{RT}} m(u, v; r) Z_r(t)\ . \end{aligned}$$

3. De forma análoga ao item acima, consideramos o produto $Z'_u * Z'_v = \mu_{\mathbb{K}} \circ (Z'_u \otimes Z'_v) \circ \Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}$, tomamos $t \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$ e escrevemos

$$\Delta_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_{>1}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t)$$

Aplicamos $Z'_u \otimes Z'_v$, e como antes, sobra apenas a soma sobre cortes elementares $c \in \mathrm{Adm}_1(t)$ porque Z'_u e Z'_v se anulam em 1 e em florestas com mais de uma componente[2]. Obtemos

$$Z'_u * Z'_v(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} Z'_u\big(P^c(t)\big) \cdot Z'_v\big(P^c(t)\big)\ .$$

Aqui temos uma pequena modificação: os termos $Z'_u\big(P^c(t)\big) \cdot Z'_v\big(P^c(t)\big)$ se anulam a não ser que $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$, quando valem $s_u s_v$.

[2]Note que $R^c(t)$ é uma árvore se, e somente se, o corte c é elementar ($c \in \mathrm{Adm}_1(t)$).

Nesse caso, a soma vale $m(u,v;t)\cdot s_u s_v$. Portanto

$$\begin{aligned} Z'_u * Z'_v(t) &= m(u,v;t)\cdot s_u s_v \\ &= \sum_{r\in \mathrm{RT}} m(u,v;r) s_u s_v \delta_{r,t} \\ &\overset{5.4.9}{=} \sum_{r\in \mathrm{RT}} n(u,v;r) s_r \delta_{r,t} \\ &= \sum_{r\in \mathrm{RT}} n(u,v;r) Z'_r(t)\ , \end{aligned}$$

onde usamos o lema 5.4.9. □

Vamos ao teorema que identifica $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ com a álgebra de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$.

Teorema 5.4.14 (Panaite, versão para árvores não-ordenadas)**.** *A álgebra de Hopf de Grossman-Larson é isomorfa ao recobrimento da álgebra de Lie* $\mathfrak{z}$. *Em outras palavras,*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{z})$$

como álgebras de Hopf. Lembramos que o corpo $\mathbb{K}$ *considerado tem característica nula.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma biálgebra conexa e cocomutativa sobre um corpo de característica nula. Podemos, então, usar o teorema de Milnor-Moore, e escrever que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}\big(\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})\big)$ como álgebras de Hopf. Se mostrarmos que $\mathfrak{z} \cong \mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$, obtemos via proposição 3.2.6 que $\mathcal{U}(\mathfrak{z}) \cong \mathcal{U}\big(\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})\big)$, e portanto, que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{z})$, como queremos demonstrar.

Basta mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação: $\mathfrak{z}$ e $\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$ são álgebras de Lie isomorfas via

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathfrak{z} &\to \mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}) \\ Z'_t &\to B^+(t)\ . \end{aligned}$$

Prova da afirmação. Começaremos mostrando que ψ é bijeção.
(Sobrejetividade:) Os elementos de $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ da forma $B^+(t) = \psi(Z'_t)$ são primitivos e geram o espaço vetorial $\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$. Portanto ψ é sobrejetiva.

(Injetividade:) Temos $\ker(\psi) = 0$ pois

$$\begin{aligned}\sum_i a_i Z'_{t_i} \in \ker(\psi) &\implies \psi\left(\sum_i a_i Z'_{t_i}\right) = 0 \implies \sum_i a_i B^+(t_i) = 0 \\ &\implies a_i = 0, \forall i \implies \sum_i a_i Z'_{t_i} = 0 \ .\end{aligned}$$

Veremos agora que ψ é morfismo de álgebras de Lie. É suficiente mostrar que $[\psi(Z'_u), \psi(Z'_v)] = \psi\big([Z'_u, Z'_v]\big)$ para geradores $Z'_u, Z'_v \in \mathfrak{z}$. Temos

$$[\psi(Z'_u), \psi(Z'_v)] = [B^+(u), B^+(v)] = B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v) - B^+(v) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(u) \ .$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned}B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v) &= \sum_{t \in \mathrm{RT}} n(u, B^+(v); t) t \\ &= B^+(uv) + \sum_{r \in \mathrm{RT}} n(u, v; r) B^+(r) \ .\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue da definição dos coeficientes $n(u, B^+(v); t)$ (são os coeficientes de t do produto $B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v)$). A segunda vem por identificação dos termos da soma em t. O termo $t = B^+(uv)$ corresponde a pendurar u na raiz de $B^+(v)$, e só há uma maneira de obtê-lo. A soma em r corresponde aos outros termos, em que u é pendurado em outros vértices de $B^+(v)$ que não sejam a raiz; isso é o mesmo que pendurar em v, obtendo r, e depois aplicar B^+, obtendo $t = B^+(r)$.

O mesmo argumento vale para mostrar que:

$$\begin{aligned}B^+(v) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(u) &= \sum_{t \in \mathrm{RT}} n(v, B^+(u); t) t \\ &= B^+(vu) + \sum_{r \in \mathrm{RT}} n(v, u; r) B^+(r) \ .\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}[\psi(Z'_u), \psi(Z'_v)] &= B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v) - B^+(v) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(u) \\ &= \sum_{r \in \mathrm{RT}} \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) B^+(r) \\ &= \sum_{r \in \mathrm{RT}} \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) \psi(Z'_r) \\ &= \psi\left(\sum_{r \in \mathrm{RT}} \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) Z'_r\right) \\ &= \psi\big([Z'_u, Z'_v]\big) \ ,\end{aligned}$$

e terminamos a afirmação. ⌟

Feita a afirmação, terminamos a prova do teorema. □

5.4.2 Versão para árvores ordenadas

A relação entre os coeficientes $n(u, v; r)$ e $m(u, v; r)$, no caso das árvores ordenadas, é a igualdade.

Lema 5.4.15. *Dados* $u, v, r \in \mathrm{PRT}$*, temos*

$$n(u, v; r) = m(u, v; r) \ .$$

Assim, para árvores ordenadas, o número $n(u, v; r)$ *de maneiras de se pendurar* u *em* v *e ganhar* r *é o mesmo número* $m(u, v; r)$ *de cortes elementares* c *que resultam em* $P^c(r) = u$ *e* $R^c(r) = v$*.*

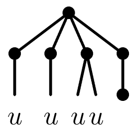
Demonstração. Da mesma forma que no caso das árvores ordenadas (lema 5.4.9), temos

$$n(u, v; r) \neq 0 \quad \text{sse} \quad m(u, v; r) \neq 0 \ .$$

Para o caso em que ambos $n(u, v; r), m(u, v; r) \neq 0$, faremos uma correspondência 1-1 entre as maneiras de se obter r pendurando u em v e os cortes $c \in \mathrm{Adm}_1(r)$ que fornecem $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$.

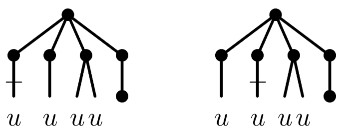
Dados $r, u, v \in \mathrm{PRT}$, o vértice V de v tal que u pendurado em V resulta em r é único. De fato, tomando r e considerando todos os seus ramos com mesmo formato u, para obter v devemos deletar de r um desses ramos u. Ramos do tipo u pendurados em vértices diferentes, ao serem deletados, produzem árvores diferentes[3], e só uma delas pode ser v. Para ramos u pendurados no mesmo vértice de r, há mais de uma maneira de deletar um ramo u para ficar com v.

Por exemplo, considerando

$r =$ 

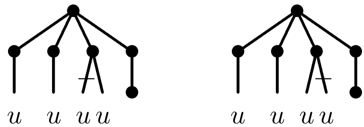
$u \neq \bullet$,

obtemos árvores diferentes se deletarmos u destas duas maneiras diferentes



[3] Lembrando que as árvores aqui são ordenadas.

e obtemos árvores iguais se deletarmos u destas duas maneiras diferentes

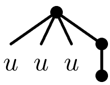


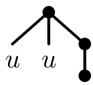
.

Enumeramos dois casos:

Caso 1: Se temos ramos u repetidos em V, então o número de cortes $m(u, v; r)$ será igual ao número de subárvores com formato u repetidas em r. Mas o número $n(u, v; r)$ de maneiras de se pendurar u em v para se obter r também será igual a esse número $m(u, v; r)$, pois temos exatamente $m(u, v; r)$ maneiras de intercalar o u entre os ramos de v com mesmo formato.

Por exemplo, se temos V igual à raiz de v e

$r =$ 

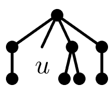
$v =$ 

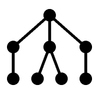
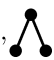
$u \neq$ 

então temos 3 maneiras de pendurar u em v para obter r e temos 3 maneiras de cortar r em $u = P^c(r)$ e $v = R^c(r)$.

Caso 2: Se há apenas um ramo igual a u pendurado em V, então só há uma maneira de se obter r pendurando u em v: é identificando a única posição da subárvore de r que é igual a u e identificando essa posição em v para se inserir u e obter r. E a única forma de cortar r em $u = P^c(r)$ e $v = R^c(r)$ é identificar que subárvore pendurada à raiz de r é igual a u, e fazer o corte logo acima da mesma.

Por exemplo, se V é igual à raiz de v e

$r =$ 

$v =$ 
$u \neq$  , 

então a única maneira de se obter r pendurando u em v é pendurando u entre o primeiro e o segundo vértice-filho de V em v.

Assim, o número $n(u, v; r)$ de maneiras de se pendurar u em v para obter r é o mesmo que o número $m(u, v; r)$ de cortes em r tais que $P^c(r) = u$ e $R^c(r) = v$. $\square$

Como no caso de árvores não-ordenadas da seção anterior, definimos um conjunto de funcionais em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, e encontraremos uma relação entre os mesmos e a álgebra de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ sobre árvores ordenadas.

Definição 5.4.16. Seja $t \in \mathrm{PRT}$ árvore ordenada não vazia. Definimos $Z_t \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\mathrm{gr}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^*$ funcionais lineares por

$$Z_t(f) = \delta_{t,f}$$

para toda floresta $f \in \mathrm{PRF}$.

Denote o espaço vetorial gerado por esses funcionais por

$$\mathfrak{z} := \mathrm{span}\{Z_t \mid t \in \mathrm{PRT} \text{ não vazia}\} \ .$$

Observação 5.4.17. Z_t é uma derivação. A prova é idêntica à do caso das árvores não-ordenadas. Dadas duas florestas $f_1, f_2 \in \mathrm{PRT} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, temos:

$$\begin{aligned} Z_t(f_1 \cdot f_2) &= \begin{cases} 1, & f_1 = 1, f_2 = t \text{ ou } f_1 = t, f_2 = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= Z_t(f_1)\varepsilon(f_2) + \varepsilon(f_1)Z_t(f_2) \ . \end{aligned}$$

Portanto $Z_t(f_1 \cdot f_2) = Z_t(f_1)\varepsilon(f_2) + \varepsilon(f_1)Z_t(f_2)$ e $\mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$.

Mostraremos que $\mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$. Para tanto, vamos calcular o comutador de dois elementos de $\mathfrak{z}$.

Proposição 5.4.18. *Para árvores ordenadas $u, v \in \mathrm{PRT}$, temos que:*

1. $Z_u * Z_v(t) = \sum_{r\in\mathrm{PRT}} m(u,v;r)Z_r(t) = \sum_{r\in\mathrm{PRT}} n(u,v;r)Z_r(t)$, $\forall t \in \mathrm{PRT} \setminus \{1\}$;

2. $$\begin{aligned} [Z_u, Z_v] &= \sum_{r\in\mathrm{PRT}} \big(m(u,v;r) - m(v,u;r)\big)Z_r \\ &= \sum_{r\in\mathrm{PRT}} \big(n(u,v;r) - n(v,u;r)\big)Z_r \ . \end{aligned}$$

Em consequência disso, $\mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{Der}_\varepsilon(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$.

Demonstração. O item 2. segue de 1., sabendo-se que os dois lados da igualdade são derivações. A prova de 1. segue a mesma sequência da prova da proposição 5.4.13.

1. Temos $Z_u * Z_v = \mu_{\mathbb{K}} \circ (Z_u \otimes Z_v) \circ \Delta$. Seja $t \in \mathrm{PRT} \setminus \{1\}$. O coproduto de t fica

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + \sum_{c \in \mathrm{Adm}_{>1}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t)\ .$$

Ao aplicar $Z_u \otimes Z_v$, resta apenas a soma em $c \in \mathrm{Adm}_1(t)$ já que Z_u e Z_v se anulam em 1 e em florestas com mais de uma componente. Ficamos com

$$Z_u * Z_v(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}_1(t)} Z_u\big(P^c(t)\big) Z_v\big(R^c(t)\big)\ .$$

Além disso, os termos $Z_u\big(P^c(t)\big) Z_v\big(R^c(t)\big)$ se anulam a não ser que $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$, e nesse caso, valem 1. Então a soma fica igual ao número $m(u, v; t) \in \mathbb{K}$ de cortes com uma aresta tais que $P^c(t) = u$ e $R^c(t) = v$. Assim,

$$\begin{aligned} Z_u * Z_v(t) &= m(u, v; t) \\ &= \sum_{r \in \mathrm{PRT}} m(u, v; r) \delta_{t,r} \\ &= \sum_{r \in \mathrm{PRT}} m(u, v; r) Z_r(t)\ , \end{aligned}$$

e terminamos a demonstração. □

Vamos ao teorema que relaciona as álgebras de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ no caso não-comutativo.

Teorema 5.4.19 (Panaite, versão para árvores ordenadas)**.** *A álgebra de Hopf de Grossman-Larson é isomorfa à álgebra envolvente universal de $\mathfrak{z}$. Isto é,*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{z})$$

como álgebras de Hopf.

Assumimos que o corpo $\mathbb{K}$ tenha característica nula.

Demonstração. $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ é uma biálgebra conexa e cocomutativa. Pelo teorema de Milnor-Moore (teorema 4.4.12), $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}))$ como álgebras de Hopf. Para mostrar o isomorfismo do teorema, mostraremos uma bijeção entre as álgebras de Lie $\mathfrak{z}$ e $\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$. A extensão canônica à algebra envolvente universal, então, será um isomorfismo entre as álgebras de Hopf

$\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{U}(\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}))$, conforme a proposição 3.2.6.

Afirmação: Defina $\psi\colon \mathfrak{z} \to \mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$ transformação linear por

$$\psi(Z_t) := B^+(t) \ .$$

Afirmamos que ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Prova da afirmação. Primeiramente mostraremos que ψ é bijeção.
(Sobrejetividade:) Conforme a observação 5.3.22, os elementos da forma $\psi\big(Z_t\big) = B^+(t)$ são primitivos e geram o espaço vetorial $\mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}})$. Obtemos, então, que ψ é sobrejetiva.
(Injetividade:) Temos $\ker(\psi) = 0$ pois valem as implicações

$$\begin{aligned}\sum_i a_i Z_{t_i} \in \ker(\psi) &\implies \psi\left(\sum_i a_i Z_{t_i}\right) = 0\\ &\implies \sum_i a_i B^+(t_i) = 0\\ &\implies a_i = 0, \forall i \implies \sum_i a_i Z_{t_i} = 0 \ .\end{aligned}$$

Além disso, ψ é um morfismo de álgebras de Lie. É suficiente mostrar que para $u, v \in \mathrm{PRT}$, vale

$$[\psi(Z_u), \psi(Z_v)] = \psi([Z_u, Z_v]) \ .$$

Começaremos calculando

$$\begin{aligned}[\psi(Z_u), \psi(Z_v)] &= [B^+(u), B^+(v)]\\ &= B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v) - B^+(v) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(u) \ .\end{aligned}$$

Mas podemos reescrever os produtos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}B^+(u) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(v) &= \sum_{r \in \mathrm{PRT}} n(u, B^+(v); r) r\\ &= B^+(uv) + B^+(vu) + \sum_{r \in \mathrm{PRT}} n(u, v; r) B^+(r) \ .\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos correspondem a pendurar u na raiz de $B^+(v)$; podemos fazer isso de duas maneiras: pendurando u antes de v e pendurando

u depois de v [4]. A soma no terceiro termo corresponde às outras formas de pendurar u em $B^+(v)$ (nos vértices que não são a raiz de $B^+(v)$). Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned} B^+(v) \cdot_{\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}} B^+(u) &= \sum_{r \in \mathrm{PRT}} n(v, B^+(u); r) r \\ &= B^+(vu) + B^+(uv) + \sum_{r \in \mathrm{PRT}} n(v, u; r) B^+(r) \ . \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} [\psi(Z_u), \psi(Z_v)] &= [B^+(u), B^+(v)] \\ &= B^+(u) \cdot B^+(v) - B^+(v) \cdot B^+(u) \\ &= \sum_r \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) B^+(r) \\ &= \psi\left(\sum_r \big(n(u, v; r) - n(v, u; r)\big) Z_r\right) \\ &= \psi\big([Z_u, Z_v]\big) \ . \end{aligned}$$

⌟

Portanto ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie, e sua extensão canônica $\Psi\colon \mathcal{U}(\mathfrak{z}) \to \mathcal{U}(P(\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}))$ é um isomorfismo de álgebras de Hopf pela proposição 3.2.6. □

5.5 Dualidade entre $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$

No que segue, veremos que as álgebras de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ encontram-se em dualidade de maneira natural. Isso acontece nos dois contextos considerados. Do teorema de Panaite, temos que $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{z})$. Concluiremos, posteriormente, que as álgebras de Connes-Kreimer $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e de Grossman-Larson $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ estão em dualidade. Por fim, verificaremos se a dualidade obtida é separante. No caso das árvores não-ordenadas isso é verdade. Entretanto, no caso das árvores ordenadas, foi possível exibir um contraexemplo para uma das propriedades da dualidade separante.

[4] Para a multiplicação em $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$, no caso não-comutativo, a ordem em que penduramos num mesmo vértice importa, e produz termos distintos. Isto é, preservando a ordem das duas árvores do produto, deve-se intercalar a maneira de pendurar as subárvores da primeira entrada com os ramos que já estavam na árvore. Consulte a definição 5.3.1 e o exemplos que seguem, para ver com mais detalhes como funciona essa alternância na hora de pendurar as árvores para fazer o produto.

5.5.1 Versão não-ordenada

Começamos considerando a inclusão canônica $i\colon \mathfrak{z} \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}$, que é um morfismo de álgebras de Lie. Note que $i(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_{\varepsilon}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$, e como as derivações são elementos primitivos no dual, temos $i(\mathfrak{z}) \subseteq \mathrm{Der}_{\varepsilon}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}) \subseteq \mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ})$. Podemos, então, usar o lema 3.2.5, item 2., para estender i a $\bar{i}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{z}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}$ morfismo de álgebras de Hopf. Então, pela proposição 2.9.6, temos $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ em dualidade via

$$\langle u, f\rangle = \bar{i}(u)(f), \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z}), \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \ .$$

Essa dualidade é separante. Para mostrar essa afirmação, escreveremos alguns lemas.

Lema 5.5.1. *Sejam $n \geq 2$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{RT}$ e $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{RT}$ árvores não vazias. Temos*

1. $$Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n) = \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} Z_{t_1}(u_{\sigma(1)}) \ldots Z_{t_n}(u_{\sigma(n)}) \ .$$

Além disso, para $g \in \mathrm{RF}$ floresta com pelo menos uma árvore componente, temos

2. $$Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n g) = 0 \ ,$$

isto é, $Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}$ aplicado a florestas com mais de n componentes é nulo.

Demonstração.
(1.): Primeiramente, temos a igualdade[5]

$$Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n} = (Z_{t_1} \otimes \ldots \otimes Z_{t_n}) \circ \Delta_{n-1} \ ,$$

em que é a expansão do coproduto em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ feita $n-1$ vezes (em qualquer uma das entradas tensoriais).

Precisamos calcular

$$\Delta_{n-1}(u_1 \ldots u_n) = \Delta_{n-1}(u_1) \ldots \Delta_{n-1}(u_n) \ .$$

[5] A menos do isomorfismo $\mathbb{K} \otimes \ldots \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$ dado pelo produto em $\mathbb{K}$.

Seja $i = 1, \ldots, n$. Temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(u_i) &= u_i \otimes 1 + 1 \otimes u_i + \sum_{c_i \in \mathrm{Adm}(u_i)} P^{c_i}(u_i) \otimes R^{c_i}(u_i) \\
\Delta_2(u_i) &= u_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes u_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes u_i + \\
&\quad + \sum_{c_i \in \mathrm{Adm}(u_i)} \Delta_1\big(P^{c_i}(u_i)\big) \otimes R^{c_i}(u_i) + \sum_{c_i \in \mathrm{Adm}(u_i)} P^{c_i}(u_i) \otimes R^{c_i}(u_i) \otimes 1 \\
&\;\vdots \\
\Delta_{n-1}(u_i) &= u_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes u_i + F_{1,i} \ ,
\end{aligned}$$

em que $F_{1,i}$ é uma soma de tensores com pelo menos duas árvores distribuídas nas n entradas tensoriais; pode ser que as duas estejam na mesma entrada ou não.

Fazemos o produto sobre todos os i's, obtendo

$$\prod_{i=1}^{n} \Delta_{n-1}(u_i) = \prod_{i=1}^{n} \Big(u_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes u_i \Big) + F_1 \ .$$

O termo restante F_1 é o resultado do produto de parcelas dos $\Delta_{n-1}(u_i)$'s em que pelo menos uma delas é uma parcela de $F_{1,i}$. Essa parcela, de $F_{1,i}$, é um tensor com pelo menos duas árvores, e os outros termos que vêm multiplicando têm pelo menos uma árvore cada. Então os termos de F_1 têm $n+1$ árvores distribuídas nas n entradas tensoriais. Assim, para cada termo da soma F_1, pelo menos uma das entradas tem mais de uma árvore[6].

Ainda, reescrevemos o produto da seguinte forma:

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(u_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes u_i \Big) = \sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \ldots u_{\sigma(n)} + F_2 \ ,$$

em que F_2 é uma soma de tensores em que pelo menos uma das entradas tem mais de uma árvore.

Por fim, aplicamos $Z_{t_1} \otimes \ldots \otimes Z_{t_n}$ e fazendo o produto. Os termos das somas F_1 e F_2 se anulam porque cada tensor dessas somas tem uma entrada, digamos j, com mais de uma árvore, e Z_{t_j} anula essa entrada. Assim, sobra apenas a soma em $\sigma \in S_n$, e temos:

$$\begin{aligned}
Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n) &= \big(Z_{t_1} \otimes \ldots \otimes Z_{t_n}\big)\big(\Delta_{n-1}(u_1 \ldots u_n)\big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} Z_{t_1}\big(u_{\sigma(1)}\big) \ldots Z_{t_n}\big(u_{\sigma(n)}\big) \ .
\end{aligned}$$

[6]Usamos o conhecido "princípio da casa dos pombos".

Com isso, provamos o item 1.

(2.): Precisamos calcular $\Delta_{n-1}(u_1 \ldots u_n g)$. Podemos reaproveitar algumas contas da prova do item 1.:

$$\begin{aligned}\Delta_{n-1}((u_1 \ldots u_n g) &= \left(\prod_{i=1}^{n} \Delta_{n-1}(u_i)\right) \cdot \Delta_{n-1}(g) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes \ldots u_{\sigma(n)} + F_2 + F_1\right) \cdot \Delta_{n-1}(g) \ .\end{aligned}$$

O resultado desse produto será uma soma de tensores em que pelo menos uma componente tensorial contém mais de uma árvore. E as entradas com mais de uma árvore são anuladas pelos Z_{t_i}'s. Portanto $Z_{t_1} \otimes \ldots \otimes Z_{t_n}$ anula $\Delta_{n-1}(u_1 \ldots u_n g)$ e temos

$$Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n g) = \big(Z_{t_1} \otimes \ldots \otimes Z_{t_n}\big)\big(\Delta_{n-1}(u_1 \ldots u_n g)\big) = 0 \ .$$

$\square$

Vemos, agora, que a dualidade é separante.

Proposição 5.5.2. *A dualidade entre $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ dada por*

$$\langle u, f\rangle = \bar{i}(u)(f), \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z}), \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$$

é separante. Isto é, valem as seguintes propriedades:

(a) $\big(\ \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}\ ,\quad \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies u = 0\ ;$

(b) $\big(\ \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})\ ,\quad \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies f = 0\ .$

Demonstração. Provamos as duas propriedades da dualidade separante abaixo.

(a) $\big(\ \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}\ ,\quad \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies u = 0$:
Seja $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$ tal que $\langle u, f\rangle = 0$ para todo $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. Temos, então:

$$\begin{aligned}\langle u, f\rangle = 0\ ,\quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} &\implies \bar{i}(u)(f) = 0\ ,\quad \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \\ &\implies \bar{i}(u) = 0\end{aligned}$$

Para mostrar que $u = 0$, basta mostrar que $\bar{i}$ é injetiva. Mostraremos isso a seguir. Considere a aplicação de simetrização $\rho\colon \mathrm{S}(\mathfrak{z}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{z})$, que sabemos ser um isomorfismo de coálgebras (pelo lema 4.4.11 do capítulo anterior). Considere o seguinte morfismo de coálgebras:

$$\bar{i} \circ \rho \colon \mathrm{S}(\mathfrak{z}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ} \; .$$

Mostramos que esse morfismo é injetivo em $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{z}$. De fato, note que dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $z \in \mathfrak{z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
(\bar{i} \circ \rho)(\lambda) &= \lambda \cdot (\bar{i} \circ \rho)(1_{\mathbb{K}}) = \lambda \; 1_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}} = \lambda \; \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}} \\
(\bar{i} \circ \rho)(z) &= \bar{i}\left(\tfrac{1}{1!} z\right) = i(z) = z \; .
\end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda + z \in \mathbb{K} \oplus \mathfrak{z}$ pertence ao kernel da restrição de $\bar{i} \circ \rho$, então

$$\begin{aligned}
(\bar{i} \circ \rho)(\lambda + z) = 0 &\implies \lambda \; \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}} + z = 0 \text{ em } \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ} \\
&\implies \lambda \; \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(1) + z(1) = 0 \\
&\implies \lambda = 0 \; .
\end{aligned}$$

Na penúltima passagem, aplicamos em $1 \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$. E na última, temos que $\varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(1) = \delta_{1,1} = 1$ e que, como $z \in \mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_{\varepsilon}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}})$ é derivação, vale $z(1) = 0$. Como $\lambda = 0$, então temos

$$\lambda \; \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}} + z = 0 \implies z = 0 \text{ em } \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ} \supseteq \mathfrak{z} \; .$$

Portanto $\lambda + z = 0$ em $\mathrm{S}(\mathfrak{z})$, e $\bar{i} \circ \rho$ é um morfismo de coálgebras injetivo em $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{z}$. Pelo lema 4.4.10, obtemos que $\bar{i} \circ \rho$ é injetivo em todo o seu domínio. Por fim, como ρ é uma bijeção, temos que $\bar{i}$ é injetiva.

(b) $\big(\, \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z}) \; , \quad \langle u, f \rangle = 0 \, \big) \implies f = 0$:
Seja $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$, e escreva f na base RF como $f = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g g$. Suponha que para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$ tenhamos

$$(*) \qquad \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \; \bar{i}(u)(g) = \bar{i}(u)(f) = \langle u, f \rangle = 0 \; .$$

Mostraremos por indução no número de árvores das florestas g componentes de f que os coeficientes a_g são todos nulos.

(Caso $n = 0$): O coeficiente a_g é nulo para $g = 1$. De fato, tome $u = 1_{\mathbb{K}}$ em $(*)$. Com isso temos $\bar{i}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}} = \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}$ e portanto

$$0 = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \; \bar{i}(u)(g) = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \; \varepsilon_{\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}}(g) = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \; \delta_{1,g} = a_1 \; .$$

(Caso $n=1$): Tomamos t árvore qualquer e $u = Z_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$ em $(*)$. Temos $\bar{i}(Z_t) = i(Z_t) = Z_t$, portanto

$$0 = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \ \bar{i}(u)(g) = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \ Z_t(g) = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \ \delta_{t,g} = a_t \ .$$

Vamos ao passo de indução. Seja $n \geq 2$. Supomos que os coeficientes a_g se anulam para todas as florestas g com menos de n componentes (HI). Mostraremos, então, que $a_g = 0$ para florestas g com n árvores componentes. Considere $u = Z_{t_1} \ldots Z_{t_n}$, para dadas $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{RT} \setminus \{1\}$ quaisquer. Temos:

$$\begin{aligned}
\bar{i}(u) &= \bar{i}\big(Z_{t_1} \ldots Z_{t_n}\big) \\
&= \bar{i}\big(Z_{t_1}\big) * \ldots * \bar{i}\big(Z_{t_n}\big) \\
&= i\big(Z_{t_1}\big) * \ldots * i\big(Z_{t_n}\big) \\
&= Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n} \ .
\end{aligned}$$

Aplicamos esse u na equação $(*)$. Já temos, pela (HI), que a soma é apenas sobre as florestas no mínimo n componentes. Pelo lema 5.5.1, item 2., a soma sobre as florestas com mais de n componentes é nula, já que estamos aplicando $Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}$. A soma é, então, apenas sobre as florestas com exatamente n componentes. Podemos escrever $\sum_{g \in \mathrm{RF}} = \sum_{\substack{u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{RT} \setminus \{1\} \\ u_1 \leq \ldots \leq u_n}}$, em que fixamos uma ordem (arbitrária) para $\mathrm{RT} \setminus \{1\}$ apenas para não repetir termos na soma, já que termos da forma $u_1 u_2 \ldots u_n$ e $u_2 u_1 \ldots u_n$ são iguais, por exemplo.

A soma em $(*)$ fica:

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \sum_{\substack{u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{RT} \setminus \{1\} \\ u_1 \leq \ldots \leq u_n}} a_{u_1 \ldots u_n} \ \big(Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}\big)(u_1 \ldots u_n) \\
&\overset{5.5.1,\ 1.}{=} \sum_{\substack{u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{RT} \setminus \{1\} \\ u_1 \leq \ldots \leq u_n}} a_{u_1 \ldots u_n} \sum_{\sigma \in S_n} Z_{t_1}\big(u_{\sigma(1)}\big) \ldots Z_{t_n}\big(u_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{\substack{u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{RT} \setminus \{1\} \\ u_1 \leq \ldots \leq u_n}} a_{u_1 \ldots u_n} \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{t_1, u_{\sigma(1)}} \ldots \delta_{t_n, u_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}} \\
&= n! \ a_{t_1 \ldots t_n} \ .
\end{aligned}$$

Como o corpo $\mathbb{K}$ tem característica nula, temos $a_{t_1 \ldots t_n} = 0$. Concluímos a indução. Dessa forma, temos $a_g = 0$ para todo $g \in \mathrm{RF}$, e

$$f = \sum_{g \in \mathrm{RF}} a_g \, g = 0 \ ,$$

como queríamos mostrar. □

As álgebras de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ estão em dualidade separante. Usamos a versão para árvores não-ordenadas do teorema de Panaite (teorema 5.4.14) para obter que $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ é isomorfo a $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ como álgebras de Hopf. Obtemos, assim, que as álgebras $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}$ estão em dualidade separante.

5.5.2 Versão ordenada

Obtemos uma dualidade entre $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ da mesma forma que para o caso não-ordenado. Consideramos a inclusão $i \colon \mathfrak{z} \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}$, que é um morfismo de álgebras de Lie. Checamos que $i(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} \subseteq \mathrm{Der}_{\varepsilon}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}) \subseteq \mathrm{P}(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ})$. Podemos, assim, usar o lema 3.2.5, item 2., para estender i ao morfismo de álgebras de Hopf $\bar{i} \colon \mathcal{U}(\mathfrak{z}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\circ}$. Pela proposição 2.9.6, $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ estão em dualidade via o par dual

$$\langle u, f \rangle = \bar{i}(u)(f), \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z}), \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \ .$$

Investigamos, então, se essa dualidade é separante. Apesar da semelhança com o caso não-ordenado, a resposta é não! Veremos que apenas uma das condições para ser separante é satisfeita.

Precisaremos de uma versão ordenada do lema 5.5.1.

Lema 5.5.3. *Sejam* $n \geq 2$ *e* $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{PRT}$ *e* $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{PRT}$ *árvores ordenadas não vazias. Temos*

1. $\quad Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} Z_{t_1}(u_{\sigma(1)}) \ldots Z_{t_n}(u_{\sigma(n)}) \ .$

Além disso, para $g \in \mathrm{PRF}$ *floresta ordenada com pelo menos uma árvore componente, temos*

2. $\quad Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}(u_1 \ldots u_n g) = 0 \ ,$

isto é, $Z_{t_1} * \ldots * Z_{t_n}$ *aplicado a florestas com mais de* n *componentes é nulo.*

Demonstração. É idêntica à do caso ordenado, no lema 5.5.1, trocando RT por PRT. Note que não utilizamos comutatividade das árvores na floresta para mostrar esse lema. □

O resultado principal é a seguinte proposição.

Proposição 5.5.4. *A dualidade entre* $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ *e* $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ *dada por*

$$\langle u, f\rangle = \bar{i}(u)(f), \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z}), \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$$

satisfaz a seguinte propriedade:

(a) $\big(\ \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}\ ,\ \ \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies u = 0\ .$

Há um contraexemplo para a propriedade

($\not b$) $\big(\ \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})\ ,\ \ \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies f = 0\ ,$

portanto essa dualidade não é separante.

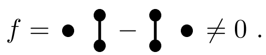
Demonstração.
(a) $\big(\ \forall f \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}\ ,\ \ \langle u, f\rangle = 0\ \big) \implies u = 0$:
A demonstração é igual à da proposição 5.5.2, item (a), trocando $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ e $\mathfrak{z}$ não-ordenados por suas versões ordenadas.

($\not b$) $\big(\ \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})\ ,\ \ \langle u, f\rangle = 0\ \big) \not\Longrightarrow f = 0$:
Não podemos repetir a prova da proposição 5.5.2, item (b), pois *não* vale em geral que

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}} = 0 \implies n!\ a_{t_1 \dots t_n} = 0\ .$$

É justamente esse o ponto que motiva o contraexemplo. Exibiremos $f \in \mathcal{H}'_{\mathrm{CK}}$ tal que $f \neq 0$ e $\langle u, f\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$.

Seja

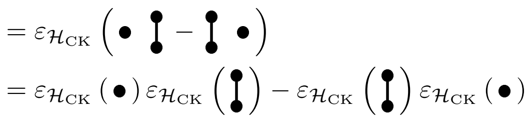


Mostraremos que $\langle u, f\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$. Tomamos a base $\big\{Z_t \mid t \in \mathrm{PRT}\backslash\{1\}\big\}$ de $\mathfrak{z}$, com uma ordem qualquer fixada, e aplicando o teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt (teorema 3.3.1), para obter a base PBW de $\mathcal{U}(\mathfrak{z})$, formada pelos elementos

$$Z_{t_1} \dots Z_{t_n}\ ,\quad t_1 \leq \dots \leq t_n\ .$$

Basta mostrar que $\langle u, f\rangle = 0$ para u elemento da base PBW. Para $u = 1_{\mathbb{K}}$, temos:

$$\langle u, f\rangle = \bar{i}(1_{\mathbb{K}})(f)$$



$$= 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0\ .$$

Para $u = Z_t$, com $t \in \mathrm{PRT} \setminus \{1\}$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle u, f\rangle &= \bar{i}(Z_t)(f)\\
&= Z_t\left(\bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} - \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)\\
&= Z_t\left(\bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) - Z_t\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)\\
&= 0 - 0 = 0\ .
\end{aligned}$$

Calculamos, agora, para $u = Z_{t_1}Z_{t_2}$, em que $t_1, t_2 \in \mathrm{PRT} \setminus \{1\}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle u, f\rangle &= \bar{i}(Z_{t_1}Z_{t_2})(f)\\
&= Z_{t_1} * Z_{t_2}\left(\bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} - \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)\\
&= Z_{t_1} * Z_{t_2}\left(\bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) - Z_{t_1} * Z_{t_2}\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)\\
&\overset{5.5.3,\ 1.}{=} Z_{t_1}(\bullet)\, Z_{t_2}\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) + Z_{t_2}(\bullet)\, Z_{t_1}\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) +\\
&\quad - Z_{t_1}\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) Z_{t_2}(\bullet) - Z_{t_2}\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) Z_{t_1}(\bullet)\\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Para $u = Z_{t_1}Z_{t_2}Z_{t_3}$, com $t_1, t_2, t_3 \in \mathrm{PRT} \setminus \{1\}$, temos que calcular

$$\bar{i}(Z_{t_1}Z_{t_2}Z_{t_3}) = Z_{t_1} * Z_{t_2} * Z_{t_3} = (Z_{t_1} \otimes Z_{t_2} \otimes Z_{t_3}) \circ \Delta_2\ ,$$

com Δ_2 o coproduto em $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ aplicado duas vezes em qualquer posição tensorial. Calculamos então:

$$\begin{aligned}
\Delta(\bullet) &= \bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\\
\Delta_2(\bullet) &= \bullet \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \bullet \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \bullet\\
\Delta\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) &= \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 + 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} + \bullet \otimes \bullet\\
\Delta_2\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) &= \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} +\\
&\quad + \bullet \otimes \bullet \otimes 1 + \bullet \otimes 1 \otimes \bullet + 1 \otimes \bullet \otimes \bullet
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2\left(\bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\right) &= \bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 \otimes 1 + \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes \bullet \otimes 1 + \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 \otimes \bullet +\\
&\quad + \bullet \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 + 1 \otimes \bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 + 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes \bullet +\\
&\quad + \bullet \otimes 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} + 1 \otimes \bullet \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} + 1 \otimes 1 \otimes \bullet \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} +\\
&\quad + \bullet\bullet \otimes \bullet \otimes 1 + \bullet \otimes \bullet\bullet \otimes 1 + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet}_{} +\\
&\quad + \bullet\bullet \otimes 1 \otimes \bullet + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet}_{} + \bullet \otimes 1 \otimes \bullet\bullet +\\
&\quad + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet}_{} + 1 \otimes \bullet\bullet \otimes \bullet + 1 \otimes \bullet \otimes \bullet\bullet
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2\left(\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\ \bullet\right) = {} & \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet \otimes 1 \otimes 1 + \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes \bullet \otimes 1 + \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 \otimes \bullet \ + \\
& + \bullet \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes 1 + 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} \otimes \bullet \ + \\
& + \bullet \otimes 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} + 1 \otimes \bullet \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} + 1 \otimes 1 \otimes \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet \ + \\
& + \bullet\bullet \otimes \bullet \otimes 1 + \bullet \otimes \bullet\bullet \otimes 1 + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet} \ + \\
& + \bullet\bullet \otimes 1 \otimes \bullet + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet} + \bullet \otimes 1 \otimes \bullet\bullet \ + \\
& + \underbrace{\bullet \otimes \bullet \otimes \bullet} + 1 \otimes \bullet\bullet \otimes \bullet + 1 \otimes \bullet \otimes \bullet\bullet \ .
\end{aligned}
$$

Ao aplicarmos $Z_{t_1} \otimes Z_{t_2} \otimes Z_{t_3}$ em $\Delta_2\left(\bullet\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} - \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)$, sobram apenas os termos destacados. Temos então:

$$
\begin{aligned}
Z_{t_1} * Z_{t_2} * Z_{t_3}(f) &= Z_{t_1} \otimes Z_{t_2} \otimes Z_{t_3}\left(\Delta_2\left(\bullet\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}} - \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet\right)\right) \\
&= 3\ Z_{t_1}(\bullet)Z_{t_2}(\bullet)Z_{t_3}(\bullet) - 3\ Z_{t_1}(\bullet)Z_{t_2}(\bullet)Z_{t_3}(\bullet) \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

Portanto, para $u = Z_{t_1}Z_{t_2}Z_{t_3}$, temos $\langle u, f\rangle = 0$.

Por fim, para $u = Z_{t_1}Z_{t_2}Z_{t_3}Z_{t_4}$, $u = Z_{t_1}Z_{t_2}Z_{t_3}Z_{t_4}Z_{t_5}$, etc, devemos calcular $\Delta_3(f)$, $\Delta_4(f)$, etc, aplicar Z_{t_j} cada entrada tensorial j e multiplicar todas as entradas para obter $\langle u, f\rangle$.

Mas o cálculo de $\Delta_3(f)$, $\Delta_4(f)$, etc vai sempre gerar termos com pelo menos uma entrada tensorial sendo 1. De fato, temos pelo menos 4 entradas tensoriais, e as florestas $\bullet\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}$ e $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\bullet$ têm apenas 3 vértices cada. Ainda, cada parcela do coproduto conserva o mesmo número de vértices que a floresta que está sendo operada. Então as parcelas de $\Delta_3(f)$, $\Delta_4(f)$, etc, devem ter, todas, 3 vértices distribuídos por entre as 4, 5, etc entradas tensoriais. Pelo menos uma delas fica sem vértices, como afirmado.

Portanto, ao aplicar os Z_{t_j}'s e multiplicar sobre todas as entradas de cada tensor da soma, temos que pelo menos um dos Z_{t_j}'s vai atuar em 1 e resultar em 0, anulando cada parcela da soma. Então temos $\langle u, f\rangle = 0$.

Dessa forma, obtivemos $f \in \mathcal{H}_{\text{CK}}$ não nulo tal que $\langle u, f\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{z})$, e a propriedade (b) não é válida.

□

Considerações finais

Revisão dos pontos principais

Reservamos este capítulo para revisar os principais pontos estudados no presente trabalho. Para estudar as álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson construídas sobre grafos do tipo árvore, foi necessário estudar alguns elementos da teoria de álgebras de Hopf e de Lie. Esses pré-requisitos foram estudados nos três primeiros capítulos. Também foi necessário estudar biálgebras conexas com filtração e com graduação, resultando no capítulo 4 deste material.

A parte principal do trabalho encontra-se no capítulo 5, em que fazemos um estudo das álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson. No decorrer desse capítulo, abordamos uma versão para árvores não-ordenadas dessas duas álgebras. Terminamos o trabalho mostrando que há uma dualidade entre essas duas álgebras. O par dual obtido é separante no caso das árvores não-ordenadas, porém no caso das árvores ordenadas, o par dual análogo não possui uma das propriedades de par separante. Um contraexemplo para essa propriedade foi dado no final do capítulo 5.

Estudos posteriores

A dualidade entre as álgebras de Connes-Kreimer e de Grossman-Larson foi obtida, no presente trabalho, por meio de um par dual. Os artigos [18] e [15] apresentam a ideia de se considerar o *dual graduado* da álgebra de Connes-Kreimer. Seguindo essa linha, o artigo [18] mostra que

$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\mathrm{gr}} \cong \mathcal{H}_{\mathrm{GL}} \ , \quad \text{no caso das árvores não-ordenadas}$$

e o artigo [15], que

$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}^{\mathrm{gr}} \cong \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \ , \quad \text{no caso das árvores ordenadas} \ .$$

Uma outra possibilidade de estudo seria a abordagem de outras álgebras sobre árvores presentes na literatura. Mencionamos a álgebra de Calaque, Ebrahimi-Fard & Manchon, que é estudada nos artigos [12] e [13].

Ainda, pode-se tentar estender essas álgebras para outros grafos tipo árvore, como as árvores com rótulos (ou decoradas), árvores binárias ou árvores m-árias. Ou ainda, procurar as aplicações na teoria quântica de campos, como a renormalização de divergências em expansões perturbativas.

Bibliografia

Livros

[1] Butcher, J. C.; *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Wiley, 2008.

[2] Dascalescu, S.; Nastasescu, C.; Raianu, S.; *Hopf Algebras: an introduction*, Marcel Dekker 2001.

[3] Gracia-Bondía, J. M.; Várilly, J. C.; Figueroa, H.; *Elements of Noncommutative Geometry* Birkhäuser, 2001.

[4] Gross, J. L.; Yellen, J.; Zhang, P.; *Handbook of Graph Theory*, Second Edition, CRC, 2014.

[5] Hairer, E.; Nørsett, S. P.; Wanner, G.; *Solving Ordinary Differential Equations I - Nonstiff Problems*, Second Revised Edition, Springer, 2008.

[6] Jacobson, N.; *Lie Algebras*, Dover, 1979.

[7] Kirillov, A.; *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge, 2008.

[8] Radford, D. E.; *Hopf Algebras*, World Scientific 2012.

Dissertações e teses

[9] Schutzer, W.; *Álgebras de Lie, álgebras de Hopf e grupos quânticos*, Dissertação de mestrado, USP, 1996. Disponível em: `http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/tese.pdf`.

[10] Teixeira, M. M.; *Extensões de álgebras obtidas a partir de álgebras de Hopf*, Dissertação de mestrado, UFSC, 2011. Disponível em: `https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/95887`.

Artigos

[11] Brouder, C.; *Runge-Kutta methods and renormalization*, Eur. Phys. J. C (2000), 521-534. Disponível em: `http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs100529900235#page-2` ou em `http://arxiv.org/pdf/hep-th/9904014.pdf`.

[12] Calaque, D.; Ebrahimi-Fard, K.; Manchon, D.; *Two interacting Hopf algebras of trees*, Advances in Applied Mathematics 47 (2011) 282-308. Disponível em `http://arxiv.org/abs/0806.2238`.

[13] Chartier, P.; Hairer, E.; Vilmart, G.; *Algebraic structures of B-series*, Found. Comput. Math. 10(7) (2010) 407-427. Disponível em: `http://www.unige.ch/ vilmart/publications.html`.

[14] Connes, A.; Kreimer, D.; *Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. Math. Phys (1998), 203-242. Disponível em: `http://arxiv.org/abs/hep-th/9808042`.

[15] Foissy, L.; *An introduction to Hopf algebras of trees*, Preprint, 2013. Disponível em: `http://loic.foissy.free.fr/pageperso/preprint3.pdf`.

[16] Garrett, P.; *Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*, 2011. Disponível em: `http://www.math.umn.edu/g̃arrett/m/algebra/pbw.pdf`.

[17] Grossman, R.; Larson, R. G.; *Hopf-algebraic structures of families of trees*, J. Algebra, 126 (1989), 184-210. Disponível em: `http://arxiv.org/abs/0711.3877`.

[18] Hoffman, M. E.; *Combinatorics of Rooted Trees and Hopf Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 3795-3811. Disponível em: http://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03317-8/.

[19] Panaite, F.; *Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees* Letters in Mathematical Physics 51 (2000), 211-219. Disponível em: http://arxiv.org/abs/math/0003074.