**Douglas Manoel Guimarães**

# *Álgebras de Hopf e Grupos Algébricos Afins*

Florianópolis

2014

**Douglas Manoel Guimarães**

# *Álgebras de Hopf e Grupos Algébricos Afins*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:
Elizer Batista

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2014

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 28/2014/CCM.

Prof. Dra. Silvia Martini De Holanda Janesch
Coordenadora do Curso

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Prof. Dr. Giuliano Boava

Prof. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari

# *Agradecimentos*

Primeiramente, agradeço à minha família por toda a confiança e o suporte que me deram durante toda minha vida. Meus pais que fazem de tudo por mim, minha irmã Letícia que sempre me apoiou e que me inspiro todos os dias, meu irmão Darlan que também sempre me apoiou e faz tudo que pode por mim, meus irmãos Kevin e Mariana que viveram grande parte da minha vida comigo e tenho grande admiração por eles.

Agradeço a todos professores que tive a oportunidade de conhecer durante esses quatro anos. Em especial ao professor Eliezer que sem ele este trabalho não seria possível, à professora Alda que aceitou participar da banca deste trabalho e por sua participação nos seminários sobre álgebras de Hopf, ao professor Giuliano com quem aprendi e cresci muito academicamente e com certeza eu não estaria aqui hoje se não fosse por ele, à professora Silvia uma pessoa incrível que tive a oportunidade de ter dois anos e meio de aula e ao professor Nereu uma pessoa fantástica que proporcionou grandes momentos nesses dois anos de aulas que tive a oportunidade de ter com ele.

Agradeço ao professor Pinho uma pessoa sem igual e que admiro muito e a todos com quem pude conviver no PET Matemática, certamente sem o PET eu não seria a mesma pessoa que sou hoje. Cresci muito, fiz novas amizades, entre elas meus colegas de curso e trabalho Leonardo e Daniella que estiveram comigo até o fim e todos os bolsistas que participaram da minha trajetória em especial ao Natã, um grande amigo, que foi meu parceiro de estudo e, principalmente, de festas.

# *Resumo*

Dado um corpo $k$ e definindo uma $k$-álgebra via diagramas podemos dualizar esta estrutura e definir uma coálgebra apenas "revertendo" o sentido das flechas. Além disso, definidos álgebra e coálgebra, podemos pensar em uma nova estrutura que possui estrutura de álgebra e coálgebra concomitantemente e chegar à definição de uma biálgebra. Agora, adicionando uma nova aplicação à definição de biálgebra, conseguimos a definição de uma álgebra de Hopf. Fazendo um estudo introdutório sobre geometria algébrica podemos definir um grupo algébrico afim, que é basicamente um grupo definido através relações polinomiais. Feito isso, podemos agora relacionar estas duas estruturas de forma bastante natural.

**Palavras-chave:** álgebra de Hopf, geometria algébrica, grupo algébrico afim.

Abstract

Let $k$ be a field and define a $k$-algebra by diagrams. We can dualize this structure to define a coalgebra by "reversing"the orientations of the arrows. Moreover, with the definitions of algebra and coalgebra in hands, we can think in another sctructure which has both structures, algebra and coalgebra, to define a bialgebra. Now, adding another map to the definition of bialgebra, we can get to the definition of Hopf algebra. Doing an introductory study of algebraic geometry we can define an affine algebraic group, witch is basically a group defined by polynomial relations. Now we can connect both structures of Hopf algebra and affine algebraic group in a natural way.

**Key-words:** Hopf algebra, algebraic geometry, affine algebraic group.

# *Sumário*

# *Introdução*

Assumiremos que para a leitura deste trabalho o leitor já é familiarizado com as estruturas de anel, grupo e espaço vetorial, bem como a teoria de produto tensorial entre espaços vetoriais.

Neste trabalho iremos tratar de álgebras de Hopf e grupos algébricos afins e a relação entre estas duas estruturas. Uma álgebra de Hopf, assim chamada em referência ao matemático alemão Heiz Hopf, é uma estrutura que é simultaneamente uma álgebra e uma coálgebra com uma certa compatibilidade entra estas estruturas. Além do que trataremos neste trabalho, álgebras de Hopf ocorrem em diversos lugares, por exemplo: na topologia algébrica, relacionadas com o conceito de H-espaço, na teoria de esquemas de grupos e na teoria de grupos.

Também precisaremos de uma breve introdução sobre geometria algébrica, uma área matemática que combina técnicas de álgebra abstrata com a linguagem e problemas da geometria. O estudo começou principalmente com a escola italiana nos anos 1910 e 1920 e até hoje é estudado por diversos matemáticos.

Os dois primeiros capítulos são destinados a definir uma álgebra de Hopf via álgebras, coálgebras e biálgebras mostrando algumas propriedades e exemplos destas estruturas. Para isso, usaremos como principal referência o livro [5] e o livro [1].

No terceiro capítulo, daremos uma introdução à geometria algébrica com o intuito de demonstrar resultados que serão importantes para o capítulo seguinte e, por fim, definiremos um grupo algébrico afim. No último capítulo, objetivo principal do trabalho, relacionaremos a estrutura de álgebra de Hopf com a estrutura de grupo algébrico afim e daremos alguns exemplos. Nesta última parte usaremos como principal referência o livro [6] e para alguns resultados específicos usaremos [2] e [3].

# 1 Álgebras e Coálgebras

No decorrer deste trabalho fixe $k$ como um corpo e considere todos os produtos tensoriais sobre $k$ até que mencionado o contrário. O objetivo deste capítulo é definir a estrutura de $k$-álgebra e de $k$-coálgebra, bem com demonstrar algumas propriedades. Para começar, definiremos uma $k$-álgebra de duas maneiras: a forma "clássica" e da forma "categórica" e, logo em seguida, demonstraremos a equivalência de ambas as definições.

## 1.1 Álgebras

**Definição 1.1.** *Uma k-álgebra unital A é um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e* $\forall \alpha \in k$, $\forall x, y \in A$ *temos:*

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b),$$

*em que ab representa a multiplicação do anel A entre os elementos a e b.*

**Definição 1.2.** *Uma k-álgebra unital é uma tripla* $(A, \mu, \eta)$*, em que A é um k-espaço vetorial e* $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ *e* $\eta : k \longrightarrow A$ *são aplicações k-lineares tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\quad e \quad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes I_A"] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes \eta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}\ ,$$

*em que $I_A$ é a identidade em $A$ e*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \to & k\otimes A \\ & a & \mapsto & 1_k \otimes a \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \psi: & A & \to & A\otimes k \\ & a & \mapsto & a\otimes 1_k \end{array}$$

*são os isomorfismos canônicos.*

*As funções $\mu$ e $\eta$ são chamadas de multiplicação e unidade respectivamente.*

**Observação 1.3.** *A comutatividade do primeiro diagrama representa a associatividade da álgebra e nos diz que:*

$$\mu\circ(I_A\otimes\mu)=\mu\circ(\mu\otimes I_A).$$

*Já o segundo diagrama nos fornece*

$$\mu\circ(\eta\otimes I_A)\circ\psi = I_A \quad e \quad \mu\circ(I_A\circ\eta)\circ\varphi=I_A \ ,$$

*E está relacionado com a unidade da álgebra.*

**Proposição 1.4.** *As definições de k-álgebras dadas acima são equivalentes.*

*Demonstração.* Primeiro, seja $A$ uma $k$-álgebra como na definição 1.1. É fácil ver que a multiplicação do anel dada por $M : A\times A \longrightarrow A$ em que $M(a,b) = ab$ é uma aplicação bilinear. Assim, pela propriedade universal do produto tensorial, existe única $\mu : A\otimes A \longrightarrow A$ $k$-linear tal que $\mu(a\otimes b) = M(a,b) = ab$. Defina $\eta : k \longrightarrow A$ por $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$, em que $1_A$ representa a unidade de $A$, e note que $\eta$ é uma aplicação $k$-linear.

Agora, verifiquemos a comutatividade dos diagramas da definição 1.2. Sejam $a,b,c\in A$. Assim,

$$(\mu\circ(I_A\otimes\mu))(a\otimes b\otimes c)=\mu(a\otimes\mu(b\otimes c))=\mu(a\otimes bc)=a(bc)$$

e

$$(\mu\circ(\mu\otimes I_A))(a\otimes b\otimes c)=\mu(\mu(a\otimes b)\otimes c)=\mu(ab\otimes c)=(ab)c.$$

Como $A$ é um anel, temos $a(bc)=(ab)c$ e assim $\mu\circ(I_A\otimes\mu)=\mu\circ(\mu\otimes I_A)$.

Resta mostrar a comutatividade do segundo diagrama, isto é, $\mu\circ(\eta\otimes I_A)\circ\psi = I_A$

e $\mu \circ (I_A \circ \eta) \circ \varphi = I_A$. Dado $a \in A$ temos:

$$(\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \psi)(a) = (\mu \circ (I_A \otimes \eta))(a \otimes 1_k) = \mu(a \otimes \eta(1_k)) = a\eta(1_k) = a1_A = a = I(a).$$

Ou seja, $\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \psi = Id_A$. Analogamente, mostra-se que $\mu \circ (I_A \circ \eta) \circ \varphi = I_A$. Assim, os diagramas comutam, e segue que $(A, \mu, \eta)$ é uma álgebra pela definição 1.2.

Por outro lado, seja $(A, \mu, \eta)$ uma álgebra como na definição 1.2. Assim, $A$ é um espaço vetorial. Precisamos mostrar que $A$ também possui uma estrutura de anel. De fato, defina a multiplicação como

$$\begin{array}{rccl} M: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (a, b) & \mapsto & M(a, b) = \mu(a \otimes b) = ab. \end{array}$$

A partir do comutatividade do primeiro diagrama, é fácil ver a associatividade de $M$.

Sejam $a, b, c \in A$, temos $a(b+c) = \mu(a \otimes (b+c)) = \mu(a \otimes b + a \otimes c) = \mu(a \otimes b) + \mu(a \otimes c) = ab + ac$ e, analogamente, mostra-se que $(a + b)c = ac + bc$.

O elemento $\eta(1_k)$ é a unidade, em que $1_k$ é a unidade do corpo. De fato, como o segundo diagrama comuta, dado $a \in A$, temos

$$a = I_A(a) = (\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \psi)(a) = (\mu \circ (I_A \otimes \eta))(a \otimes 1_k) = \mu(a \otimes \eta(1_k)) = a\eta(1_k).$$

Do mesmo modo, mostra-se que $a = \eta(1_k)a$.

Resta verificar a relação de compatibilidade. Sejam $\alpha \in k$ e $a, b \in A$ temos

$$\alpha(ab) = \alpha\mu(a \otimes b) = \mu(\alpha(a \otimes b)) = \mu(\alpha a \otimes b) = (\alpha a)b$$

e

$$\alpha(ab) = \alpha\mu(a \otimes b) = \mu(\alpha(a \otimes b)) = \mu(a \otimes \alpha b) = a(\alpha b)$$

. Portanto, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$. $\square$

**Exemplo 1.5.** *Todo corpo $k$ é uma $k$-álgebra sobre si mesmo.*

**Exemplo 1.6** (Álgebra de Funções)**.** *Sejam $k$ um corpo e $X \neq \emptyset$ um conjunto. De-*

*fina* $\mathcal{F}(X) = \{f : X \longrightarrow k; f$ *é função*$\}$*, então* $\mathcal{F}(X)$ *é uma* $k$*-álgebra com produto, multiplicação por escalar e soma ponto a ponto.*

**Exemplo 1.7** (Álgebra de Grupo)**.** *Seja* $G$ *um grupo multiplicativo. A álgebra de grupo* $kG$ *é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de* $G$ *com coeficientes em* $k$*, ou seja, dado* $x \in kG$ *temos*

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n,$$

*em que* $a_i \in k$ *e* $g_i \in G$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Em geral, denotamos*

$$x = \sum_{g \in G} a_g g,$$

*em que* $a_g = 0$ *a menos de uma quantidade finita de* $g \in G$*.*

*Defina as operações como:*

- *Soma:*
$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$
- *Multiplicação:*
$$(\sum_{g \in G} a_g g)(\sum_{h \in G} b_h h) = \sum_{z \in G} c_z z \text{ em que } c_z = \sum_{\substack{g,h \in G \\ z = gh}} a_g b_h.$$
- *Multiplicação por escalar:*
$$\lambda(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g.$$

*Com as operações definidas acima, é fácil ver que a* $1_k e$ *é a unidade da álgebra, em que* $e$ *é o elemento neutro do grupo, e que* $kG$ *possui estrutura de* $k$*-álgebra.*

**Exemplo 1.8** (Álgebra Oposta $\boldsymbol{A^{op}}$)**.** *Seja* $A$ *um* $k$*-álgebra. Defina* $\mu^{op} = \mu \circ \tau : A \otimes A \longrightarrow A$*, em que* $\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ *é a aplicação twist dada por* $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$*. Claramente,* $A^{op} = (A, \mu^{op}, \eta)$ *é uma álgebra.*

Para simplificar, a partir de agora usaremos apenas álgebra ao invés de $k$-álgebra unital.

**Proposição 1.9.** *Sejam $(A, \mu_A, \eta_A)$ e $(B, \mu_B, \eta_B)$ duas álgebras, então $A \otimes B$ também tem estrutura de álgebra.*

*Demonstração.* Já sabemos que $A \otimes B$ tem estrutura de espaço vetorial. Defina

$$\mu_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \longrightarrow A \otimes B \quad e \quad \eta_{A\otimes B} : k \longrightarrow A \otimes B$$

como $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (I_A \otimes \tau \otimes I_B)$ e $\eta_{A\otimes B} = (\eta_A \otimes \eta_B)\phi^{-1}$, em que $\tau$ é aplicação twist e $\phi : k \otimes k \longrightarrow k$ é o isomorfismo canônico. Verifiquemos a comutatividade dos diagramas da definição. Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$ e $b_1, b_2, b_3 \in B$, temos

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\otimes B} \circ (\mu_{A\otimes B} \otimes I_{A\otimes B})(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B} \circ (((\mu_A \otimes \mu_B) \circ (I_A \otimes \tau \otimes I_B)) \otimes I_{A\otimes B})(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B} \circ ((\mu_A \otimes \mu_B) \otimes I_{A\otimes B})(a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B}(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_b)(a_1 a_2 \otimes a_3 \otimes b_1 b_2 \otimes b_3) \\
&= (a_1 a_2) a_3 \otimes (b_1 b_2) b_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\otimes B} \circ (I_{A\otimes B} \otimes \mu_{A\otimes B})(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B} \circ (I_{A\otimes B} \otimes ((\mu_A \otimes \mu_B) \circ (I_A \otimes \tau \otimes I_B)))(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes a_3 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B} \circ (I_{A\otimes B} \otimes (\mu_A \otimes \mu_B))(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes b_2 \otimes b_3) \\
&= \mu_{A\otimes B}(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 a_3 \otimes b_2 b_3) \\
&= (\mu_A \otimes \mu_B)(a_1 \otimes a_2 a_3 \otimes b_1 \otimes b_2 b_3) \\
&= a_1(a_2 a_3) \otimes b_1(b_2 b_3).
\end{aligned}$$

Como $A$ e $B$ são álgebras, segue que $\mu_{A\otimes B} \circ (\mu_{A\otimes B} \otimes I) = \mu_{A\otimes B} \circ (I \otimes \mu_{A\otimes B})$.

Agora, dados $a \in A$ e $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned}
(\mu_{A\otimes B} \circ (\eta_{A\otimes B} \otimes I_{A\otimes B}) \circ \varphi)(a \otimes b) &= \mu_{A\otimes B}(\eta_{A\otimes B}(1_k) \otimes a \otimes b) \\
&= \mu_{A\otimes B}(\eta_A(1_k) \otimes \eta_B(1_k) \otimes a \otimes b) \\
&= \eta_A(1_k)a \otimes \eta_B(1_k)b \\
&= a \otimes b.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(\mu_{A\otimes B} \circ (I_{A\otimes B} \otimes \eta_{A\otimes B}) \circ \psi) = I_{A\otimes B}$. E assim, $A \otimes B$ é uma $k$-álgebra. □

**Definição 1.10.** *Uma álgebra $(A, \mu, \eta)$ é dita comutativa se o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

*em que $\tau$ é a aplicação twist definida acima. Em outras palavras, $\mu \circ \tau = \mu$, ou seja, para quaisquer $a, b \in A$ temos que*

$$ab = \mu(a \otimes b) = \mu \circ \tau(a \otimes b) = \mu(b \otimes a) = ba.$$

**Definição 1.11.** *Seja $A$ uma álgebra. Um subespaço vetorial $B \subseteq A$ é dito uma subálgebra se $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.*

**Definição 1.12.** *Seja $A$ uma álgebra. Um subespaço vetorial $I \subseteq A$ é chamado:*

*(i) Um ideal à esquerda (à direita) se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ ($\mu(I \otimes A) \subseteq I$);*

*(ii) Um ideal se $\mu(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I$.*

**Definição 1.13.** *Sejam $(A, \mu_A, \eta_A)$ e $(B, \mu_B, \eta_B)$ duas álgebras. Dizemos que $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de álgebras se $f$ é uma função $k$-linear tal que os diagramas abaixo comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& k \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] &
\end{tikzcd}$$

*O primeiro diagrama nos diz que $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos $a, b \in A$ e o segundo diagrama que $f(1_A) = 1_B$.*

**Lema 1.14.** *Sejam $V_1, V_2, W_1, W_2$ espaços vetoriais, $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ aplicações $k$-lineares. Então $\ker(f \otimes g) = \ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker(g)$, em que $\ker(f) = \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$.*

*Demonstração.* Claramente $\ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker(g) \subseteq \ker(f \otimes g)$, mostremos que $\ker(f \otimes g) \subseteq \ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker(g)$.

Seja $(v_\alpha)_{\alpha \in A_1}$ uma base de $\ker(f)$ e completo com $(v_\alpha)_{\alpha \in A_2}$ para formar uma base de $V_1$. Assim, $(f(v_\alpha))_{\alpha \in A_2}$ é um subconjunto LI de $V_2$. Analogamente, tome $(w_\beta)_{\beta \in B_1}$ uma base de $\ker(g)$ e complete com $(w_\beta)_{\beta \in B_2}$ para uma base de $W_1$. Novamente, $(g(w_\beta))_{\beta \in B_2}$ é um subconjunto LI em $W_2$. Seja,

$$q = \sum_{\substack{\alpha \in A_1 \cup A_2 \\ \beta \in B_1 \cup B_2}} c_{\alpha\beta} v_\alpha \otimes w_\beta \in ker(f \otimes g).$$

Então

$$\sum_{\substack{\alpha \in A_2 \\ \beta \in B_2}} c_{\alpha\beta} f(v_\alpha) \otimes g(w_\beta) = 0.$$

Como a família $(f(v_\alpha) \otimes g(w_\beta))_{\alpha \in A_2, \beta \in B_2}$ é LI, segue que $c_{\alpha\beta} = 0$ para todos $\alpha \in A_2, \beta \in B_2$. Logo, $q \in \ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker(g)$ e, portanto,

$$\ker(f \otimes g) \subseteq \ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \ker(g).$$

□

**Proposição 1.15.** *Sejam $A, B$ álgebras e $f : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebras então:*

*(i) $Im(f)$ é uma subálgebra de $B$;*

*(ii) $\ker(f)$ é um ideal de $A$.*

*Demonstração.* $(i)$ Precisamos mostrar que $\mu_B(Im(f) \otimes Im(f)) \subseteq Im(f)$. Como $f$ é um morfismo de álgebras, temos $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_B(Im(f) \otimes Im(f)) &= \mu_B(f(A) \otimes f(A)) \\
&= (\mu_B \circ (f \otimes f))(A \otimes A) \\
&= (f \circ \mu_A)(A \otimes A) \\
&= f(\mu_A(A \otimes A)) \subseteq f(A) = Im(f).
\end{aligned}$$

Portanto, $Im(f)$ é uma subálgebra de $B$.

$(ii)$ Precisamos mostrar que $\mu_A(A \otimes ker(f) + ker(f) \otimes A) \subseteq ker(f)$. Note que $(\mu_B \circ (f \otimes f))(ker(f \otimes f)) = \{0\}$, e como $f$ é morfismo de álgebra, segue que $(f \circ \mu_A)(ker(f \otimes f)) = \{0\}$. Assim, $\mu_A(ker(f \otimes f)) \subseteq ker(f)$, logo, pelo Lema 1.14, $\mu_A(ker(f) \otimes A + A \otimes ker(f))) \subseteq ker(f)$. Portanto, $ker(f)$ é um ideal de $A$. $\square$

**Proposição 1.16.** *Sejam $A$ uma álgebra, $I$ um ideal de $A$ e $\pi : A \to A/I$ a projeção canônica de espaços vetoriais. Então:*

*(i) Existe uma única estrutura de álgebra em $A/I$ tal que $\pi$ é um morfismo de álgebra;*

*(ii) Se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de álgebras tal que $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras $\overline{f} : A/I \longrightarrow B$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

*Demonstração.* $(i)$ Temos $ker(\pi) = I$ e como $I$ é ideal de $A$, pelo Lema 1.14, segue que $\mu(ker(\pi \otimes \pi)) = \mu(I \otimes A + A \otimes I) \subseteq I$. Assim, podemos definir uma única aplicação linear $\overline{\mu} : A/I \otimes A/I \longrightarrow A/I$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\pi\circ\mu"] & A/I \otimes A/I \arrow[d, "\overline{\mu}"] \\
A \arrow[r, "\pi"'] & A/I
\end{tikzcd}$$

Isto é, $\overline{\mu} \circ (\pi \otimes \pi) = \pi \circ \mu$ e para quaisquer $a, b \in A$ temos $\overline{ab} = \pi \circ \mu(a \otimes b) = \overline{\mu}(\pi \otimes \pi)(a \otimes b) = \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{b})$. Note que $\overline{a} = a + I = \pi(a)$, para todo $a \in A$. Agora, verifiquemos a comutatividade dos diagramas da definição de álgebra. Sejam $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in A/I$, temos:

$$\begin{aligned}
(\overline{\mu} \circ (I_{A/I} \otimes \overline{\mu}))(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}) &= \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{(bc)}) \\
&= \overline{a}(\overline{bc}) \\
&= \overline{a(bc)} \\
&= \overline{(ab)c} \\
&= (\overline{ab})\overline{c} \\
&= \overline{\mu}(\overline{(ab)} \otimes \overline{c}) \\
&= (\overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes I_{A/I}))(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, definimos $\overline{\eta} : k \longrightarrow A/I$ tal que $\pi \circ \eta = \overline{\eta}$. Assim, para todo $\overline{a} \in A/I$, temos:

$$\begin{aligned}
(\overline{\mu} \circ (I_{A/I} \otimes \overline{\eta}) \circ \psi)(\overline{a}) &= \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{\eta}(1_k)) \\
&= \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{\eta(1_k)}) \\
&= \pi(\mu(a \otimes \eta(1_k))) \\
&= \pi(a) = \overline{a}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(\overline{\mu} \circ (\overline{\eta} \otimes I_{A/I}) \circ \varphi)(\overline{a}) = \overline{a}$. Portanto, $(A/I, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ é uma álgebra. Para verificar que $\pi$ é um morfismo de álgebras, basta verificar o diagrama no início da demonstração.

A unicidade da estrutura de álgebra em $A/I$ segue da unicidade de $\overline{\mu}$ e $\overline{\eta}$.

$(ii)$ Como $I \subseteq ker(f)$, novamente pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única aplicação linear $\overline{f} : A/I \longrightarrow B$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Mostremos que $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras. Sejam $\overline{a}, \overline{b} \in A/I$, então:

$$\begin{aligned}
(\overline{f} \circ \overline{\mu})(\overline{a} \otimes \overline{b}) &= \overline{f}(\pi(\mu(a \otimes b))) && = f(ab) \\
&= (f \circ \mu_A)(a \otimes b) && = (\mu_B \circ (f \otimes f))(a \otimes b) \\
&= \mu_B(f(a) \otimes f(b)) && = \mu_B(\overline{f}(\overline{a}) \otimes \overline{f}(\overline{b})) \\
&= (\mu_B \circ (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{a} \otimes \overline{b})).
\end{aligned}$$

E dado $\alpha \in k$, temos:

$$(\overline{f} \circ \overline{\eta})(\alpha) = \overline{f}(\pi(\eta_A(\alpha))) = f(\eta_A(\alpha)) = \eta_B(\alpha).$$

Portanto, $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras. $\square$

**Corolário 1.17** (Primeiro Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam $A, B$ álgebras e $f : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebras. Então $\overline{f} : A/ker(f) \longrightarrow Im(f)$ é um isomorfismo.*

## 1.2 Coálgebras

Vimos anteriormente a definição de $k$-álgebras de duas maneiras: a forma "clássica"e a forma "categórica". A importância de definirmos uma $k$-álgebra de maneira categórica, é que, agora, podemos dualizar a definição de $k$-álgebra invertendo o sentido das flechas nos diagramas e obter uma nova estrutura a qual chamamos de $k$-coálgebra.

**Definição 1.18.** *Uma $k$-coálgebra é uma tripla $(C, \Delta, \varepsilon)$, em que $C$ é um $k$-espaço vetorial, $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow k$ são aplicações $k$-lineares tais que os diagramas abaixo comutam*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\quad e \quad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C \arrow[ur, "\varphi^{-1}"] & & C \otimes k \arrow[ul, "\psi^{-1}"'] \\
 & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
\;,
$$

*em que $\varphi$ e $\psi$ são os isomorfismos canônicos dados por:*

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi : & C & \rightarrow & k \otimes C \\
 & c & \mapsto & 1_k \otimes c
\end{array}
\quad e \quad
\begin{array}{rccc}
\psi : & C & \rightarrow & C \otimes k \\
 & c & \mapsto & c \otimes 1_k.
\end{array}
$$

*O primeiro diagrama é chamado de coassociatividade e nos diz que*

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

*O segundo diagrama é chamado de axioma da counidade e nos diz que*

$$\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = \psi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

*A aplicação $\Delta$ é chamada de comultiplicação e a aplicação $\varepsilon$ de counidade.*

**Exemplo 1.19.** *Seja $S$ um conjunto não-vazio e $kS$ o k-espaço vetorial com base $S$. Então $kS$ é uma coálgebra com comultiplicação $\Delta(x) = x \otimes x$ e counidade $\varepsilon(x) = 1$, para qualquer $x \in S$ e estendidos por linearidade.*

*De fato, seja $x \in kS$ temos $x = \sum a_i x_i$ com $x_i \in S$*

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(\sum a_i x_i) &= (\Delta \otimes I)(\Delta(\sum a_i x_i)) \\ &= (\Delta \otimes I)(\sum a_i (x_i \otimes x_i)) \\ &= \sum a_i (x_i \otimes x_i \otimes x_i) \\ &= (I \otimes \Delta)(\sum a_i (x_i \otimes x_i)) \\ &= (I \otimes \Delta)(\Delta(\sum a_i x_i)) \\ &= ((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(\sum a_i x_i) \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \Delta) \circ \Delta)(\sum a_i x_i) &= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes \Delta))(\sum a_i (x_i \otimes x_i)) \\ &= \varphi^{-1}(\sum a_i (1 \otimes x_i)) \\ &= \sum a_i x_i \end{aligned}$$

*Analogamente, mostra-se a outra igualdade. Assim, segue que $kS$ é uma coálgebra.*

**Observação 1.20.** *Se $V$ é um k-espaço vetorial, usando o Lema de Zorn, é possível mostrar que todo espaço vetorial possui base. Assim, podemos introduzir uma estrutura de coálgebra em $V$ como fizemos no Exemplo* 1.19.

**Exemplo 1.21.** *Seja $C$ um k-espaço vetorial com base $\{c_m; m \in \mathbb{N}\}$. Então $C$ é uma coálgebra com comultiplicação e counidade*

$$\Delta(c_m) = \sum_{p,q} [p + q = m] c_p \otimes c_q \quad e \quad \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m} \ ,$$

*respectivamente, em que $p, q \in \mathbb{N}$ e $[p + q = m]$ é a função que é igual a 1 quando $p + q = m$ e igual a 0 quando $p + q \neq m$. Então $C$ é uma coálgebra.*

*Demonstração.* Precisamos mostrar a comutatividade dos diagramas da definição, isto é, $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$. Basta fazer a conta para algum $c_m$ na base e estender por linearidade. Assim:

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(c_m) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{p,q}[p+q=m]c_p \otimes c_q) \\
&= \sum_{p,q}[p+q=m]\Delta(c_p) \otimes c_q \\
&= \sum_{p,q}[p+q=m](\sum_{r,s}[r+s=p]c_r \otimes c_s) \otimes c_q \\
&= \sum_{q,r,s}[r+s+q=m]c_r \otimes c_s \otimes c_q
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(c_m) &= (I \otimes \Delta)(\sum_{q,p}[q+p=m]c_q \otimes c_p) \\
&= \sum_{q,p}[q+p=m]c_q \otimes (\sum_{r,s}[r+s=p]c_r \otimes c_s) \\
&= \sum_{q,r,s}[q+r+s=m]c_q \otimes c_r \otimes c_s.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Resta mostrar a comutatividade do segundo diagrama, ou seja, $\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = \psi^{-1} \circ (I \circ \varepsilon) \circ \Delta$. Para $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\varphi^1 \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta)(c_m) &= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I)(\sum_{p,q}[p+q=m]c_p \otimes c_q) \\
&= \sum_{p,q}[p+q=m]\varepsilon(c_p)c_q \\
&= \sum_{p,q}[p+q=m]\delta_{0,p}c_q \\
&= c_m.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\psi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I$. Portanto, $(C, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra, chamada de coálgebra da potência dividida. $\square$

**Exemplo 1.22.** *Sejam $n \geq 1$ um inteiro e $M^c(n,k)$ um $k$-espaço vetorial de dimensão $n^2$, daremos uma estrutura de coálgebra para $M^c(n,k)$. Denote por $\{e_{ij}\}_{i \leq i,j \leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$ e defina uma comultiplicação e uma counidade por:*

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj} \quad e \quad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$$

*Dessa forma, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra, chamada de coálgebra das matrizes.*

*Demonstração.* Vamos mostrar a comutatividade do primeiro diagrama, isto é, $(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$. Basta fazer a conta para algum $e_{ij}$ na base e estender por linearidade.

Assim,

$$\begin{aligned}
((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(e_{ij}) &= (I \otimes \Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes \Delta(e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes (\sum_{q=1}^{n} e_{pq} \otimes e_{qj}) \\
&= \sum_{i \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(e_{ij}) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{q=1}^{n} e_{iq} \otimes e_{qj}) \\
&= \sum_{q=1}^{n} \Delta(e_{iq}) \otimes e_{qj} \\
&= \sum_{q=1}^{n} (\sum_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pq}) \otimes e_{qj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.
\end{aligned}$$

Portanto, $(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$.

Mostremos, agora, a comutatividade do segundo diagrama, ou seja, $\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = \psi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta$. Temos

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta)(e_{ij}) &= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I))(\sum_{p=1}^{n} e_{iq} \otimes e_{qj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \varepsilon(e_{ip}) e_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip} e_{pj} \\
&= e_{ij} \\
&= I(e_{ij})
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos o outro lado da igualdade e, assim, $M^c(n, k)$ é uma coálgebra. □

**Exemplo 1.23.** *Sejam $G$ um grupo e $kG$ a álgebra de grupo. Podemos introduzir uma estrutura de coálgebra à $kG$. Observe que $\{1_k g\}_{g \in G}$ é uma base para $kG$. Assim, basta definir uma comultiplicação e uma counidade nos elementos da base e estender por line-*

*aridade.*

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & kG & \longrightarrow & kG \otimes kG \\ & g & \mapsto & g \otimes g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon: & kG & \longrightarrow & k \\ & g & \mapsto & 1 \end{array}.$$

### 1.2.1 Notação de Sweedler

Nosso objetivo aqui, é introduzir uma notação que irá facilitar o cálculo de longas composições que envolvam a comultiplicação.

Dada uma coálgebra $(C, \Delta, \varepsilon)$ podemos definir recursivamente $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

$$\begin{array}{rcrccc} \Delta_1 & = & \Delta: & C & \longrightarrow & C \otimes C \\ & & \Delta_n: & C & \longrightarrow & \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n+1} \end{array},$$

em que $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$, para $n \geq 2$ e $I^n$ é a identidade em $\underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n}$. Dado $c \in C$ vamos reescrever $\Delta(c) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \otimes c_i'$ como $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Assim, para $n = 2$ temos

$$\begin{array}{rcccl} \Delta_2(c) & = & ((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(c) & = & (\Delta \otimes I)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\ & & & = & \sum \sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}. \end{array}$$

Mas pela coassociatividade,

$$\begin{array}{rcl} ((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) & = & (I \otimes \Delta)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\ & = & \sum \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}. \end{array}$$

Logo, $\sum \sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = \sum \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$, que vamos reescrever como $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$. Dessa forma,

$$\Delta_n(c) = \sum c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n+1)}.$$

Ainda, pelo axioma da counidade, podemos escrever

$$c = \sum \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} = \sum c_{(1)} \varepsilon(c_{(2)}).$$

A demonstração do caso geral de que a notação de Sweedler funciona depende de uma indução e pode ser encontrada em [5], seção 1.18.

### 1.2.2 Subcoálgebras e Coálgebra Quociente

Aqui, vamos fazer para coálgebras tudo que fizemos para álgebras na seção anterior com seus devidos ajustes.

**Definição 1.24.** *Seja $(C, \Delta, \varepsilon)$ coálgebra. Dizemos que $C$ é uma coálgebra co-comutativa se o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau : twist"] & & C \otimes C. \end{tikzcd}$$

*Em outras palavras, dado $c \in C$ temos*

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}.$$

**Definição 1.25.** *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras. Uma aplicação $k$-linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd} .$$

*A comutatividade do primeiro diagrama nos diz que*

$$\Delta_D(f(c)) = \sum f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = \sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = (f \otimes f)(\Delta(c)) \ , \forall c \in C$$

*E a comutatividade do segundo diagrama implica que*

$$(\varepsilon_D \circ f)(c) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) \ , \forall c \in C.$$

**Definição 1.26.** *Seja $C$ uma coálgebra. Um $k$-subespaço vetorial $D \subseteq C$ é dito uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

**Observação 1.27.** *Se $D$ é como na definição acima, $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ é uma coálgebra.*

**Definição 1.28.** *Seja $(C, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra e $I$ um k-subespaço vetorial de $C$. Dizemos que:*

*(i) $I$ é um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (respectivamente $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$);*

*(ii) $I$ é um coideal se $\Delta(I) \subseteq (I \otimes C + C \otimes I)$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$.*

**Exemplo 1.29** (I é coideal, mas I não é coideal à esquerda nem à direita)**.** *Considere o anel de polinômios $k[x]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dados por:*

$$\begin{array}{ccc} \Delta(x^n) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n & , & \varepsilon(x^n) = 0, \text{ para } n \geq 1 \\ \Delta(1) = 1 \otimes 1 & e & \varepsilon(1) = 1. \end{array}$$

*Tome $I = kx$ o k-subespaço vetorial de $k[x]$ gerado por $x$. Assim, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \in (I \otimes k[x] + k[x] \otimes I)$ e $\varepsilon(x) = 0$, logo $I$ é um coideal.*

*Agora, suponha que $I$ seja um coideal à esquerda, isto é, $\Delta(x) \in k[x] \otimes I$, assim temos que existem $c_i \in k[x]$ e $\alpha_i x \in I$ de modo que $\Delta(x) = \sum c_i \otimes \alpha_i x$. Mas*

$$\begin{array}{rcl} x & = & (\varphi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(x) \\ & = & (\varphi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon)(\sum c_i \otimes \alpha_i x)) \\ & = & \sum c_i \varepsilon(\alpha_i x) \\ & = & \sum c_i \alpha_i \varepsilon(x) \\ & = & 0, \end{array}$$

*O que é um absurdo! Logo, $I$ não é um coideal è esquerda. Analogamente, mostramos que $I$ não é um coideal à direita.*

**Proposição 1.30.** *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então*

*i $Im(f) = f(C)$ é uma subcoálgebra de $D$.*

*ii $ker(f)$ é um coideal de $C$.*

*Demonstração.* $(i)$ Devemos mostrar que $\Delta_D(f(C)) \subseteq f(C) \otimes f(C)$. Como $f$ é morfismo de coálgebras, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D. \end{tikzcd}$$

Logo, dado $c \in C$,

$$\Delta_D(f(c)) = (f \otimes f)(\Delta_C(c)) \in (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C).$$

Portanto, $f(C)$ é subcoálgebra de $D$.

$(ii)$ Vamos mostrar $\Delta_C(\ker(f)) \subseteq (\ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f))$ e $\varepsilon_C(ker(f)) = \{0\}$. Temos:

$(\Delta_D \circ f)(\ker(f)) = 0$ e como $f$ é morfismo, $(f \otimes f) \circ \Delta_C(\ker(f)) = 0$. Logo, $\Delta_C(\ker(f)) \subseteq \ker(f \otimes f)$, e pelo Lema 1.14, segue que, $\Delta_C(\ker(f)) \subseteq \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f)$.

Novamente, como $f$ é morfismo, $\varepsilon_C(ker(f)) = (\varepsilon_D \circ f)(ker(f)) = \{0\}$. Portanto, $ker(f)$ é um coideal. $\square$

**Proposição 1.31.** *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas coálgebras, então $C \otimes D$ também é uma coálgebra.*

*Demonstração.* Como $C$ e $D$ são coálgebras, em particular, $C$ e $D$ são espaços vetoriais. Assim, temos $C \otimes D$ é um espaço vetorial. Agora, defina

$$\Delta_{C\otimes D}: \ C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D \quad \text{e} \quad \varepsilon_{C\otimes D}: \ C \otimes D \longrightarrow k,$$

em que $\Delta_{C\otimes D} = (I_C \otimes \tau \otimes I_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$, $\varepsilon_{C\otimes D} = \phi \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$. $\tau$ é a aplicação twist e $\phi : k \otimes k \to k$ é o isomorfismo canônico. Note que $\Delta_{C\otimes D}$ e $\varepsilon_{C\otimes D}$ são aplicações k-lineares pois são a composição de aplicações k-lineares.

Vamos mostrar a coassociatividade. Sejam $c \in C$ e $d \in D$, então:

$$\begin{aligned}((\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) &= (\Delta_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D})(\sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \sum c_{(1)(1)} \otimes d_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes d_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ &= \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes d_{(3)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) &= (I_{C\otimes D} \otimes \Delta_{C\otimes D})(\sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes d_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \otimes d_{(2)(2)} \\ &= \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes d_{(3)}.\end{aligned}$$

Agora, mostremos a comutatividade do segundo diagrama:

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1} \circ (\varepsilon_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D}) \circ \Delta_{C\otimes D})(c \otimes d) &= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon_{C\otimes D} \otimes I_{C\otimes D}))(\sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \varphi^{-1}(\sum \varepsilon_{C\otimes D}(c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \varphi^{-1}(\sum \varepsilon_C(c_{(1)})\varepsilon_D(d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \sum \varepsilon_C(c_{(1)})\varepsilon_D(d_{(1)})(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \sum \varepsilon_C(c_{(1)})c_{(2)} \otimes \sum \varepsilon_D(d_{(1)})d_{(2)} \\ &= c \otimes d\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se a outra igualdade. Logo, $C \otimes D$ é uma coálgebra. □

**Teorema 1.32.** *Sejam $C$ uma coálgebra, $I$ um coideal e $\pi : C \to C/I$ a projeção canônica de espaços vetoriais, então:*

*(i) Existe uma única estrutura $C/I$, chamada de coálgebra quociente, tal que $\pi$ é um morfismo de coálgebras;*

*(ii) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras com $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de coálgebras $\overline{f} : C/I \to D$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

*Demonstração.* (i) Como $I$ é um coideal, então $\Delta(I) \subseteq (I \otimes C + C \otimes I)$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$. Assim, $((\pi\otimes\pi)\circ\Delta)(I) \subseteq (\pi\otimes\pi)(I\otimes C + C\otimes I)) = \{\overline{0}\otimes\overline{0}\}$. Logo, $I \subseteq ker((\pi\otimes\pi)\circ\Delta)$, desse modo, podemos definir de maneira única $\overline{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que $\overline{\Delta} = (\pi \otimes \pi)\Delta$.

Note que $\overline{\Delta}$ é k-linear, pois é composição de funções k-lineares. Assim, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, "\overline{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\pi\otimes\pi"'] & C/I \otimes C/I \end{tikzcd}$$

Se $c \in C$ então $\pi(c) = \overline{c}$ e

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\overline{c}) &= ((\pi \otimes \pi) \circ \Delta)(c) \\ &= (\pi \otimes \pi)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\ &= \sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)}. \end{aligned}$$

Agora, mostremos a coassociatividade:

$$\begin{aligned} ((\overline{\Delta} \otimes I) \circ \overline{\Delta})(\overline{c}) &= (\overline{\Delta} \otimes I)(\sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)}) \\ &= \sum \overline{c}_{(1)(1)} \otimes \overline{c}_{(1)(2)} \otimes \overline{c}_{(2)} \\ &= \sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)} \otimes \overline{c}_{(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((I \otimes \overline{\Delta}) \circ \overline{\Delta})(\overline{c}) &= (I \otimes \overline{\Delta})(\sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)}) \\ &= \sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)(1)} \otimes \overline{c}_{(2)(2)} \\ &= \sum \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)} \otimes \overline{c}_{(3)} \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta.

Agora, como $\varepsilon(I) = \{0\}$, segue que $I \subseteq \ker(\varepsilon)$ e então podemos definir $\overline{\varepsilon} : C/I \to k$ tal que $\overline{\varepsilon} \circ \pi = \varepsilon$ (note que $\overline{\varepsilon}$ é linear pois é composição de aplicações lineares), isto é, dado $c \in C$, temos $\overline{\varepsilon}(\pi(c)) = \overline{\varepsilon}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$. Logo, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C/I \arrow[dl, "\overline{\varepsilon}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Dos diagramas acima, temos que $\pi$ é um morfismo de coálgebras. Resta mostrar a comutatividade do segundo diagrama da definição de coálgebras. Seja $c \in C$ temos

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ (\overline{\varepsilon} \otimes I_{C/I}) \circ \overline{\Delta})(\overline{c}) &= \sum \overline{\varepsilon}(\overline{c}_{(1)})\overline{c}_{(2)} \\
&= \sum \varepsilon(c_{(1)})\pi(c_{(2)}) \\
&= \pi(\sum \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}) \\
&= \pi(c) \\
&= \overline{c}
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se a outra igualdade. Logo o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
& C/I \arrow[dd, "\overline{\Delta}"] & \\
k \otimes C/I \arrow[ur, "\varphi^{-1}"] & & C/I \otimes k \arrow[ul, "\psi^{-1}"'] \\
& C/I \otimes C/I \arrow[ul, "\overline{\varepsilon} \otimes I_{C/I}"] \arrow[ur, "I_{C/I} \otimes \overline{\varepsilon}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Portanto, $(C/I, \overline{\Delta}, \overline{\varepsilon})$ é uma coálgebra.

$(ii)$ Como $I \subseteq ker(f)$, então $f(I) = \{0\}$. Assim, podemos definir de maneira única um morfismo k-linear $\overline{f} : C/I \to D$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$, com isso, dado $c \in C$, temos $\overline{f}(\overline{c}) = f(c)$. Mostremos que $\Delta_D \circ \overline{f} = (\overline{f} \otimes \overline{f}) \circ \overline{\Delta}$ e $\varepsilon_D \circ \overline{f} = \overline{\varepsilon}$. Seja $\overline{c} \in C/I$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta_D \circ \overline{f})(\overline{c}) &= \Delta_D(\overline{f}(\overline{c})) \\
&= \Delta_D(f(c)) \\
&= \sum f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} \\
&= \sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \\
&= \sum \overline{f}(\overline{c_{(1)}}) \otimes \overline{f}(\overline{c_{(2)}}) \\
&= (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{\Delta}(\overline{c})))
\end{aligned}$$

e

$$(\varepsilon_D \circ \overline{f})(\overline{c}) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) = \overline{\varepsilon}(\overline{c}).$$

Portanto, $\overline{f}$ é um morfismo de coálgebras. $\square$

## 1.3 A (Co)álgebra Dual

Nesta seção iremos construir a álgebra dual de uma coálgebra dada e, no caso em que uma álgebra possuir dimensão finita, construiremos a coálgebra dual desta álgebra. Dado um k-espaço vetorial $V$, denotaremos por $V^* = Hom(V, k)$ o espaço de todas as transformações lineares de $V$ em $k$.

O próximo lema tem participação importante para apresentar a estrutura de coálgebra dual a partir de uma álgebra de dimensão finita. A demonstração do lema se encontra em [5] p16, lema 1.3.2.

**Lema 1.33.** *Sejam $k$ um corpo, $M, N$ e $V$ k-espaços vetoriais e aplicações lineares*

$$\Phi : M^* \otimes V \to Hom(M, V),$$

$$\Phi' : Hom(M, N^*) \to (M \otimes N)^* \text{ e}$$

$$\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$$

*definidas por*

$$\Phi(f \otimes v)(m) = f(m)v \text{ para } f \in M^*, v \in V, m \in M,$$

$$\Phi'(g)(m \otimes n) = g(m)(n) \text{ para } g \in Hom(M, N^*), m \in M, n \in N \text{ e}$$

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n) \text{ para } f \in M^*, g \in N^*, m \in M, n \in N.$$

*Então:*

*(i) $\Phi$ é injetora. Se, além disso, $V$ tem dimensão finita, então $\Phi$ é um isomorfismo.*

*(ii) $\Phi'$ é um isomorfismo.*

*(iii) $\rho$ é injetora. Se, além disso, $N$ tem dimensão finita, então $\rho$ é um isomorfismo.*

**Corolário 1.34.** *Para quaisquer k-espaços vetoriais $M_1, \ldots, M_n$ a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \theta : & {M_1}^* \otimes \cdots \otimes {M_n}^* & \to & (M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)^* \\ & (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) & \mapsto & f_1(m_1) \cdots f_n(m_n) \end{array}$$

*é injetora. Além disso, se todos os espaços $M_i$ forem de dimensão finita, então $\theta$ é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Basta aplicar indução no item $(iii)$ do Lema 1.33. $\square$

Agora, sejam $X, Y$ dois k-espaços vetoriais e $v : X \to Y$ uma aplicação k-linear, denotaremos por $v^* : Y^* \to X^*$ o aplicação definida por $v^*(f) = f \circ v$ para todo $f \in Y^*$.

Agora, podemos construir a álgebra dual de uma coálgebra dada. Sendo assim, seja $(C, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra, definimos as aplicações $\mu : C^* \otimes C^* \to C^*$ como $\mu = \Delta^* \circ \rho$ onde $\rho$ é a aplicação definida no lema 1.33, e $\eta : k \to C^*$ como $\eta = \varepsilon^* \circ \Phi$, onde $\Phi : k \to k^*$ é o isomorfismo canônico.

**Proposição 1.35.** *$(C^*, \mu, \eta)$ é uma álgebra.*

*Demonstração.* Denote $\mu(f \otimes g)$ por $f * g$. Assim, da definição, temos

$$(f * g)(c) = (\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para $f, g \in C^*$ e $c \in C$. Com isso em mente, temos que, dados $f, g, h \in C^*$ e $c \in C$ então

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= (f * (g * h))(c). \end{aligned}$$

Logo, $*$ é associativa.

Observe que se $\alpha \in k$ e $c \in C$ temos $\eta(\alpha)(c) = \alpha\varepsilon(c)$. Para mostrar o comutatividade do segundo diagrama da definição de álgebra é equivalente a mostrar que $\eta(1)$ é a identidade da multiplicação definida em $\mu$, isto é, $\eta(1) * f = f * \eta(1) = f$ para todo $f \in C^*$.

De fato, dado $f \in C^*$, temos

$$\begin{aligned}
(\eta(1) * f)(c) &= \sum \eta(1)(c_1)f(c_2) \\
&= \sum(\varepsilon^* \circ \Phi)(1)(c_1)f(c_2) \\
&= \sum(\varepsilon^*(\Phi(1))(c_1)f(c_2) \\
&= \sum(\Phi(1) \circ \varepsilon)(c_1)f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) \\
&= f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

De modo similar mostramos a outra igualdade. □

A álgebra $C^*$ definida acima é chamada de álgebra dual da coálgebra $C$. A multiplicação de $C^*$ é chamada de convolução.

**Exemplo 1.36.** *Seja $S$ um subconjunto não vazio, e $kS$ a coálgebra como no Exemplo 1.19. Então a álgebra dual é $(kS)^* = Hom(kS, k)$ com multiplicação definida por*

$$\begin{aligned}
(f * g)(s) &= (\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g)(s) \\
&= \rho(f \otimes g)(\Delta(s)) \\
&= \rho(f \otimes g)(s \otimes s) \\
&= f(s)g(s)
\end{aligned}$$

*para $f, g \in (kS)^*$, $s \in S$.*

**Exemplo 1.37.** *Seja $H$ a coálgebra como no exemplo 1.21. Então a álgebra $H^*$ tem multiplicação definida por*

$$\begin{aligned}
(f * g)(c_m) = (\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g)(c_m) &= \rho(f \otimes g)(\Delta(c_m)) \\
&= \rho(f \otimes g)(\textstyle\sum_{p,q}[p + q = m]c_p \otimes c_q) \\
&= \textstyle\sum_{p,q}[p + q = m]f(c_p)g(c_q)
\end{aligned}$$

*para $f, g \in H^*$, $m \in \mathbb{N}$, e a unidade $u : k \to H^*$, $u(\alpha)(c_n) = \alpha\delta_{0,n}$ para $\alpha \in k$ e $n \in \mathbb{N}$.*

*$H^*$ é isomorfo a álgebra das séries formais $k[[x]]$ via o isomorfismo*

$$\Phi : H^* \to k[[x]]\,, \Phi(f) = \sum_{n \geq 0} f(c_n)X^n.$$

*De fato, tome* $f \in \ker(\Phi)$. *Assim,* $\Phi(f) = \sum_{n\geq 0} f(c_n)X^n = 0$, *logo* $f = 0$. *Agora, seja* $\sum_{n\geq 0} a_n X^n \in k[[x]]$. *Tome* $g : H \to k$ *dada por* $g(c_n) = a_n$, *então* $\Phi(g) = \sum_{n\geq 0} g(c_n)X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$.

Agora, será que com uma álgebra $(A, \mu, \eta)$ podemos introduzir uma estrutura canônica de coálgebra em $A^*$? Não podemos fazer uma construção similar com a que acabamos de fazer para álgebras pois não existe um isomorfismo canônico $(A \otimes A)^* \to A^* \otimes A^*$. Porém, se $A$ tem dimensão finita, o morfismo canônico $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ é bijetor e portanto, podemos usar $\rho^{-1}$.

Então, se $(A, \mu, \eta)$ tem dimensão finita, definimos $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ e $\varepsilon : A^* \to k$ por $\Delta = \rho^{-1}\mu$ e $\varepsilon = \psi\eta^*$, em que $\psi : k^* \to k$ é o isomorfismo canônico, $\psi(f) = f(1)$ para $f \in k^*$.

Observe que se $\Delta(f) = \sum g_i \otimes h_i$, onde $g_i, h_i \in A^*$, então $f(ab) = \sum g_i(a)h_i(b)$ para todo $a, b \in A$. Além disso, se $(g'_j, h'_j)_j$ é uma família finita de elementos em $A^*$ tal que $f(ab) = \sum g'_j(a)h'_j(b)$ para todo $a, b \in A$, então, pela injetividade de $\rho$, $\sum g_i \otimes h_i = \sum g'_j \otimes h'_j$.

Assim, podemos concluir que $\Delta(f) = \sum g_i \otimes h_i$ com a propriedade $f(ab) = \sum g_i(a)h_i(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.

**Proposição 1.38.** *Se* $(A, \mu, \eta)$ *é uma álgebra de dimensão finita, então* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra.*

*Demonstração.* Sejam $f \in A^*$ e $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. E tome $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{i,j} \otimes g''_{i,j}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$. Então

$$(\Delta \otimes I)\Delta(f) = \sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i \text{ e}$$

$$(I \otimes \Delta)\Delta(f) = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}.$$

Considere a aplicação $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ definida por $\theta(u \otimes v \otimes w)(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$ para $u, v, w \in A^*$ e $a, b, c \in A$. Note que $\theta$ é injetora pelo corolário 1.34. Mas

$$\begin{aligned}
\theta(\textstyle\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g'_{i,j}(a) g''_{i,j}(b) h_i(c) \\
&= \sum_i g_i(ab) h_i(c) \\
&= f(abc)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j})(a \otimes b \otimes c) &= \sum_{i,j} g_i(a) \otimes h'_{i,j}(b) \otimes h''_{i,j}(c) \\
&= \sum_i g_i(a) h_i(bc) \\
&= f(abc).
\end{aligned}$$

Assim, pela injetividade de $\theta$ obtemos que

$$\sum_{i,j} g'_{i,j} \otimes g''_{i,j} \otimes h_i = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{i,j} \otimes h''_{i,j}$$

isto é, $\Delta$ é coassociativo.

Agora,

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta)(f)(a) &= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I))(\Delta(f))(a) \\
&= (\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I))(\textstyle\sum g_i \otimes h_i)(a) \\
&= (\textstyle\sum \varepsilon(g_i) h_i)(a) \\
&= \textstyle\sum g(1) h(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Logo, $\sum_i \varepsilon(g_i) h_i = f$. Analogamente $\sum_i \varepsilon(h_i) g_i = f$ e, portanto, temos a propriedade da counidade. $\square$

**Proposição 1.39.** *Sejam $A, B$ álgebras e $C, D$ coálgebras temos:*

*(i) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras, então $f^* : D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras.*

*(ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras com dimensão finita, então $f^* : B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.*

*Demonstração.* $(i)$ Seja $d^*, e^* \in D^*$ e $c \in C$. Então

$$(f^*(d^* * e^*))(c) = (d^* * e^*)(f(c))$$
$$= \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2))$$
$$= \sum (f^*(d^*))(c_1)(f^*(e^*))(c_2)$$
$$= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c).$$

E então, $f^*(d^*e^*) = f^*(d^*)f^*(e^*)$. Além disso, $f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D f = \varepsilon_C$ e, portanto, $f^*$ é um morfismo de álgebras.

$(ii)$ Precisamos mostrar que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\
B^* \otimes B^* \arrow[r, "f^* \otimes f^*"'] & A^* \otimes A^*
\end{tikzcd}$$

Seja $b^* \in B^*$, podemos escrever $(\Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(b^* \circ f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ e $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_j p_j \otimes q_j$. Denote por $\rho_A : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ a injeção canônica, assim, para quaisquer $a, b \in A$, temos

$$\begin{aligned}
\rho_A((\Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*))(a \otimes b) &= (\rho_A \circ \Delta_{A^*} \circ f^*)(b^*)(a \otimes b) \\
&= (\mu_A{}^* \circ f^*)(b^*)(a \otimes b) \\
&= f^*(b^*)(\mu_A(a \otimes b)) \\
&= f^*(b^*)(ab) \\
&= b^*(f(ab))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_A((f^* \otimes f^*))\Delta_{B^*}(b^*)(a \otimes b) &= (f^* \otimes f^*) \circ \rho_B \circ \Delta_{B^*}(b^*)(a \otimes b) \\
&= \mu_B{}^*(b^*)((f \otimes f)(a \otimes b) \\
&= \mu_B{}^*(b^*)(f(a) \otimes f(b)) \\
&= b^*(f(a)f(b)) \\
&= b^*(f(ab)).
\end{aligned}$$

Pela injetividade de $\rho_A$, segue a comutatividade do primeiro diagrama. Além disso,

$$\varepsilon_{A^*}(f^*(b^*)) = f^*(b^*)(1_A) = b^*(f(1_A)) = b^*(1_B) = \varepsilon_{B^*}(b^*).$$

Assim, $f^*$ é um morfismo de coálgebras. $\square$

Dada uma álgebra de dimensão finita $A$, conseguimos introduzir uma estrutura de coálgebra no dual $A^*$. No caso em que $A$ tem dimensão infinita, também podemos associar uma estrutura de coálgebra, porém não usaremos o espaço dual inteiro $A^*$, mas um subespaço dele. A construção do dual finito de uma álgebra pode ser encontrada em [5], seção 1.5.

# 2 Álgebra de Hopf

Estamos quase chegando à definição de uma álgebra de Hopf. O objetivo deste capítulo é definir álgebra de Hopf e dar alguns exemplos e propriedades. Para isso nos restam duas coisas, definir biálgebra e aplicação antípoda. Feito isso, basta juntar essas duas definições para definir uma álgebra de Hopf, que é basicamente uma biálgebra com antípoda.

## 2.1 Biálgebras

Seja $H$ um k-espaço vetorial que possui, simultaneamente, estrutura de álgebra $(H, \mu, \eta)$ e coálgebra $(H, \Delta, \varepsilon)$. A próxima proposição mostra a compatibilidade entre essas duas estruturas. Lembrando que $H \otimes H$ possui tanto estrutura de álgebra quanto coálgebra.

**Proposição 2.1.** *São equivalentes:*

*(i) As aplicações $\mu$ e $\eta$ são morfismos de coálgebras.*

*(ii) As aplicações $\Delta$ e $\varepsilon$ são morfismos de álgebra.*

*Demonstração.* Temos que $\mu : H \otimes H \to H$ é um morfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\ H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "I\otimes\tau\otimes I"'] & & \\ H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mu\otimes\mu"'] & & H \otimes H \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\ k \otimes k \arrow[d, "\Phi"'] & \\ k \arrow[r, "I"'] & k \end{tikzcd}$$

em que $(I \otimes \tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta_{H\otimes H}$ é a comultiplicação de $H \otimes H$ e $\Phi \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon_{H\otimes H}$. A aplicação $\eta : k \to H$ é um morfismo de coálgebras se, e somente se, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "\eta\otimes\eta"'] & H \otimes H \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "I"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & k & \end{tikzcd} .$$

Note que $\Delta$ é um morfismo de álgebras se, e somente se, o primeiro e o terceiro diagramas comutam, e $\varepsilon$ é um morfismo de álgebras se, e somente se, o segundo e o quarto diagrama comutam. Portanto, segue a equivalência. $\square$

**Definição 2.2.** *Seja $H$ um $k$-espaço vetorial, dizemos que $H$ é uma biálgebra se $H$ possui estrutura de álgebra $(H, \mu, \eta)$ e coálgebra $(H, \Delta, \varepsilon)$ tal que $\Delta$ e $\varepsilon$ são morfismos de álgebras.*

**Observação 2.3.** *Com o fato de de* $\Delta$ *e* $\varepsilon$ *serem morfismos de álgebras, a notação de Sweedler nos possibilita escrever as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned} \sum (hg)_{(1)} \otimes (hg)_{(2)} &= \Delta(hg) \\ &= \Delta(h)\Delta(g) \\ &= (\sum h_{(1)} \otimes h_{(2)})(\sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\ &= \sum h_{(1)}g_{(1)} \otimes h_{(2)}g_{(2)} \end{aligned}$$

*e*

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g).$$

*Além disso,* $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ *e* $\varepsilon(1_H) = 1_k$.

**Observação 2.4.** *Diremos que uma biálgebra tem uma propriedade* $P$*, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade* $P$*. Por exemplo, podemos falar de biálgebras comutativas (se sua estrutura de álgebra for comutativa) ou biálgebra cocomutativas (se sua estrutura de coálgebra for cocomutativa).*

**Exemplo 2.5.** *Já vimos que o corpo* $k$ *possui estrutura de álgebra e de coálgebra dada por* $\Delta : k \to k \otimes k$ *o isomorfismo canônico, e* $\varepsilon : k \to k$ *a identidade em* $k$*. Assim, resta-nos verificar que* $\Delta$ *e* $\varepsilon$ *são morfismos de álgebra.*

*De fato, sejam* $\alpha, \lambda \in k$*, temos*

$$\Delta(\alpha\lambda) = \alpha\lambda \otimes 1 = (\alpha \otimes 1)(\lambda \otimes 1) = \Delta(\alpha)\Delta(\lambda),$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 = 1_{k\otimes k},$$

$$\varepsilon(\alpha\lambda) = \alpha\lambda = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\lambda)$$

*e*

$$\varepsilon(1) = 1.$$

*Portanto,* $k$ *é uma biálgebra.*

**Exemplo 2.6.** *Sejam* $G$ *um grupo e* $kG$ *a álgebra de grupo cuja estrutura de coálgebra é dada por* $\Delta(g) = g \otimes g$ *e* $\varepsilon(g) = 1$*. Verifiquemos que* $\Delta$ *e* $\varepsilon$ *são morfismos de álgebra.*

*Sejam* $g, h \in kG$ *(*$g, h$ *na base de* $kG$*), temos*

$$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$$

*e*

$$\varepsilon(gh) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$$

*Portanto, $kG$ é uma biálgebra.*

Outra possibilidade para construir novas biálgebras é considerar o dual de uma biálgebra de dimensão finita.

**Proposição 2.7.** *Seja $H$ uma biálgebra de dimensão finita. Então $H^*$ com a estrutura de álgebra dual da coálgebra $H$ e com a estrutura de coálgebra dual da álgebra $H$ é uma biálgebra, chamada biálgebra dual de $H$.*

*Demonstração.* Denotamos por $\Delta$ e $\varepsilon$ a comultiplicação e counidade de $H$, e por $\delta$ e $E$ a comultiplicação e a counidade de $H^*$. Lembramos que dado $f \in H^*$ temos $E(f) = f(1_H)$ e $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, em que $f(ab) = \sum f_1(a)f_2(b)$, para quaisquer $a, b \in H$.

Agora, mostremos que $\delta$ é morfismo de álgebra. De fato, sejam $f, g \in H^*$ com $\delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, $\delta(g) = \sum g_1 \otimes g_2$ e $a, b \in H$, temos

$$\begin{aligned} (f * g)(ab) &= \sum f((ab)_1)g((ab)_2) \\ &= \sum f(a_1b_1)g(a_2b_2) \\ &= \sum f_1(a_1)f_2(b_1)g_1(a_2)g_2(b_2) \\ &= \sum (f_1 * g_1)(a)(f_2 * g_2)(b). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta(f * g) &= \sum (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2) \\ &= \sum (f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2) \\ &= \sum \delta(f)\delta(g). \end{aligned}$$

Além disso, $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$ para quaisquer $a, b \in H$. Logo, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$, e assim, $\delta$ é um morfismo de álgebras.

Agora, mostremos que $E$ é morfismo de álgebras. Temos

$$E(f * g) = (f * g)(1_H) = f(1_H)g(1_H) = E(f)E(g)$$

ainda, $E(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1$. Portanto, $H^*$ é uma biálgebra. $\square$

**Definição 2.8.** *Sejam $H$ e $L$ duas $k$-biálgebras. Dizemos que uma aplicação $k$-linear $f : H \to L$ é um morfismo de $k$-biálgebras se $f$ é um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras.*

**Teorema 2.9.** *Sejam $H$ uma biálgebra, e $I$ um subespaço vetorial de $H$ que é um ideal (da estrutura de álgebra de $H$) e um coideal (da estrutura de coálgebra de $H$). Então as estruturas de álgebra quociente e coálgebra quociente $H/I$ define uma biálgebra, e a projeção canônica $p : H \to H/I$ é um morfismo de biálgebra.*

*Demonstração.* Da estrutura de coálgebra em $H/I$, temos que dado $h \in H$, $\overline{\Delta}(\overline{h}) = \sum \overline{h_1} \otimes \overline{h_2}$ e $\overline{\varepsilon}(\overline{h}) = \varepsilon(h)$. Verifiquemos que $\overline{\Delta}$ e $\overline{\varepsilon}$ são morfismos de álgebra.

De fato, sejam $h, g \in H$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\overline{hg}) &= \sum \overline{(hg)_1} \otimes \overline{(hg)_2} \\ &= \sum \overline{h_1 g_1} \otimes \overline{h_2 g_2} \\ &= \sum \overline{h_1}\,\overline{g_1} \otimes \overline{h_2}\,\overline{g_2} \\ &= \sum (\overline{h_1} \otimes \overline{h_2})(\overline{g_1} \otimes \overline{g_2}) \\ &= \overline{\Delta}(\overline{h})\overline{\Delta}(\overline{g}). \end{aligned}$$

Claramente, $\overline{\Delta} = \overline{1} \otimes \overline{1}$. Agora,

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}(\overline{hg}) &= \varepsilon(hg) \\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(g) \\ &= \overline{\varepsilon(\overline{h})}\,\overline{\varepsilon(\overline{g})}. \end{aligned}$$

E ainda, $\overline{\varepsilon}(\overline{1}) = \varepsilon(1) = 1$. Portanto, $H/I$ é uma biálgebra. $\square$

**Corolário 2.10.** *Seja $H$ uma biálgebra e $I$ um subespaço vetorial como no teorema acima. Se $H$ é comutativa (cocomutativa) então a biálgebra $H/I$ é comutativa (cocomutativa).*

## 2.2 Álgebra de Hopf

Nos resta um último detalhe: a aplicação antípoda. Para isso, façamos a seguinte construção.

Sejam $(C, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra, e $(A, \mu, \eta)$ uma álgebra. Definimos no conjunto $Hom(C, A)$ de todas as aplicações $k$-lineares de $C$ em $A$, uma estrutura de álgebra com multiplicação, denotada por $*$, dada por

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

para quaisuqer $f, g \in Hom(C, A)$ e para todo $c \in C$. Tal multiplicação definida acima é associativa pois, dados $f, g, h \in Hom(C, A)$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= \sum (f * (g * h))(c). \end{aligned}$$

A unidade da álgebra $Hom(C, A)$ é $\eta \circ \varepsilon \in Hom(C, A)$ pois

$$f * (\eta \circ \varepsilon)(c) = \sum f(c_1)\eta(\varepsilon(c_2)) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)1 = f(c).$$

Logo, $f * (\eta \circ \varepsilon) = f$ e analogamente, $(\eta \circ \varepsilon) * f = f$.

Note que no caso em que $A = k$, temos que $*$ é o produto de convolução definido na álgebra dual da coálgebra $C$. Por isso, no caso em que $A$ é um álgebra qualquer, também chamaremos $*$ de produto de convolução.

Agora, considere um caso especial da construção acima. Seja $H$ uma biálgebra. Denote por $H^c$ a estrutura de coálgebra de $H$ e por $H^a$ a estrutura de álgebra de $H$. Assim, podemos definir uma estrutura de álgebra em $Hom(H^c, H^a)$ como fizemos acima, em que a multiplicação é definida por $(f * g)(h) = \sum f(h_1)g(h_2)$ para quaisquer $f, g \in Hom(H^c, H^a)$ e para qualquer $h \in H$. Note que a unidade em $Hom(H^c, H^a)$ é $\eta \circ \varepsilon$ e também que a aplicação identidade $I : H \to H$ é um elemento de $Hom(H^c, H^a)$.

**Definição 2.11.** *Seja $H$ uma biálgebra. Uma aplicação linear $S : H \to H$ é chamada de antípoda da biálgebra $H$ se $S$ é a inversa da aplicação identidade $I : H \to H$ com respeito ao produto de convolução em $Hom(H^c, H^a)$.*

**Definição 2.12.** *Uma biálgebra $H$ é dita uma álgebra de Hopf se $H$ possui uma antípoda.*

**Observação 2.13.** *Da definição de álgebra de Hopf, podemos fazer as seguintes ob-*

*servações:*

(i) *Dada uma álgebra de Hopf, então a antípoda é única, pois é o inverso do elemento $I$ na álgebra $Hom(H^c, H^a)$.*

(ii) *Se $S : H \to H$ é uma antípoda, então podemos escrever $S * I = I * S = \eta \circ \varepsilon$, e assim*

$$(S * I)(h) = \sum S(h_1)I(h_2) = \sum S(h_1)h_2 = (\eta \circ \varepsilon)(h) = \eta(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H$$

*e*

$$(I * S)(h) = \sum I(h_1)S(h_2) = \sum S(h_1)h_2 = (\eta \circ \varepsilon)(h) = \eta(\varepsilon(h)) = \varepsilon(h)1_H$$

*Portanto, $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$.*

(iii) *Como uma álgebra de Hopf é uma biálgebra, diremos que uma álgebra de Hopf satisfaz uma propriedade $P$, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra satisfizer a propriedade $P$.*

**Definição 2.14.** *Sejam $H$ e $B$ duas álgebras de Hopf. Uma aplicação $f : H \to B$ é chamada um morfismo de álgebras de Hopf se é um morfismo de biálgebras.*

Na definição de um morfismo de álgebras de Hopf, não pedimos nada a respeito da antípoda. Assim, poderíamos nos perguntar se dado um morfismo de álgebras de Hopf, tal morfismo preserva a antípoda. De fato isso acontece e a próxima proposição nos mostra isso.

**Proposição 2.15.** *Sejam $H$ e $B$ duas álgebras de Hopf com antípodas $S_H$ e $S_B$. Se $f : H \to B$ é um morfismo de álgebras de Hopf, então $S_B \circ f = f \circ S_H$.*

*Demonstração.* Considere a álgebra $Hom(H, B)$ com o produto de convolução e os elementos $S_B \circ f$ e $f \circ S_H$ desta álgebra. Mostremos que ambos os elementos são invertíveis e têm a mesma inversa $f$, e daí teremos $S_B \circ f = f \circ S_H$. De fato,

$$\begin{aligned}((S_B \circ f) * f)(h) &= \sum (S_B \circ f)(h_1) f(h_2) \\ &= \sum S_B(f(h_1)) f(h_2) \\ &= \sum S_B(f(h)_1) f(h)_2 \\ &= \sum \varepsilon_B(f(h)) 1_B \\ &= \sum \varepsilon_H(h) 1_B.\end{aligned}$$

Logo, $S_B \circ f$ é inversa a esquerda de $f$. Também

$$\begin{aligned}(f * (f \circ S_H))(h) &= \sum f(h_1)(f \circ S_H)(h_2) \\ &= \sum f(h_1) f(S_H(h_2)) \\ &= f(\sum h_1 S_H(h_2)) \\ &= f(\varepsilon_H(h) 1_H) \\ &= \varepsilon_H(h) 1_B.\end{aligned}$$

Assim, $f \circ S_H$ é inversa a direita de $f$. Segue que $f$ é invertível no produto de convolução e a inversa à esquerda e à direita são iguais. $\square$

# 3 Geometria Algébrica

## 3.1 Introdução

Fixe $k$ um corpo algebricamente fechado. Definimos $n$-espaço afim sobre $k$ como o conjunto de todas as $n$-uplas com elementos de $k$, e denotaremos por $\mathbb{A}_k^n$ ou simplesmente $\mathbb{A}^n$. Os elementos $P \in \mathbb{A}^n$ serão chamados de pontos, e se $P = (a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in k$, então chamaremos $a_i$ das coordenadas de $P$.

Seja $k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios com $n$ variáveis sobre $k$. Interpretaremos elementos de $k[x_1, \ldots, x_n]$ como funções do $n$-espaço afim para $k$, definindo $f(P) = f(a_1, \ldots, a_n)$, em que $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ e $P \in \mathbb{A}^n$. Assim, se $f \in A$ é um polinômio, podemos falar do conjunto dos zeros de $f$, isto é, $Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n; f(P) = 0\}$. Mais geralmente, se $T$ é qualquer subconjunto de $k[x_1, \ldots, x_n]$, definimos o conjunto dos zeros de $T$ como os zeros comuns de todos os elementos de $T$,ou seja,

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n; f(P) = 0, \forall f \in T\}$$

É fácil ver que se $\langle T \rangle$ é o ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ gerado por $T$, então $Z(T) = Z(\langle T \rangle)$.

**Definição 3.1.** *Um subconjunto $Y$ de $\mathbb{A}^n$ é dito um conjunto algébrico se existe um subconjunto $T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $Y = Z(T)$.*

**Proposição 3.2.** *Se $k$ é um corpo algebricamente fechado, então $k$ é infinito.*

*Demonstração.* Suponha $k$ finito, digamos $k = \{a_0, \ldots, a_n\}$, em que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Agora, considere $p(x) = (x - a_0) \cdots (x - a_n) + 1$. Claramente, $p(x)$ é não constante e não tem raízes em $k$. Uma contradição com o fato de que $k$ é algebricamente fechado. $\square$

## 3.2 Topologia de Zariski

A próxima proposição nos permitirá introduzir uma topologia no $n$-espaço afim $\mathbb{A}^n$.

**Proposição 3.3.** *A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A intersecção de qualquer família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. O conjunto vazio e o espaço todo são conjuntos algébricos.*

*Demonstração.* Se $Y_1 = Z(T_1)$ e $Y_2 = Z(T_2)$, então $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1T_2)$, em que $T_1T_2$ é o conjunto de todos os produtos de um elemento de $T_1$ por um elemento de $T_2$. De fato, se $P \in Y_1 \cup Y_2$, então ou $P \in Y_1$ ou $P \in Y_2$, logo, $P$ é zero de todo polinômio em $T_1T_2$. Por outro lado, se $P \in Z(T_1T_2)$, e suponha $P \notin Y_1$, isto é, existe um polinômio $f \in T_1$ tal que $f(P) \neq 0$. Agora, dado qualquer $g \in T_2$ , temos $(fg)(P) = 0$, e assim, $g(P) = 0$, portanto, $P \in Y_2$.

Se $Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ é uma família qualquer de conjuntos algébricos, então é fácil ver que $\cap Y_\alpha = Z(\cup T_\alpha)$.

Por fim, $\emptyset = Z(1)$ e $\mathbb{A}^n = Z(0)$. $\square$

**Definição 3.4.** *Definimos a topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n$ tomando os conjuntos abertos como o complementar de conjuntos algébricos. Isto é uma topologia, pois, segundo a proposição acima, a intersecção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto, e a união de qualquer família de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Além disso, o conjunto vazio e o espaço todo são abertos.*

**Exemplo 3.5** (Conjuntos Algébricos na reta afim $\mathbb{A}^{\mathbf{1}}$). *Já sabemos que todo ideal em $k[x]$ é principal, isto é, todo ideal de $k[x]$ é gerado por um único elemento. Assim, todo conjunto algébrico é o conjunto dos zeros de um único polinômio. Como $k$ é algebricamente fechado, todo polinômio não nulo $f(x)$ pode ser escrito como $f(x) = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ com $c, a_1, \ldots, a_n \in k$. Logo, $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Com isso, podemos concluir que os conjuntos algébricos de $\mathbb{A}^1$ são apenas os subconjuntos finitos (incluindo o conjunto vazio) e o espaço todo. Em vista a Proposição 3.2, note que, em particular, esta topologia não é Hausdorff.*

**Exemplo 3.6.** *$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{A}^2$ pode ser considerado um conjunto algébrico em que $\mathbb{S}^1 = Z(x^2 + y^2 - 1)$. Da mesma forma podemos ver $\mathbb{S}^2$ como conjuntos algébrico de $\mathbb{A}^3$.*

**Definição 3.7.** *Um subconjunto não-vazio $Y$ de um espaço topológico $X$ é dito irredutível se ele não pode expresso como união de dois subconjuntos próprios $Y = Y_1 \cup Y_2$, em que cada um deles é fechado em $Y$. O conjunto vazio não é considerado irredutível.*

**Definição 3.8.** *Uma variedade algébrica afim (ou simplesmente uma variedade afim) é um conjunto fechado irredutível de $\mathbb{A}^n$ (com a topologia induzida).*

**Exemplo 3.9.** *Pela Proposição 3.2, $\mathbb{A}^1$ é irredutível, pois seus subconjuntos fechados próprios são conjuntos finitos.*

## 3.3 Teorema dos Zeros de Hilbert

Agora, vamos explorar a relação entre subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ e ideais de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Para isso, dado um subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, definimos o ideal de $Y$ por

$$I(Y) = \{f \in A; f(P) = 0, \forall P \in Y\}$$

O próximo teorema, conhecido como Teorema dos Zeros de Hilbert, tem papel importante para demonstração de alguns resultados. Daremos três equivalências para este teorema para um corpo algebricamente fechado e a demonstração pode ser encontrada em [2], seção 8.4.

**Teorema 3.10.** *Sejam $k$ um corpo e $n$ um inteiro positivo, são equivalentes:*

*(i)* *Os ideais maximais de $k[x_1, \ldots, x_n]$ são da forma $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$, $a_1, \ldots, a_n \in k$.*

*(ii)* *Se $I$ é um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $Z(I) = \emptyset$, então $I = k[x_1, \ldots, x_n]$. Equivalentemente, se $I$ é um ideal próprio, então $Z(I) \neq \emptyset$.*

*(iii)* *Se $I$ é um ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então $I(Z(I)) = \sqrt{I}$. Em que $\sqrt{I}$ é o radical de $I$ definido por*

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n]\,;\, f^r \in I \text{ para algum inteiro positivo } r\}$$

*(iv) $k$ é algebricamente fechado.*

## 3.4 Ideais *vs* Conjuntos Algébricos

Começaremos esta seção com uma proposição que nos ajudará na demonstração de muitos resultados. Para simplificar, denotaremos $Z(I(Y)) = ZI(Y)$.

**Proposição 3.11.** *:*

*(i) Se $T_1 \subseteq T_2$ são subconjuntos de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$;*

*(ii) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, então $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$;*

*(iii) $T \subseteq IZ(T)$ e $Y \subseteq ZI(Y)$;*

*(iv) $ZIZ(T) = Z(T)$ e $IZI(Y) = I(Y)$;*

*(v) Para quaisquer dois subconjuntos $Y_1$, $Y_2$ de $\mathbb{A}^n$, temos $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.*

*Demonstração.* Os itens (i), (ii), (iii) e (iv) são imediatos. Vamos mostrar o item (v).

(v) Seja $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in Y_1 \cup Y_2$, em particular $f(y) = 0$ para todo $y \in Y_1$ e $f(z) = 0$ para todo $z \in Y_2$. Logo, $f \in I(Y_1)$ e $f \in I(Y_2)$, isto é, $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$

Por outro lado, dado $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$, temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in Y_1$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in Y_2$. Assim, para $z \in Y_1 \cup Y_2$, $z \in Y_1$ ou $z \in Y_2$, logo $f(z) = 0$, ou seja, $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$. □

**Lema 3.12.** *Sejam $A$ um anel comutativo, $I_1, \ldots, I_n$ ideais de $A$ e $R$ um ideal primo contendo $\cap_{i=1}^n I_i$. Então $R \supseteq I_i$ para algum $i$ e se $R = \cap_{i=1}^n I_i$, então $R = I_i$ para algum $i$.*

*Demonstração.* Suponha que $R \not\supseteq I_i$ para todo $i$, então para cada $i$ existe $x_i \in I_i$ tal que $x_i \notin R$. Assim,

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in \prod I_i \subseteq \cap I_i \subseteq R.$$

Mas como $R$ é ideal primo, temos que $\prod x_i \notin R$. Portanto, $R \supseteq I_i$ para algum $i$.

Agora, se $R = \cap I_i$, então $R \subseteq I_i$, logo $R = I_i$. $\square$

**Proposição 3.13.** *Seja $Y$ um conjunto algébrico de $\mathbb{A}^n$, então $Y$ é irredutível se, e somente se, $I(Y)$ é um ideal primo.*

Esta proposição nos dá uma nova caracterização para variedades afins e a sua demonstração pode ser encontrada em [6] item 1.4. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.14.** *Como o ideal nulo em $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal primo e $Z(0) = \mathbb{A}^n$, temos que $\mathbb{A}^n$ é irredutível.*

**Exemplo 3.15.** *Seja $f$ um polinômio irredutível em $k[x, y]$. Então o ideal gerado por $f$ em $k[x, y]$ é um ideal primo. Assim, $Y = Z(f)$ é irredutível e chamamos da curva afim definida pela equação $f(x, y) = 0$. Se $f$ tem grau $d$, dizemos que $Y$ é uma curva de grau $d$.*

**Exemplo 3.16.** *Mais geralmente, se $f$ é um polinômio irredutível em $k[x_1, \ldots, x_n]$, obtemos uma variedade afim $Y = Z(f)$, o qual chamamos de superfície se $n = 3$, ou uma hipersuperfície se $n > 3$.*

## 3.5 Morfismos

**Definição 3.17.** *Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico afim, definimos o anel de coordenadas afim $A(Y)$ de $Y$ por $\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)}$.*

**Observação 3.18.** *Se $Y$ é uma variedade afim, então $A(Y) = \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)}$ é um domínio de integridade, pois $I(Y)$ é um ideal primo.*

**Definição 3.19.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afins. Dizemos que uma função $\varphi : X \to Y$ é um morfismo se existem $\psi_1, \ldots, \psi_m \in A(X)$ tais que para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ temos que*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_m(x_1, \ldots, x_m)).$$

**Observação 3.20.** *Dada uma variedade afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$, morfismos $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$ são o mesmo que funções polinomiais em $X$ pois, pela definição, existe $\psi \in \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)}$ tal que $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$.*

**Definição 3.21.** *Uma $k$-álgebra comutativa $A$ é dita finitamente gerada quando existe um homomorfismo sobrejetor de $k$-álgebras $\varphi : k[x_1, \ldots, x_n] \to A$.*

**Observação 3.22.** *É possível mostrar que o funtor $X \mapsto A(X)$ induz uma equivalência categórica contravariante entre a categoria de variedades afins sobre $k$ e a categoria das álgebras finitamente geradas sobre $k$. Tal demonstração pode ser encontrada em [6] item 3.8.*

Sejam $X, Y$ variedades afins e $\Phi : X \to Y$ é um morfismo então, podemos definir o comorfismo $\Phi^* : A(Y) \to A(X)$ dado por $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ para $f \in A(Y)$. A próxima proposição mostra algumas propriedades destas aplicações.

A próxima proposição mostra algumas propriedades destas aplicações e a sua demonstração pode ser encontrada em [4] seção 6.6.

**Proposição 3.23.** *Sejam $X, Y, Z$ conjuntos algébricos, $\Phi : X \to Y$, $\psi : Z \to X$ morfismos de conjuntos algébricos e $\Phi^* : A(Y) \to A(X)$ o comorfismo de $\Phi$ então*

*(i)* $\Phi^*(f) \in A(X)$ *para* $f \in A(Y)$*;*

*(ii)* $\Phi^*$ *é um morfismo de álgebra.*

*(iii)* $(id)^* = id$

*(iv)* $(\Phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \Phi^*$

O próximo lema é importante para mostrar resultados no capítulo seguinte e sua demonstração pode ser encontrada em [6] Lema 4.2.

**Lema 3.24.** *Seja $f$ um polinômio irredutível de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Considere $Z(f)$, então $\mathbb{A}^n \setminus Z(f)$ é isomorfo a $Z(g) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ em que $g = x_{n+1}f - 1$. Em particular $\mathbb{A}^n \setminus Z(f)$ é uma variedade afim, e seu anel de coordenadas é $\frac{k[x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]}{\langle x_{n+1}f-1 \rangle}$.*

## 3.6 Produto de Variedades

Aqui, vamos definir o produto entre duas variedades e mostrar algumas propriedades.

Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afins. Então $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ com a topologia induzida é irredutível. A variedade afim $X \times Y$ é chamada do produto de $X$ e $Y$. De Fato, suponha $X = Z(T)$ e $Y = Z(U)$ para algum $T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ e para algum $U \subseteq k[y_1, \ldots, y_m]$, então $X \times Y = Z(T \cup U)$ vendo elementos de $T \cup U$ como elementos de $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$.

O resto desta seção será destinado a mostrar que $A(X \times Y) \cong A(X) \otimes_k A(Y)$. Para isso, precisaremos de alguns lemas:

**Lema 3.25.** *Seja $P$ um ideal primo de $k[x_1, \ldots, x_n]$, então*

$$P = \bigcap_{\substack{M \supseteq P \\ M \text{ ideal maximal}}} M.$$

*Demonstração.* Claramente, $P \subseteq \cap M$. Agora seja $q(x) \notin P$. Como $P$ é um ideal primo e pelo teorema dos zeros de Hilbert, temos que $I(Z(P)) = \sqrt{P} = P$. Assim, existe $x^0 \in Z(P)$ tal que $q(x^0) \neq 0$. Considere o ideal maximal $M = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)$. Logo, como $q(x^0) \neq 0$, $q(x) \notin M$. Além disso, note que $\{x^0\} = Z(M) \subseteq Z(P)$, logo $M \supseteq P$ pois ambos os ideais são radicais. Portanto, $q(x) \notin \cap M$. $\square$

**Lema 3.26.** *Seja $A$ uma $k$-álgebra finitamente gerada. Então $A \cong \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I}$, para algum ideal $I$. Além disso, se $A$ é um domínio de integridade, então $I$ é um ideal primo.*

*Demonstração.* Basta usar a definição e o primeiro teorema do isomorfismo e a segunda parte é trivial. $\square$

**Lema 3.27.** *Sejam $A$, $B$ e $C$ $k$-álgebras e sejam $\varphi : A \to C$, $\psi : B \to C$ morfismos de álgebras tal que $\varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a)$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ então*

$$\begin{array}{rccc} \varphi \boxtimes \psi : & A \otimes B & \to & C \\ & a \otimes b & \mapsto & \varphi(a)\psi(b) \end{array}$$

*é morfismo de $k$-álgebras.*

*Demonstração.* Vamos usar a propriedade universal do produto tensorial para mostrar que $\varphi \boxtimes \psi$ está bem definida. Considere

$$\begin{array}{rccc} \varphi \times \psi : & A \times B & \to & C \\ & (a,b) & \mapsto & \varphi(a)\psi(b) \end{array}$$

e note que, como $\varphi$ e $\psi$ são morfismos de álgebras, $\varphi \times \psi$ é bilinear. Assim existe única

$$\begin{array}{rccc} \varphi \boxtimes \psi : & A \otimes B & \to & C \\ & a \otimes b & \mapsto & \varphi(a)\psi(b) \end{array}$$

como queremos.

Agora, sejam $a, c \in A$ e $b, d \in B$ temos

$$\begin{aligned} \varphi \boxtimes \psi((a \otimes b)(c \otimes d)) &= \varphi \boxtimes \psi(ac \otimes bd) \\ &= \varphi(ac)\psi(bd) \\ &= \varphi(a)\varphi(c)\psi(b)\psi(d) \\ &= \varphi(a)\psi(b)\varphi(c)\psi(d) \\ &= \varphi \boxtimes \psi(a \otimes b)\varphi \boxtimes \psi(c \otimes d). \end{aligned}$$

Por fim, note que $\varphi \boxtimes \psi(1_A \otimes 1_B) = \varphi(1_A)\psi(1_B) = 1_C 1_C = 1_C$. □

**Lema 3.28.** *Existe um isomorfismo de álgebras*

$$k[x_1, \ldots, x_n] \otimes k[y_1, \ldots, y_m] \cong k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m].$$

*Demonstração.* Considere $\varphi : k[x_1, \ldots, x_n] \otimes k[y_1, \ldots, y_m] \to k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m]$ tal que $p(x) \otimes q(y) \mapsto p(x)q(y)$ que, pelo Lema 3.27, é morfismo de álgebras. Agora, tome $p(x) \otimes q(x) \in \ker(\varphi)$, então $p(x)q(x) = 0$ e como $k$ é algebricamente fechado, ou $p(x) = 0$ ou $q(x) = 0$. Suponha $h \in k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m]$, assim $h = p(x_1, \ldots, x_n)q(y_1, \ldots, y_m)$ em que $p(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ e $q(y_1, \ldots, y_m) \in k[y_1, \ldots, y_m]$. Portanto, $\varphi(p \otimes q) = pq = h$. □

**Lema 3.29.** *Sejam $A, B$ $k$-álgebras unitais, $I$ um ideal de $A$ e $J$ um ideal de $B$. Então*

$$\frac{A}{I} \otimes \frac{B}{J} \cong \frac{A \otimes B}{\langle I \otimes 1_B, 1_A \otimes J \rangle},$$

*em que $I \otimes 1 = \{i \otimes 1; i \in I\}$.*

*Demonstração.* Note que $\varphi : A \otimes B \to A/I \otimes B/J$ definida por $a \otimes b \mapsto (a+I) \otimes (b+J)$ é morfismo sobrejetor. Mostremos que $\ker(\varphi) = \langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle$.

De fato, claramente $\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle \subseteq ker(\varphi)$. Agora, defina

$$\begin{array}{rccc} f: & \dfrac{A}{I} \times \dfrac{B}{J} & \to & \dfrac{A \otimes B}{\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle} \\ & (a+I, b+J) & \mapsto & \overline{a \otimes b} \end{array}$$

Assim, $f$ está bem definida e é bilinear, logo, existe um homomorfismo sobrejetor

$$\psi : \frac{A}{I} \otimes \frac{B}{J} \to \frac{A \otimes B}{\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle}$$

Ou seja, a aplicação

$$\psi \circ \varphi : \frac{A \otimes B}{\ker(\varphi)} \to \frac{A \otimes B}{\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle}$$

que leva $\overline{a \otimes b}$ em $\overline{a \otimes b}$ está bem definida. Portanto, $\ker(\varphi) \subseteq \langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle$. □

**Definição 3.30.** *Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$, defina o fecho de $X$, $\overline{X}$, como a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém $X$.*

**Proposição 3.31.** *Se $Y$ um conjunto qualquer de $\mathbb{A}^n$, então $ZI(Y) = \overline{Y}$.*

*Demonstração.* Temos que $Y \subseteq ZI(Y)$, que é um subconjunto fechado. Assim,

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \supseteq Y \\ X fechado}} X \subseteq ZI(Y).$$

Por outro lado, seja $W$ um conjunto fechado que contém $Y$. Temos $W = Z(J)$, para algum ideal $J$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Logo, $W = Z(J) \supseteq Y$ e, portanto, $J \subseteq IZ(J) \subseteq I(Y)$. Logo, $W = Z(J) \supseteq ZI(Y)$. Assim, $ZI(Y) = \overline{Y}$. □

**Lema 3.32.** *Sejam $k$ um corpo algebricamente fechado e $A$ um $k$-álgebra finitamente gerada. Então todo ideal primo de $A$ é a intersecção dos ideais maximais que o contém.*

*Demonstração.* Basta aplicar os lemas 3.25 e 3.26. □

**Lema 3.33.** *Sejam $k$ um corpo algebricamente fechado e $A, B$ $k$-álgebras que são domínio de integridade. Então $A \otimes B$ é um domínio de integridade.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existam $r = \sum a_i \otimes b_i$ e $s = \sum c_j \otimes d_j$ não nulos tais que $rs = 0$. Considere $A' = \langle \{a_i\} \cup \{c_j\} \rangle_k$ e $B' = \langle \{b_i\} \cup \{d_j\} \rangle_k$, como $A$ e $B$ são k-álgebras finitamente geradas, temos $A'$ e $B'$ k-álgebras finitamente geradas. Assim, como $A' \otimes B' \subseteq A \otimes B$, basta resolver o problema em $A' \otimes B'$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\{a_i\}$ e $\{c_j\}$ LI.

**Afirmação 1.** *Para todo homomorfismo $\varphi : B' \to k$, temos* $\ker(\varphi) \supseteq \{b_i\}$ *ou* $\ker(\varphi) \supseteq \{d_j\}$.

De fato, considere

$$\begin{array}{rccc} I_A \otimes \varphi : & A' \otimes B' & \to & A' \\ & a \otimes b & \mapsto & \varphi(b)a \end{array}$$

e note que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (I_A \otimes \varphi)(rs) \\ & = & (I_A \otimes \varphi)(\sum_{ij} a_i c_j \otimes b_i d_j) \\ & = & \sum_{ij} \varphi(b_i d_j) a_i c_j \\ & = & (\sum_i \varphi(b_i) a_i)(\sum_j \varphi(d_j) c_j) \end{array}$$

Como $A'$ é domínio, $\sum_i \varphi(b_i) a_i = 0$ ou $\sum_j \varphi(d_j) c_j = 0$. Assim, $\varphi(b_i) = 0$ ou $\varphi(d_j) = 0$, pois $\{a_i\}$ e $\{c_j\}$ são LI, o que conclui a afirmação.

Agora, pelo teorema dos zeros de Hilbert, temos que $B'/m \cong k$ com $m$ maximal, logo o núcleo de $\varphi : B' \to B'/m$ é $m$, ou seja, todo ideal maximal de $B'$ é o núcleo de alguma $\varphi : B' \to k$. Neste caso, todo ideal maximal de $B'$ se encaixa em alguma família $P_1$ de todos os ideais maximais de $B'$ que contêm todos os $b_i$'s ou $P_2$ de todos os ideais maximais de $B'$ que contêm todos os $d_j$'s.

Assim, pelo lema 3.32,

$$\{0\} = \bigcap_{m \trianglelefteq B'} m = (\bigcap_{m \in P_1} m) \cap (\bigcap_{m \in P_2} m)$$

Denote por $I_1 = \bigcap_{m \in P_1} m$ e $I_2 = \bigcap_{m \in P_2} m$. Logo, como $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$, então $I_1 I_2 = \{0\}$. Como $\{0\}$ é primo, $I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$. Assim, $b_i = 0$ para todo $i$ ou $d_j = 0$ para todo $j$. Contradição! Logo $rs \neq 0$. □

**Lema 3.34.** *Sejam $X, Y$ conjuntos algébricos. Então:*

*(i)* $X \cap Y = Z(I(X) + I(Y))$*;*

*(ii)* $I(X \cap Y) = \sqrt{I(X) + I(Y)}$*.*

*Demonstração.* (i) " $\subseteq$ " Sejam $z \in X \cap Y$ e $p(x) \in I(X) + I(Y)$. Assim, $p(z) = 0$ e portanto $z \in Z(I(X) + I(Y)$.

" $\supseteq$ " Seja $z \in Z(I(X) + I(Y))$, então $z \in Z(I(X))$ e $z \in Z(I(Y))$, logo $z \in \overline{X}$ e $z \in \overline{Y}$. Assim, temos $z \in X \cap Y$.

(ii) Por (i), $X \cap Y = Z(I(X) + I(Y))$, aplicando $I$, temos $I(X \cap Y) = I(Z(I(X) + I(Y))$. Pelo teorema dos zeros de Hilbert, $I(X \cap Y) = \sqrt{I(X) + I(Y)}$. □

**Lema 3.35.** $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

*Demonstração.* A inclusão é óbvia, mostremos então que $\sqrt{I + J} \supseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

Seja $x \in \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$, então $x^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$ para algum $n \geq 1$. Assim, $x^n = r + s$ onde $r^m \in I$ e $s^p \in J$ para $m, p \geq 1$. Logo, $x^{n(m+p)} \in I + J$ e portanto $x \in \sqrt{I + J}$ □

Para simplificar as contas, denote por $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$, $k[Y] = k[y_1, \dots, y_m]$ e $k[X, Y] = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$.

**Lema 3.36.** *Se $I$ um ideal primo de $k[x_1, \dots, x_n]$ e $J$ um ideal primo de $k[y_1, \dots, y_m]$. Então*

$$\frac{k[X]}{I} \otimes \frac{k[Y]}{J} \cong \frac{k[X] \otimes k[Y]}{\langle I \otimes 1, 1 \otimes J \rangle} \cong \frac{k[X, Y]}{\sqrt{\langle I \rangle + \langle J \rangle}},$$

*em que $\langle I \rangle$ e $\langle J \rangle$ são os ideais gerados por $I$ e $J$ em $k[X, Y]$, respectivamente.*

*Demonstração.* O primeiro isomorfismo segue do Lema 3.29. Como $\frac{k[X]}{I}$ e $\frac{k[Y]}{J}$ são domínios de integridade, pelo Lema3.33, $\frac{k[X]}{I} \otimes \frac{k[Y]}{J}$ é domínio de integridade e, portanto, $\langle I \otimes 1, 1 \otimes J \rangle$ é ideal primo. Agora, considere o isomorfismo do Lema 3.28

$$\varphi : k[X] \otimes k[Y] \to k[X, Y]$$

Afirmamos que $\varphi$ manda o ideal $\langle I \otimes 1, 1 \otimes J \rangle$ em $\sqrt{\langle I \rangle + \langle J \rangle}$. De fato, claramente $\varphi(\langle I \otimes 1, 1 \otimes J \rangle) \subseteq \sqrt{\langle I \rangle + \langle J \rangle}$. Por outro lado, temos $\varphi^{-1}(I) \subseteq \langle I \otimes 1, 1 \otimes J \rangle$ e $\varphi^{-1}(J) \subseteq$

$\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle$. Assim, $\varphi^{-1}(\langle I\rangle + \langle J\rangle) \subseteq \langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle$ e, portanto, $\varphi^{-1}(\sqrt{\langle I\rangle + \langle J\rangle}) \subseteq \sqrt{\langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle} = \langle I \otimes 1, 1 \otimes J\rangle$. □

Agora, usando os lemas anteriores podemos mostrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.37.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afins então $A(X) \otimes A(Y) \cong A(X \times Y)$.*

*Demonstração.* Sejam $X$ e $Y$ variedades afins, considere os conjuntos $X' = X \times A^m$ e $Y = \mathbb{A}^n \times Y$. Note que $X' = Z(\langle I(X)\rangle)$ visto como ideal em $k[X, Y]$, logo $X'$ é conjunto algébrico e, da mesma forma, $Y'$ também é um conjunto algébrico. Agora, note que $X \times Y = X' \cap Y'$ e observe que

$$\begin{array}{rcl} A(X \times Y) & = & A(X' \cap Y') \\ & = & \dfrac{k[X,Y]}{I(X' \cap Y')} \\ & \overset{\text{Lema 3.34}}{=} & \dfrac{k[X,Y]}{\sqrt{I(X') + I(Y')}} \\ & = & \dfrac{k[X,Y]}{\sqrt{I(Z(\langle I(X)\rangle)) + I(Z(\langle I(Y)\rangle))}} \\ & \overset{\text{Teo 3.10}}{=} & \dfrac{k[X,Y]}{\sqrt{\sqrt{\langle I(X)\rangle} + \sqrt{\langle I(Y)\rangle}}} \\ & \overset{\text{Lema 3.35}}{=} & \dfrac{k[X,Y]}{\sqrt{\langle I(X)\rangle + \langle I(Y)\rangle}} \\ & \overset{\text{Lema 3.36}}{\cong} & \dfrac{K[X]}{I(X)} \otimes \dfrac{k[Y]}{I(Y)} \\ & = & A(X) \otimes A(Y). \end{array}$$

□

## 3.7 Grupos Algébricos Afins

**Definição 3.38.** *Seja $G$ uma variedade afim que admite uma estrutura de grupo. Se as aplicações*

$$\begin{array}{rcccccrcl} m: & G \times G & \to & G & \text{e} & s: & G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & xy & & & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

*são morfismos de variedades afins, então dizemos que $G$ é grupo algébrico afim ou simplesmente um grupo algébrico.*

**Definição 3.39.** *Sejam $G$, $H$ dois grupos algébricos. Uma aplicação $\varphi : G \to H$, dizemos que $\varphi$ é um morfismo de grupos algébricos se $\varphi$ é um morfismo de variedades afins e um homomorfismo de grupos.*

**Observação 3.40.** *Sejam $G$ um grupo algébrico afim e $H$ um subgrupo de $G$. Se $H$ é fechado então $H$ também é um grupo algébrico afim, neste caso dizemos que $H$ é um subgrupo algébrico afim.*

**Exemplo 3.41.** *Considere $G_a$ o grupo aditivo dado a partir de $k = \mathbb{A}^1$, isto é, $(k, +)$. Então $G_a$ é um grupo algébrico com morfismos $m(x, y) = x + y$ e $s(x) = -x$.*

*Demonstração.* Já vimos que $\mathbb{A}^1$ é uma variedade afim e admite a estrutura de grupo de forma natural a partir do corpo $k$, resta mostrar que $m$ e $s$ são morfismos de variedades afins. Mas para isso, basta notar que $m$ e $s$ são dados através de funções polinomiais de $\mathbb{A}^2$ para $\mathbb{A}^1$ pela Observação 3.20. Logo, $G_a$ é um grupo algébrico afim. $\square$

**Exemplo 3.42.** *Considere $G_m$ como o grupo multiplicativo dado a partir do conjunto $k \setminus \{0\}$ de $\mathbb{A}^1$, isto é, $(k\setminus, \cdot)$ com morfismos $m(x, y) = xy$ e $s(x) = x^{-1}$, então $G_m$ é um grupo algébrico afim.*

*Demonstração.* Note que $G_m$ pode ser visto como $\{x \in \mathbb{A}^1; x \neq 0\}$ logo, pela Lema 3.24, $G_m$ é uma variedade afim e seu anel de coordenadas é $A(G_m) = \frac{k[x,y]}{\langle xy-1\rangle}$.

Agora, note que $m(x, y) = xy \in A(G_m \times G_m)\frac{k[x,y]}{I(G_m \times G_m)}$ e, portanto, $m$ é morfismo de variedades afins. Para mostrar que $s$ é morfismo de variedades, temos

$$A(G_m) = \frac{k[x, y]}{\langle xy - 1\rangle},$$

logo, $s(x) = x^{-1} \in A(G_m)$ representado pelo morfismo $x \mapsto y$. Portanto, $s$ é morfismo de variedades e $G_m$ é grupo algébrico afim. $\square$

**Exemplo 3.43.** *Sejam $n \geq 1$ e $M_n(k)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com coeficientes em $k$. Denote o subconjunto de $M_n(k)$ de todas as matrizes $n \times n$ com determinante diferente de zero por $GL_n = GL_n(k) = \{A \in M_n(k); det(A) \neq 0\}$, então*

*$GL_n$ é um grupo algébrico afim com a multiplicação usual de matrizes e a inversa dada pela matriz dos cofatores, isto é, morfismos dados por*

$$m((a_{ij})_{ij}, (b_{ij})_{ij}) = (\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj})_{ij}$$

*e dado $A \in GL_n(k)$*

$$s(A) = det(A)^{-1}A_{ji}$$

*em que $A_{ij}$ é a matriz dos cofatores e $A_{ji}$ a transposta da matriz dos cofatores de $A$.*

*Demonstração.* $M_n(k)$ pode ser identificado pelo espaço afim $\mathbb{A}^{n^2}$ em que cada coordenada de $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ representa uma entrada da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, $GL_n$ pode ser escrito como $\{P \in \mathbb{A}^{n^2}; det(P) \neq 0\}$ em que $det$ é um polinômio de $k[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ tal que $det(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ é o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Logo, pelo Lema 3.24, $GL_n$ é uma variedade afim com anel de coordenadas $A(GL_n) = \frac{k[x_{11},\ldots,x_{nn},y]}{\langle det \cdot y - 1\rangle}$.

Da mesma maneira que fizemos no exemplo anterior, $m \in A(GL_n \times GL_n)$ e $s \in A(GL_n) = \frac{k[x_{11},\ldots,x_{nn},y]}{\langle det \cdot y - 1\rangle}$ representada pelo morfismo $(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \mapsto A_{ji} \cdot y$, temos que $m$ e $s$ são morfismos de variedades. Portanto, $GL_n$ é um grupo algébrico afim. $\square$

**Exemplo 3.44.** *Seja $n \geq 1$. O conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com determinante igual 1 com coeficientes em $k$, denotado por $SL_n(k) = SL_n$, é um subgrupo algébrico afim de $GL_n$.*

*Demonstração.* De fato, temos que $SL_n$ é um subgrupo de $GL_n$ que é fechado pois é definido pelos zeros do polinômio nos coeficientes das matrizes $det - 1$. $\square$

**Exemplo 3.45.** *Assim como no exemplo anterior, temos que o conjunto* $D_n$ *das matrizes diagonais* $n \times n$ *com determinante diferente de zero, o conjunto* $T_n$ *das matrizes triangulares superiores com determinante diferente de zero, o conjunto* $U_n$ *das matrizes triangulares inferiores com determinante diferente de zero, são todos subgrupos fechados de* $GL_n$*, logo, grupos algébricos afins.*

# 4 Grupos Algébricos e Álgebras de Hopf Comutativas

Nos capítulos 1 e 2, definimos algumas estruturas com o intuito de definir a estrutura de álgebra de Hopf e no terceiro capítulo desenvolvemos matemática suficiente para definirmos uma variedade afim e seus morfismos. Neste capítulo, vamos conectar essas duas estruturas que aparentemente não possuem nada em comum.

Vimos no capítulo anterior que dado um morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$, podemos associar o seu comorfismo $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$, e é isso que utilizaremos para, a partir de um grupo algébrico afim, associar uma álgebra de Hopf.

Dado um grupo algébrico afim $G$ com morfismos $m : G \times G \to G$ e $s : G \to G$, vamos mostrar que $A(G)$ possui estrutura de álgebra de Hopf. Para isso, vamos associar os comorfismos de $m$ e $s$, a fim de definir a comultiplicação e a antípoda. Um problema que possivelmente nos atrapalharia é que quando associamos o comorfismo de $m$, obtemos

$$m : G \times G \to G \Rightarrow m^* : A(G) \to A(G \times G).$$

E para definir a comultiplicação precisamos de um morfismo que vá de $A(G)$ para o produto tensorial $A(G) \otimes A(G)$. Porém, também vimos no capítulo anterior, que dadas duas variedades afins $X$ e $Y$ $A(X \times Y) \cong A(X) \otimes A(Y)$, um dos principais resultados para dar continuidade a esta seção.

**Teorema 4.1.** *Seja $G$ um grupo algébrico afim, então $A(G)$ é uma álgebra de Hopf.*

*Demonstração.* Já sabemos que $A(G)$ é uma álgebra.

**Afirmação 2.** *$A(G)$ é uma coálgebra.*

*Demonstração.* Podemos representar um grupo como sendo um conjunto $G$ com aplicações $m : G \times G \to G$ e $u : \{1_G\} \to G$ tais que os diagramas a seguir comutam

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "I\times m"] \arrow[d, "m\times I"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}
\quad e \quad
\begin{tikzcd}
& G\times G \arrow[dd, "m"] & \\
\{1_G\}\times G \arrow[ur, "u\times I"] & & G\times\{1_G\}. \arrow[ul, "I\times u"'] \\
& G \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama dá a associatividade da operação do grupo e o segundo diagrama da o elemento neutro à esquerda e à direita. Ainda é necessária mais uma aplicação e um diagrama comutativo para denotar inverso de cada elemento, mas este usaremos mais tarde.

Agora, associando os respectivos comorfismos nos diagramas acima obtemos

$$\begin{tikzcd}
A(G\times G\times G) & A(G\times G) \arrow[l, "(I\times m)^*"'] \\
A(G\times G) \arrow[u, "(m\times I)^*"] & A(G) \arrow[l, "m^*"] \arrow[u, "m^*"']
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
& A(G\times G) \arrow[dl, "(u\times I)^*"'] \arrow[dr, "(I\times u)^*"] & \\
A(\{1_G\}\times G) \arrow[dr] & & A(G\times\{1_G\}). \arrow[dl] \\
& A(G) \arrow[uu, "m^*"] &
\end{tikzcd}$$

Que são diagramas comutativos pela Proposição 3.23. Agora, denotando $\Delta = m^*$ e $\varepsilon = u^*$ temos $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$ (note que $\Delta(f) : G \times G \to k$) e $\varepsilon(f) = f(1_G)$ para

$f \in A(G)$ e $x, y \in G$. Ainda, como $A(G \times G) \cong A(G) \otimes A(G)$, temos que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A(G) \otimes A(G) \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
A(G) \otimes A(G) \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & A(G) \otimes A(G) \otimes A(G)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & A(G) \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes A(G) \arrow[ur] & & A(G) \otimes k \arrow[ul] \\
 & A(G) \otimes A(G) \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

comutam, e estes são exatamente os diagramas da coassociatividade e counidade. Assim, $A(G)$ é uma coálgebra. $\square$

**Afirmação 3.** *$\Delta$ e $\varepsilon$ são morfismos de álgebras.*

*Demonstração.* Para mostrar que $\Delta$ é morfismo de álgebras devemos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A(G) \otimes A(G) \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "\mu_{A(G)}"'] & A(G) \otimes A(G) \otimes A(G) \otimes A(G) \arrow[d, "\mu_{A(G)\otimes A(G)}"] \\
A(G) \arrow[r, "\Delta"'] & A(G) \otimes A(G)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
A(G) \arrow[rr, "\Delta"] & & A(G) \otimes A(G) \\
 & k \arrow[ul, "\eta_{A(G)}"] \arrow[ur, "\eta_{A(G)\otimes A(G)}"'] &
\end{tikzcd}$$

comutam.

Primeiramente, dado $\sum f_i \otimes g_i \in A(G) \otimes A(G)$, temos

$$\begin{aligned}(\Delta \circ \mu_{A(G)})(\sum f_i \otimes g_i)(x,y) &= \Delta(\sum f_i g_i)(x,y)\\ &= \sum f_i g_i(xy).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mu_{A(G)\otimes A(G)} \circ (\Delta \otimes \Delta)(\sum f_i \otimes g_i)(x,y) &= \mu_{A(G)\otimes A(G)}(\sum \Delta(f_i) \otimes \Delta(g_i))(x,y)\\ &= \mu_{A(G)\otimes A(G)}(\sum f_i(xy) \otimes g_i(xy))\\ &= \sum f_i g_i(xy).\end{aligned}$$

Assim, temos a comutatividade do primeiro diagrama. Agora, note que $\Delta(1) = 1$ para concluir a comutatividade do segundo diagrama. Portanto, $\Delta$ é morfismo de álgebra.

Façamos a mesma coisa para $\varepsilon$. Dado $\sum f_i \otimes g_i \in A(G) \otimes A(G)$ temos

$$\begin{aligned}(\varepsilon \circ \mu_{A(G)})(\sum f_i \otimes g_i) &= \varepsilon(\sum f_i g_i)\\ &= \sum f_i g_i(1_G)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\mu_k \circ \varepsilon \otimes \varepsilon)(\sum f_i \otimes g_i) &= \mu_k(\sum \varepsilon(f_i) \otimes \varepsilon(g_i))\\ &= \mu_k(\sum f_i(1_G) \otimes g_i(1_G))\\ &= \sum f_i g_i(1_G).\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama, basta notar que $\varepsilon(1) = 1$. Portanto, $\varepsilon$ também é morfismo de álgebras. $\square$

Com as duas afirmações anteriores, temos que $A(G)$ possui estrutura de biálgebra, para concluir o teorema no resta mostrar que $A(G)$ possui antípoda. Para isso, vamos usar novamente a estrutura de grupo de $G$ com a aplicação e o diagrama que ficaram faltando da Afirmação 1. Podemos representar o fato de que todo elemento de um grupo ter inverso com a aplicação $s : G \to G$ e o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "I\times s"'] & G \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & G \times G \arrow[d, "s\times I"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G, \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

em que

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & 1_G \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & G & \to & G\times G \\ & g & \mapsto & (g,g) \end{array}.$$

Assim como na Afirmação 1, vamos associar os respectivos comorfismos a fim de que $s^*$ seja a antípoda de $A(G)$, ou seja, denotando $s^* = S$ precisamos da comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A(G\times G) \arrow[r, "\mu"] & A(G) & A(G\times G) \arrow[l, "\mu"'] \\ A(G\times G) \arrow[u, "I\otimes S"] & A(G) \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[u, "\eta\circ\varepsilon"] & A(G\times G). \arrow[u, "S\otimes I"'] \end{tikzcd}$$

Para obter tal diagrama vamos verificar que $\varphi^* = \eta\circ\varepsilon$ e $\psi^* = \mu$ (já vimos que $m^* = \Delta$).

De fato, dados $f \in A(G)$ e $x \in G$, temos:

$$\varphi^*(f)(x) = (f\circ\varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(1_G)$$

e

$$(\eta\circ\varepsilon)(f) = \eta(\varepsilon(f)) = \eta(f(1_g)) = f(1_G)$$

Agora,

$$\psi^*(f)(x) = f(\psi(x)) = f(x,x)$$

e vendo $\mu$ em $A(G\times G)$ temos

$$\mu(f)(x) = f(x,x)$$

Portanto, $S = s^*$ é antípoda e assim $A(G)$ é uma álgebra de Hopf.

□

Agora vamos considerar alguns de nossos exemplos de grupos algébricos afins e explicitar os morfismos na estrutura de álgebra de Hopf.

**Exemplo 4.2.** *Para o grupo algébrico afim $G_a$ do Exemplo 3.41, temos que $A(G_a) =$*

$\frac{k[x]}{I(G_a)}$. *Como* $G_a = k = \mathbb{A}^1$, $I(G_a) = \{0\}$. *Assim,*

$$A(G_a) = \frac{k[x]}{I(G_a)} = \frac{k[x]}{\{0\}} = k[x].$$

*Neste caso, dado* $a \in k$, *temos* $x(a) = a$. *Logo,*

$$\varepsilon(x) = x(0) = 0,$$

$$\Delta(x)(a,b) = x(a+b) = a+b,$$

*logo,*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

*e*

$$S(x)(a) = x(-a) = -a.$$

*Assim,*

$$S(x) = -x.$$

**Exemplo 4.3.** *Para o grupo algébrico afim* $G_m$ *do Exemplo 3.42, como visto anteriormente podemos ver* $G_m$ *como* $Z(g) \subseteq \mathbb{A}^2$ *em que* $g = xy - 1$. *Assim,*

$$A(G_m) = \frac{k[x,y]}{I(Z(g))} = \frac{k[x,y]}{\langle xy - 1 \rangle}.$$

*Logo,*

$$\varepsilon(x) = x(1) = 1$$

*e*

$$\Delta(x)(a,b) = x(ab) = ab.$$

*Portanto,*

$$\Delta(x) = x \otimes x$$

*e*

$$S(x)(a) = x(a^{-1}) = a^{-1}$$

*assim,*

$$S(x) = x^{-1}.$$

**Exemplo 4.4.** *Sejam* $\mathbb{S}^1 = Z(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ *e* $I = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$. *Podemos ver*

*$Z(x^2+y^2-1)$ como o subconjunto dos complexos módulo 1. Assim, dados $a+bi$ e $c+di$ temos $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$. Então*

$$\Delta(x)(a+bi,c+di)=x((ac-bd)+(ad+bc)i)=ac-bd,$$

*logo*

$$\Delta(x)=x\otimes x-y\otimes y.$$

$$\Delta(y)(a+bi,c+di)=y((ac-bd)+(ad+bc)i)=ad+bc,$$

*logo*

$$\Delta(y)=x\otimes x+y\otimes y.$$

$$\varepsilon(x)(a+bi)=(x)(1+0i)=1,$$

*e*

$$\varepsilon(y)(a+bi)=y(1+0i)=0.$$

*Neste exemplo podemos observar que $x$ representa a função cos, $y$ representa a função sen e que a comultiplicação é dada pela fórmula trigonométrica de adição de arcos.*

**Exemplo 4.5.** *Identifiquemos o grupo algébrico afim $GL_n(k)$ com $Z(g)$ em $\mathbb{A}^{n^2+1}$ em que $g=y\cdot det-1$. Assim,*

$$A(GL_n)=\frac{k[x_{11},\ldots,x_{nn},y]}{I(Z(g))}=\frac{k[x_{11},\ldots,x_{nn},y]}{\langle det\cdot y-1\rangle}.$$

*Logo,*

$$\varepsilon(x_{ij})=x_{ij}(I_n)=\text{ ij-ésima entrada da matriz identidade}=\delta_{ij}$$

*e*

$$\Delta(x_{ij})(A,B)=x_{ij}(AB)=\text{ ij-ésima entrada de } AB.$$

*Então,*

$$\Delta(x_{ij})=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\otimes x_{kj}$$

*e*

$$S(x_{ij}(A))=x_{ij}(A^{-1})=\text{ij-ésima entrada de } A^{-1}.$$

*E como $SL_n(k)$ é um subgrupo de $GL_n(k)$ que é fechado, basta fazer a restrição de cada* *aplicação acima para obter que $SL_n(k)$ é um grupo algébrico afim.*

É possível mostrar que o funtor $G \to A(G)$ define uma equivalência contravariante entre a categoria de grupos algébricos afins e as álgebras de Hopf comutativas, isto é, para todo grupo algébrico $G$ conseguimos uma álgebra de Hopf comutativa e, por outro lado, dada uma álgebra de Hopf comutativa, conseguimos um grupo algébrico afim. Tal demonstração pode ser encontrada em [4] seção 7.2.

# *Conclusão*

Vimos que a partir da definição de uma álgebra, conseguimos dualizar esta estrutura "revertendo"o sentido das flechas nos diagramas da definição de uma álgebra e obter a definição de uma coálgebra. Conseguimos definir uma biálgebra como uma estrutura que possui tanto estrutura de álgebra quanto de coálgebra com uma compatibilidade entre estas estruturas. Por fim, definimos uma álgebra de Hopf como sendo uma biálgebra que possui uma aplicação antípoda.

Com um estudo introdutório de geometria algébrica, conseguimos definir um grupo algébrico afim e mostrar resultados suficientes para relacionar a estrutura de grupo algébrico afim com a estrutura de álgebra de Hopf.

O trabalho foi desenvolvido ao longo do ano de 2014 e não tem um final, possui uma continuação natural dentro do estudo feito. Apesar da grande parte do trabalho ter sido feita em 2014, o início se deu no final de 2013, onde tive a oportunidade de começar a estudar uma introdução à geometria algébrica.

No começo de 2014, o estudo das álgebras de Hopf se deu início junto com um seminário realizado com o professor orientador deste trabalho, dois mestrandos e outro professor do Departamento de Matemática. O seminário foi de grande importância para o desenvolvimento do conteúdo e ajudou a sanar as dúvidas.

A maior parte do trabalho se deu no segundo semestre. O estudo necessário de álgebras de Hopf para o objetivo do trabalho estava quase pronto, e eu pude relacionar todo o conteúdo estudado no ano anterior com o recém estudado.

# *Referências*

[1] Abe, E. *Hopf algebras*, vol. 74. Cambridge University Press, 2004.

[2] Ash, R. B. Abstract algebra: the basic graduate year.

[3] Atiyah, M. F., and Macdonald, I. G. *Introduction to commutative algebra*, vol. 2. Addison-Wesley Reading, 1969.

[4] Brown, K. *Hopf Lects.* (http://www.maths.gla.ac.uk/ kab/Hopf20lects201-8.pdf).

[5] Dascalescu, S., Nastasescu, C., and Raianu, S. *Hopf algebra: An introduction*, vol. 235. CRC Press, 2000.

[6] Hartshorne, R. *Algebraic geometry, volume 52 of Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1977.