Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf

Mateus Medeiros Teixeira

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Março de 2011

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Mateus Medeiros Teixeira

Florianópolis
Março de 2011

Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf

por

Mateus Medeiros Teixeira

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador em Exercício da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves (UFPR)

Prof. Dr. Alcides Buss (UFSC)

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro (UFSC)

Florianópolis, 21 de março de 2011.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelos momentos de inspiração na realização deste trabalho.

Aos meus pais Dilmar e Jaime, e a minha irmã Marina, pelo apoio e carinho incondicional. Por entenderem que nem sempre minha presença nos momentos familiares era possível, por toda dedicação na construção do meu carater e por todos os sacrifícios a que se submeteram para que eu tivesse uma boa educação.

Ao meu orientador, professor Eliezer Batista, por todo o ensinamento durente esses dois anos de mestrado e também pelos quatro anos de gradução. Ao todo, foram 6 disciplinas além da orientação, e não houve um dia em que ele não falasse de maneira dedicada e clamorosa sobre a matemática, sempre em busca de exemplos que pudessem dar noções um pouco mais reais a mais pura das teorias.

Aos meus colegas da sala 106, pelos momentos de alegria, companheirismo, amizade e incontáveis horas de estudo divididas, sem contar o vício no banco imobiliário de cartas. Em especial, a Viviam que esteve ao meu lado em grande parte desta jornada, peça fundamental para o meu crescimento tanto matemático quanto pessoal. Você é, e sempre será muito especial para mim, te desejo toda a felicidade do mundo criança.

Aos professores membros da banca examinadora, por gentilmente terem aceitado o convite. Por terem lido o trabalho com tanto cuidado, contribuindo para o melhoramento do material e principalmente, por terem aceitado antecipar em uma semana a minha defesa, me proporcionando entrar na UFSC como professor substituto.

Também agradeço todos os outros professores que me auxiliaram e de alguma forma atravessaram meu caminho, como professores e até mesmo amigos.

Agradeço aos amigos, colegas, parceiros que fiz durante esses seis anos de UFSC, pessoas que me proporcionaram bons momentos de conversa no RU, que me convenciam a abandonar tudo e jogar um campeonato de futebol nos finais de semana, ou simplesmente por uma rápida conversa nos corredores do CFM. Em especial, ao Deividi, que dividiu a pesquisa comigo durante o primeiro semestre de 2010, diminuindo a carga de seminários.

Aos amigos que assim posso chamar há 5 anos e que me aceitaram fazer parte do grupo seleto deles, não por ser o namorado da Viviam, mas sim por quem eu era. Obrigado pelos mergulhos de ano novo, pelos encontros gastronômicos, pelas risadas, conversas e jogatinas.

Aos amigos do vôlei ou, melhor dizendo, dos sábados de aleatoriedades e falta de estudo. Com quem perdi grande parte dos meus sábados de manhã e dos quais tenho muito orgulho.

Aos demais amigos que ao longo dessa jornada compreenderam minha ausência e ajudaram sempre que possível.

Por fim, mas não menos importantes, aos amigos da dança, em especial, Gege, Jaque, Line, Lu, Michy, com quem compartilhei meus últimos dois anos aprendendo que o cavalheiro conduz a dama, que sertanejo ainda não virou moda pro Eric dar aulas e que foram meus parceiros, fosse dançando forró La Pedreira, ou então participando dos bailinhos na Kirinus.

A CAPES, pelo suporte financeiro no decorrer desses dois anos.

Resumo

Neste trabalho fazemos uma descrição completa do grupo quântico $A(SL_q(2))$, em que q é a raiz cúbica da unidade, como uma extensão de Hopf-Galois fielmente plana de $A(SL(2,\mathbb{C}))$ a partir da sequência exata de álgebras de Hopf

$$A(SL(2,\mathbb{C})) \xrightarrow{Fr} A(SL_q(2)) \longrightarrow A(F)$$

determinada pelo morfismo de Frobenius Fr. Além disso, estendemos o resultado para o subgrupo quântico de Borel, obtendo a estrutura de produto cruzado.

No mais, é feito um estudo dos resultados da teoria de álgebras de Hopf e da teoria de extensões de álgebras obtidas a partir de álgebras de Hopf. Ainda, mostramos que toda biálgebra que admite uma extensão de Hopf-Galois fielmente plana é uma álgebra de Hopf.

Palavras-chave: álgebras de Hopf, extensões de Hopf-Galois, grupos quânticos.

Abstract

In this work, we present a complete description of the quantum group $A(SL_q(2))$, where q is the cubic root from the unit, just like a faithfull flat Hopf-Galois extension of $A(SL(2,\mathbb{C}))$ for the Hopf algebra's exact sequence

$$A(SL(2,\mathbb{C})) \xrightarrow{Fr} A(SL_q(2)) \longrightarrow A(F)$$

determined by the Frobenius' morphism Fr. Also, we extend the result to the Borel's quantum subgroup, obtaining the structure of cross product.

Beyond that, we present a study about Hopf algebras theory and extension of algebras obtained from Hopf algebras. Furthermore, we show that a bialgebra that admits a faithfull flat Hopf-Galois extension is a Hopf algebra.

Key-words: Hopf algebras, Hopf-Galois extension, quantum groups.

Sumário

Introdução

A teoria de álgebras de Hopf teve seu início em 1941, em que Heinz Hopf observou o primeiro exemplo da mesma. Tal exemplo foi evidenciado na topologia algébrica, onde foi relacionado a homologia de um grupo de Lie conexo com a álgebra de Hopf graduada.

Além dessa associação com a topologia algébrica, as álgebras de Hopf também estão relacionadas com diversas áreas, entre elas, a mecânica quântica, a teoria dos números (através dos grupos formais), o conceito de H-espaço, a teoria de esquemas de grupo na geometria algébrica, a teoria de Lie (uma vez que a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie é um exemplo de álgebra de Hopf), a teoria de grupos (através do conceito de anel de grupo), a teoria de Galois e extensões separáveis de corpos, a teoria de operadores, teoria de anéis graduados, e assim segue uma lista infindável, o que a torna um dos grandes campos de pesquisa em álgebra atualmente.

A grosso modo, uma álgebra de Hopf é uma estrutura que admite um produto e uma unidade (estrutura de álgebra associativa), um coproduto e uma counidade (estrutura de coálgebra), uma relação de compatibilidade entre essas duas estruturas e por fim, um anti-homomorfismo, ao qual nos dá a ideia de inversibilidade de elementos.

Sendo hoje um ramo muito estudado da álgebra, vemos que as álgebras de Hopf tiveram um desenvolvimento tardio, tornando-se objeto de estudo estritamente algébrico a partir do fim da década de 60 e tendo seu grande avanço apenas no final da década de 80, onde foi observado sua forte conexão com a mecânica quântica, manifestando o interesse de muitos físicos teóricos e matemáticos.

Os grupos quânticos foram introduzidos por Jimbo e Drinfeld por volta de 1985, em trabalhos independentes, em que ambos definiram uma classe de álgebras de Hopf que podem ser consideradas como deformações de um parâmetro das álgebras envolventes universais de uma álgebra de Lie semi-simples complexa ($U_q(sl(2))$). Em algumas referências, tal classe recebe o nome de álgebra de Drinfeld-Jimbo, em homenagem aos mesmos. Um outro evento marcante, que ocorre simultaneamente ao primeiro, é a invenção, por S.L. Woronowicz, do grupo quântico $SU_q(2)$ e o desenvolvimento da teoria de grupos de matrizes quânticas compactas. Um outro exemplo surge no trabalho de L.D. Faddeev e a escola de Leningrado sobre o método de espalhamento inverso para resolver modelos integráveis. Ainda, neste mesmo período, foi dada uma aproximação algébrica para as álgebras coordenadas quantizadas por Yu.I. Manin.

Um grupo quântico pode ser visto, a grosso modo, como uma generalização da teoria de grupos, uma vez que podemos considerar um grupo como uma coleção de transformações. Transformações estas que são invertíveis. Assim, qualquer coleção fechada de transformações invertíveis é um grupo. Do mesmo modo, grupos quânticos também podem agir sobre certos espaços. Entretanto, agora, as transformações não são todas invertíveis, na verdade, há uma estrutura um pouco mais fraca, ao qual já citamos acima (antípoda), que garante não a inversibilidade de elementos mas sim a de combinações lineares. Assim, várias generalizações da teoria de grupos podem ser feitas para grupos quânticos através dessa fraca inversibilidade.

Uma outra definição que podemos dar para um grupo quântico é advinda de Drinfeld, que em [13], definiu um grupo quântico como uma álgebra de Hopf não comutativa e não cocomutativa. Na verdade, as estruturas de comutatividade e de cocomutatividade são controladas por uma matriz R, e a essa estrutura, chamamos álgebras de Hopf quasi-triangulares.

Este trabalho pode ser dividido em três partes. Primeiramente, estudamos a teoria de álgebras de Hopf para ganharmos familiaridade com essa estrutura, no primeiro capítulo, mostramos alguns resultados sobre a antípoda, definimos o conceito de par dual, módulos de Hopf, integral sobre álgebra de Hopf, produto Smash, contexto de Morita e produto cruzado. Já no segundo capítulo, nos dedicamos ao estudo de extensões de álgebras obtidas a partir de álgebras de Hopf. Nele, definimos as extensões vistas neste trabalho (extensões fielmente planas, fendidas, de Hopf-Galois e homogêneas principais), algumas propriedades das mesmas e resultados que as relacionam. Ainda, vemos a relação entre o produto cruzado e as extensões fendidas.

Depois, passamos ao estudo do artigo "A bialgebra that admits a Hopf-Galois extension is a Hopf algebra" do autor Peter Schauenburg ([31]). Podemos ver tal artigo como uma aplicação teórica da teoria de extensões de álgebras obtidas a partir de álgebras de Hopf. Por fim, estudamos o artigo "Explicit Hopf-Galois Description of $SL_{e^{2i\pi/3}}$-Induced Frobenius Homomorphisms"de Ludwik Dabrowski, Piotr M. Hajac, Pasquale Siniscalco ([8]), o que podemos entender como uma aplicação prática da teoria de extensões.

Neste trabalho, vemos principalmente a idéia de extensões de Hopf-Galois, que foram introduzidas por Chase e Sweedler em 1969, onde as idéias de ações de grupos sobre anéis comutativos (extensões de Galois) foram estendidas para coações de álgebras de Hopf agindo sobre uma k-álgebra comutativa, com k um anel comutativo. E generalizadas por Kreimer e Takeuchi no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita, além dessa, vemos também a noção de extensões fielmente planas, extensões fendidas, que tem forte associação com a estrutura de produto cruzado, e extensões homogêneas principais, em que a álgebra A que aparece na definição de extensão de Hopf-Galois agora passa a ser uma álgebra de Hopf e A é visto como uma A/J extensão de Hopf-Galois, em que J é um ideal de Hopf.

Quando estudamos essa idéia de H-extensões, é comum assumirmos que H é uma álgebra de Hopf. Uma exceção é feita em [11], onde extensões fendidas sobre uma biálgebra são consideradas. Já a questão de se há possibilidade de uma biálgebra (que não tem antípoda) admitir uma extensão de Hopf-Galois chamou a atenção do autor Yokio Doi em conexão com [30].

No Capítulo 3 desse trabalho, usamos a noção de extensão sobre biálgebra, para então construirmos uma estrutura de álgebra de Hopf sobre a mesma. A idéia é construirmos um morfismo, denominado S, que seja o inverso por convolução do morfismo identidade. Para tanto, utilizamos um lema técnico que pode ser utilizado em outras situações, uma vez que o resultado é enunciado para uma coálgebra e não para a estrutura de biálgebra a qual trabalhamos neste mesmo capítulo. Ainda, cabe salientar que durante todo o terceiro capítulo, consideramos k um anel comutativo com unidade.

Para finalizar, como vimos acima, existem várias classes de exemplos de grupos quânticos, porém, as duas principais são $U_q(sl(2))$ e $SL_q(2)$. Nessas estruturas baseiam-se a maior parte dos trabalhos sobre grupos quânticos, e observa-se que existe uma relação dual entre ambas. Neste trabalho, estudamos uma dessas duas classes de exemplos, que é o grupo quântico das funções coordenadas $A(SL_q(2))$, em que q é a raiz cúbica da unidade, ou seja, $q = e^{2\pi i/3}$. Neste capítulo, todos os espaços vetoriais são considerados sobre $\mathbb{C}$.

Tal grupo quântico possui uma série de relações definidoras, que embora apareçam impostas num primeiro momento, surgem naturalmente quando consideramos a coação de $M_2(\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}_q[x, y]$ à direita e à esquerda, uma vez que a estrutura de biálgebra de $M_2(\mathbb{C})$ coincide com a estrutura de biálgebra de $A(SL_q(2))$.

Com a estrutura de álgebra de Hopf sobre $A(SL_q(2))$ definida e tendo familiaridade com essa estrutura, iniciamos um estudo para sabermos se o grupo quântico em questão admite alguma das extensões vistas no Capítulo 2. Na verdade, vemos que $A(SL_q(2))$ admite uma extensão de Hopf-Galois fielmente plana induzida pelo morfismo de Frobenius. No trabalho, provamos este resultado de forma direta, porém, o mesmo pode ser feito utilizando a dualidade entre funções sobre grupos e as álgebras envelope universais. Provamos também que, se considerarmos o subgrupo quântico de Borel, $A(SL_q(2))/\langle T_{21}\rangle$, em que T_{21} é um dos elementos geradores de $A(SL_q(2))$, o mesmo admite uma extensão de Hopf-Galois fendida, novamente induzida pelo morfismo de Frobenius. Neste último, apresentamos claramente o morfismo fenda e também o morfismo que define o cociclo e a ação do cociclo, obtendo a estrutura de produto cruzado.

Por fim, o trabalho encontra-se dividido em 4 capítulos e 4 apêndices. Abaixo damos uma idéia geral do que consta em cada um dos apêndices, uma vez que já comentamos sobre os capítulos acima.

No apêndice 1, introduzimos as noções de álgebras e coálgebras. Este estudo serve de base para todo o trabalho, uma vez que dependemos dessas duas estruturas para podermos definir o que vem a ser uma álgebra de Hopf. Além das noções usuais dessas estruturas, vemos ainda a teoria de álgebra e coálgebra dual, o dual finito de uma álgebra e finalizamos estudando as estruturas de módulos e comódulos.

O segundo apêndice é dedicado ao estudo de duas classes especiais de módulos, chamados módulos planos e fielmente planos. Essas classes de módulos são importantes, pois a partir deles podemos definir a estrutura de extensões fielmente planas que possui aplicações interessantes vistas tanto no capítulo 3 quanto no capítulo 4. Também, provamos que todo módulo projetivo finitamente gerado é fielmente plano.

No terceiro apêndice tratamos de três lemas da Teoria de Álgebras que são de fundamental importância para o trabalho. O primeiro estabelece condições para se encontrar bases em álgebras cujos elementos são expressos por polinômios não comutativos. O segundo resultado trata da relação entre o kernel e o cokernel de determinados diagramas comutativos através de sequências exatas. E finalizamos com o Lema de Dedekind, que estalece condições para obtermos conjuntos linearmente independentes.

Por fim, no último apêndice, trazemos alguns detalhes de conta que não são apresentados no capítulo quatro por crermos que, caso feito, deixaria a demonstração do resultado em questão muito densa e perderia-se o foco da demonstração.

Capítulo 1

Álgebras de Hopf

Neste capítulo introduzimos a noção de álgebra de Hopf. Tal estrutura é a base deste trabalho e portanto é de suma importância a conhecermos, assim como vermos algumas propriedades da mesma, para podermos então dar prosseguimento com os estudos de extensões sobre álgebras de Hopf e exemplos.

1.1 Biálgebras

Iniciamos este trabalho definindo a estrutura de biálgebra, que nada mais é do que um espaço vetorial que têm estrutura de álgebra e de coálgebra satisfazendo uma certa relação de compatibilidade entre tais estruturas.

No Apêndice A trazemos os principais resultados das estruturas de álgebra e coálgebra. Lembramos aqui suas respectivas definições para podermos definir formalmente uma biálgebra.

Por álgebra entendemos uma tripla (A, μ, η), em que A é um k-espaço vetorial, $\mu : A \otimes A \to A$ e $\eta : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes I_A"] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes \eta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
$$

E por coálgebra entendemos uma tripla (C, Δ, ε), em que C é um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes I"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C \arrow[ur, "\psi"] & & C \otimes k \arrow[ul, "\psi'"'] \\
 & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I"] \arrow[ur, "I \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Assim, uma biálgebra é uma quíntupla $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$, em que (H, μ, η) define uma estrutura de álgebra, (H, Δ, ε) define uma estrutura de coálgebra, com $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, para todo $h \in H$ pela notação de Sweedler, e valem as condições da seguinte proposição:

Proposição 1.1 *Dada a quíntupla $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$, em que (H, μ, η) é uma álgebra e (H, Δ, ε) é uma coálgebra. São equivalentes:*

(i) μ e η são morfismos de coálgebras;

(ii) Δ e ε são morfismos de álgebras.

Demonstração: Notemos que por (i) temos os seguintes diagramas válidos:

(I)
$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta_{H\otimes H}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
(H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu\otimes\mu"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

em que $\Delta_{H\otimes H} = \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta)$ e $\sigma_{23} = I_H \otimes \sigma \otimes I_H$, onde o morfismo $\sigma : H \otimes H \to H \otimes H$ é a transposição $\sigma(h \otimes k) = k \otimes h$.

(II)
$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\varepsilon_{H\otimes H}"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon_H"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

em que $\varepsilon_{H\otimes H} = \varepsilon \otimes \varepsilon$.

(III)
$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Delta_k"'] & H \arrow[d, "\Delta_H"] \\
(k \otimes k) \arrow[r, "\eta\otimes\eta"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

(IV)
$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\varepsilon_k"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon_H"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

E por (ii) temos os seguintes diagramas válidos:

(V)
$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
(H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

em que $\mu_{H\otimes H} = (\mu \otimes \mu) \circ \sigma_{23}$.

$$\text{(VI)} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\Delta"] & & H \otimes H \\ & k \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur, "\eta_{H\otimes H}"'] & \end{tikzcd}$$

em que $\eta_{H\otimes H}(\lambda) = \lambda(1_H \otimes 1_H)$, para todo $\lambda \in k$.

$$\text{(VII)} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\ (k \otimes k) \arrow[r, "\mu_k"'] & k \end{tikzcd}$$

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\varepsilon"] & & k \\ & k \arrow[ul, "\eta_H"] \arrow[ur, "\eta_k"'] & \end{tikzcd}$$

E assim, é fácil vermos que (i) é válido se, e somente se, (ii) é válido, uma vez que temos a equivalência entre os seguintes diagramas, (I) $\Leftrightarrow$ (V), (II) $\Leftrightarrow$ (VII), (III) $\Leftrightarrow$ (VI) e (IV) $\Leftrightarrow$ (VIII).

■

Exemplo 1.2 *Seja G um grupo. Conforme os exemplos A.6 e A.25, temos que kG é uma álgebra e uma coálgebra. Como sua estrutura de coálgebra é dada por $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_k$, fica claro que Δ e ε são morfismos de álgebras e portanto kG é uma biálgebra.*

Exemplo 1.3 *Dadas duas biálgebras A e B, podemos ver facilmente que $A \otimes B$ admite uma estrutura de biálgebra com*

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ \sigma_{23}, \ \eta_{A\otimes B}(\lambda) = \lambda(1_A \otimes 1_B);$$

$$\Delta_{A\otimes B} = \sigma_{23} \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B), \ \varepsilon_{A\otimes B} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B.$$

Exemplo 1.4 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma k-álgebra de Lie, k corpo e $B = U(\mathfrak{g})$ a* *álgebra envolvente universal, conforme visto no exemplo A.21. Sobre B podemos definir uma estrutura de biálgebra, onde a comultiplicação é dada por* $\Delta(x) = x \otimes 1_{U(\mathfrak{g})} + 1_{U(\mathfrak{g})} \otimes x$ *e counidade* $\varepsilon(x) = 0$, *para todo* $x \in U(\mathfrak{g})$.

Exemplo 1.5 *No exemplo A.24 temos que um k-espaço vetorial H com base* $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ *tem uma estrutura de coálgebra. Definimos sobre H uma estrutura de álgebra da seguinte forma:*

Sejam $c_i,\ c_j \in H$, *então a multiplicação dos elementos* c_i *e* c_j, *para todo* $i,\ j \in \mathbb{N}$ *é dada por* $\mu(c_i \otimes c_j) = c_i \cdot c_j := \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} c_{i+j}$. *E a unidade em H é dada por* c_0.

Vejamos que a multiplicação definida acima é associativa. Sejam $c_n,\ c_m$ *e* $c_p \in H$, *logo,*

$$\begin{aligned}
(c_n \cdot c_m) \cdot c_p &= \left(\begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} c_{n+m} \right) \cdot c_p \\
&= \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m+p \\ n+m \end{pmatrix} c_{n+m+p} \\
&= \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!} c_{n+m+p} \\
&= \begin{pmatrix} m+p \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m+p \\ n \end{pmatrix} c_{n+m+p} \\
&= c_n \cdot \left(\begin{pmatrix} m+p \\ m \end{pmatrix} c_{m+p} \right) \\
&= c_n \cdot (c_m \cdot c_p).
\end{aligned}$$

Claramente, a estrutura é unital. Mostremos que H tem uma estrutura de biálgebra. Lembremos que H tem uma estrutura de coálgebra dada por $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}$ *e* $\varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$. *Assim, basta* *vermos que $\Delta(c_n \cdot c_m) = \Delta(c_n) \cdot \Delta(c_m)$. De fato,*

$$\begin{aligned}
\Delta(c_n) \cdot \Delta(c_m) &= (\sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i})(\sum_{j=0}^{m} c_j \otimes c_{m-j}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_i \cdot c_j \otimes c_{n-i} \cdot c_{m-j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m-i-j \\ n-i \end{pmatrix} c_{i+j} \otimes c_{n+m-i-j}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{i+j=t}{=} \sum_{t=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{t} \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m-t \\ n-i \end{pmatrix} c_t \otimes c_{n+m-t} \\
&= \sum_{t=0}^{n+m} \begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} c_t \otimes c_{n+m-t} \\
&= \Delta\left(\begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix} c_{n+m}\right) \\
&= \Delta(c_n \cdot c_m).
\end{aligned}$$

Observamos que na igualdade entre a primeira e a segunda linha, utilizamos uma identidade combinatória conhecida como Fórmula de Euler. A mesma pode ser encontrada em diversos livros de Análise Combinatória, dentre eles, indicamos, [27] e [15].

Exemplo 1.6 *Seja k um corpo e $n \geqslant 2$ um inteiro positivo. Mostremos que não existe uma estrutura de biálgebra sobre $M_n(k)$ tal que a estrutura de álgebra é a álgebra matricial.*

De fato, sejam k e $n \geqslant 2$ como acima. Suponhamos que $M_n(k)$ admita uma estrutura de biálgebra.

Então existe $\varepsilon : M_n(k) \to k$ um morfismo de álgebras. Daí, $\ker(\varepsilon)$ é ideal de $M_n(k)$. Logo, $\ker(\varepsilon) = 0$ ou $\ker(\varepsilon) = M_n(k)$.

Como $\varepsilon(1_{M_n(k)}) = 1_k$, segue que $\ker(\varepsilon) = 0$, ou seja, ε é *injetora, o que é um absurdo, uma vez que* $dim(M_n(k)) > dim(k)$.

Assim como nas estruturas de álgebra e coálgebra, em que definimos a noção de ideal e morfismo, podemos refazê-lo aqui, definindo:

Definição 1.7 *Um subespaço* $I \subseteq H$ *é um* $bi-ideal$ *se* I *for um ideal e um coideal de* H *conforme as definições A.10 e A.33 respectivamente.*

Definição 1.8 *Uma aplicação* $f : H \to H_1$ *de biálgebras é chamada morfismo de biálgebras se* f *for morfismo de álgebras (vide Definição A.11) e de coálgebras (vide Definição A.30).*

Ainda, observamos que o quociente H/I é uma biálgebra se, e somente se, I for um bi-ideal de H. Neste caso, a aplicação canônica $H \to H/I$ é um morfismo de biálgebras.

No intuito de adquirirmos mais exemplos de biálgebras, consideramos a seguinte proposição, que avalia o dual de uma biálgebra.

Proposição 1.9 *Seja* $(H, \Delta, \varepsilon, \mu, \eta)$ *uma biálgebra com* $dim(H) < \infty$. *Então* H^* *é uma biálgebra.*

Demonstração: De fato, como $dim(H) < \infty$, sabemos que dadas as estruturas (H, μ, η) e (H, Δ, ε) de álgebra e coálgebra respectivamente, podemos dualizá-las, obtendo as estruturas (H^*, μ^*, η^*) e $(H^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ de coálgebra e álgebra, pela Proposição A.43 e pelo Corolário A.38 do Apêndice A, respectivamente.

Ainda, como H é uma biálgebra, temos que μ e η são morfismos de coálgebra e Δ e ε são morfismos de álgebra, o que implica, respectivamente, em μ^* e η^* serem morfismos de álgebra e Δ^* e ε^* serem morfismos de coálgebra. E portanto, H^* é uma biálgebra.

$\blacksquare$

Disto, concluímos que kG e $(kG)^*$ são biágebras para G um grupo finito.

Encerramos esta seção definindo o conceito de par dual. Mais a frente estendemos essa noção para álgebras de Hopf e a utilizamos na demonstração de alguns resultados.

Definição 1.10 *Sejam H e A biálgebras. Dizemos que uma aplicação linear*

$$\langle\ ,\ \rangle : H \times A \to k$$

é um par dual entre H e A se vale:

(i) $\langle h, 1_A\rangle = \varepsilon_H(h)$, para todo $h \in H$;

(ii) $\langle 1_H, a\rangle = \varepsilon_A(a)$, para todo $a \in A$;

(iii) $\langle h \otimes g, \Delta_A(a)\rangle = \langle hg, a\rangle$, para todo $h, g \in H$ e $a \in A$;

(iv) $\langle \Delta_H(h), a \otimes b\rangle = \langle h, ab\rangle$, para todo $h \in H$ e $a,\ b \in A$,

em que

$$\langle h\otimes g, \Delta_A(a)\rangle = \sum \langle h, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle \text{ e } \langle \Delta_H(h), a\otimes b\rangle = \sum \langle h_{(1)}, a\rangle\langle h_{(2)}, b\rangle.$$

1.2 Álgebras de Hopf

A partir desta seção iniciamos o estudo das álgebras de Hopf. A grosso modo, uma álgebra de Hopf é uma biálgebra com uma estrutura de "inversibilidade", ao qual denominamos antípoda. Antes de definirmos formalmente essa nova estrutura, lembramos que se (C, Δ, ε) é uma coálgebra e (A, μ, η) é uma álgebra, então $Hom_K(C, A)$ é uma álgebra com o produto de convolução $*$, ou seja, $(f{*}g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})$, como visto na Proposição A.37, e unidade $\eta \circ \varepsilon$.

Assim, se $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra e denotarmos por $H^c = (H, \Delta, \varepsilon)$ e $H^a = (H, \mu, \eta)$, então $Hom_K(H^c, H^a)$ é uma álgebra com o produto de convolução $*$, e portanto, definimos o que chamamos de antípoda por:

Definição 1.11 *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Uma transformação linear $S : H \to H$ é chamada uma antípoda em H se S é a inversa da transformação identidade $I : H \to H$ com respeito ao produto de convolução em $Hom_K(H^c, H^a)$, ou seja, $S * I = I * S = \eta \circ \varepsilon$, ou ainda,*

$$\varepsilon(h)1_H = (S * I)(h) = \sum_h S(h_{(1)})h_{(2)} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon(h)1_H = (I * S)(h) = \sum_h h_{(1)}S(h_{(2)}) \tag{1.2}$$

que pode ser resumido nas igualdades:

$$\sum_h h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H = \sum_h S(h_{(1)})h_{(2)}. \tag{1.3}$$

Definição 1.12 *Uma biálgebra H que possui uma antípoda é chamada uma* ***Álgebra de Hopf****.*

Observamos que a antípoda de uma álgebra de Hopf é única, pois $Hom(H, H)$ é um anel, e sabemos que se o inverso de um elemento de um anel existe, então é único.

Exemplo 1.13 *Já vimos que kG possui uma estrutura de biálgebra. Mostremos que a aplicação $S : kG \to kG$ definida por $S(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$ satisfaz a equação 1.3. De fato, como $\Delta(g) = g \otimes g$, temos que*

$$I * S(g) = \sum_g gS(g) = \sum_g g \cdot g^{-1} = e = \eta \circ \varepsilon(g).$$

É fácil vermos que o mesmo ocorre para $S * I$ e portanto, o morfismo S satisfaz a propriedade da antípoda. Logo kG é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 1.14 *Sejam G um grupo finito e $\{p_g / g \in G\}$ a base de $(kG)^*$, dada por $\langle p_g, h\rangle = \delta_{gh}$ para todo $g, h \in G$. O espaço $H = (kG)^*$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf com multiplicação satisfazendo*

$$\langle p_g p_h, l\rangle = \langle p_g, l\rangle\langle p_h, l\rangle = \delta_{gl}\delta_{hl},$$

para todos $g, h, l \in G$ e $1_H = \varepsilon$ a função aumento de kG. A comultiplicação de H é tal que

$$\Delta(p_g) = \sum_{h \in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h$$

e $\varepsilon_H(p_g) = \delta_{ge}$ para todo $g, h \in G$. Por fim, a antípoda S é dada por $S(p_g) = p_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

Exemplo 1.15 *Sejam H e L álgebras de Hopf, vejamos que podemos obter uma estrutura de álgebra de Hopf sobre $H \otimes L$.*

Já vimos anteriormente que há uma estrutura de biálgebra sobre $H \otimes L$. Definimos:

$$\begin{array}{rccl} \widehat{S}: & H \otimes L & \to & H \otimes L \\ & h \otimes l & \mapsto & \widehat{S}(h \otimes l) := S_H(h) \otimes S_L(l), \end{array}$$

em que S_H e S_L são as antípodas de H e L respectivamente.

Seja $h \otimes l \in H \otimes L$, logo,

$$
\begin{aligned}
(\widehat{S} * I_{H\otimes L})(h \otimes l) &= \mu_{H\otimes L}(\widehat{S} \otimes I_{H\otimes L})\Delta_{H\otimes L}(h \otimes l)\\
&= \mu_{H\otimes L}(\widehat{S} \otimes I_{H\otimes L})(\sum h_{(1)} \otimes l_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes l_{(2)})\\
&= \mu_{H\otimes L}(\sum \widehat{S}(h_{(1)} \otimes l_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \otimes l_{(2)}))
\end{aligned}
$$

$$
= \sum(\mu_H \otimes \mu_L)(I_H \otimes \sigma \otimes I_L)(\sum S_H(h_{(1)}) \otimes S_L(l_{(1)}) \otimes h_{(2)} \otimes l_{(2)})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum S_H(h_{(1)})h_{(2)} \otimes S_L(l_{(1)})l_{(2)}\\
&= \varepsilon_H(h)1_H \otimes \varepsilon_L(l)1_L\\
&= \varepsilon_{H\otimes L}(h \otimes l)1_{H\otimes L}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(I_{H\otimes L} * \widehat{S}) = \eta_{H\otimes L}\varepsilon_{H\otimes L}$, e segue que $\widehat{S}$ é a antípoda de $H \otimes L$.

Exemplo 1.16 *Vimos no Exemplo 1.5 que um k-espaço vetorial H com base $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ é uma biálgebra. Vejamos que há uma estrutura de álgebra de Hopf sobre H. Para isso, definimos a antípoda de forma recorrente da seguinte forma:*

$$S(c_0) = S(1_H) = 1_H, \text{ para } n = 0.$$

E, suponhamos que S esteja definida para c_i, com $0 \leqslant i \leqslant n-1$, assim, definimos

$$S(c_n) := -S(c_0)c_n - S(c_1)c_{n-1} - \cdots - S(c_{n-1})c_1.$$

Mostremos que S é de fato a antípoda.

$$
\begin{aligned}
(S * I_H)(c_n) &= \sum_{i=0}^{n} S(c_i)c_{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} S(c_i)c_{n-i} + S(c_n)c_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} S(c_i)c_{n-i} - S(c_0)c_n - S(c_1)c_{n-1} - \cdots - S(c_{n-1})c_1 \\
&= 0 = \varepsilon(c_n)1_H,
\end{aligned}
$$

como queríamos. Analogamente, vemos que $(I_H * S) = \eta\varepsilon$.

No que segue, definimos a noção de par dual para álgebras de Hopf e apresentamos algumas propriedades da antípoda.

Definição 1.17 *Seja H uma álgebra de Hopf e consideremos seu dual finito H^0 dado na Definição A.49. Definimos o par dual entre as álgebras de Hopf H° e H pelo morfismo:*

$$
\begin{aligned}
\langle\ ,\ \rangle :\quad H^\circ \otimes H &\rightarrow k \\
\langle f, a\rangle &\mapsto f(a).
\end{aligned}
$$

Proposição 1.18 *Sejam H e A álgebras de Hopf com antípodas S e S' respectivamente e $\langle\ ,\ \rangle : H \otimes A \rightarrow k$ um par dual entre H e A, então*

$$\langle S(h), a\rangle = \langle h, S'(a)\rangle,$$

para todo $h \in H$ e todo $a \in A$.

Demonstração: Definimos as aplicações

$$
\begin{aligned}
F :\quad H \otimes A &\rightarrow k \\
h \otimes a &\mapsto \langle S(h), a\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G :\quad H \otimes A &\rightarrow k \\
h \otimes A &\mapsto \langle h, a\rangle
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
J :\quad H \otimes A &\rightarrow k \\
h \otimes a &\mapsto \langle h, S'(a)\rangle.
\end{aligned}
$$

Mostraremos que $F = J$ através do produto de convolução em $Hom_k(H \otimes A, k)$. Seja $h \otimes a \in H \otimes A$.

$$\begin{aligned}
F * G(h \otimes a) &= \sum \langle S(h_{(1)}), a_{(1)} \rangle \langle h_{(2)}, a_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle S(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}, a_{(1)} \otimes a_{(2)} \rangle \\
&= \langle \sum S(h_{(1)}) h_{(2)}, a \rangle \\
&= \varepsilon_H(h) \langle 1_H, a \rangle \\
&= \varepsilon_H(h) \varepsilon_A(a).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
G * J(h \otimes a) &= \sum \langle h_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle h_{(2)}, S'(a_{(2)}) \rangle \\
&= \sum \langle h_{(1)} \otimes h_{(2)}, a_{(1)} \otimes S'(a_{(2)}) \rangle \\
&= \langle h, \sum a_{(1)} S'(a_{(2)}) \rangle \\
&= \langle h, 1_A \rangle \varepsilon_A(a) \\
&= \varepsilon_H(h) \varepsilon_A(a).
\end{aligned}$$

Portanto, F e J são inversas por produto de convolução de G, e como sabemos que essa inversa é única, temos que $F = J$ e consequentemente, temos nosso resultado demonstrado.

■

Proposição 1.19 *Sejam H_1 e H_2 álgebras de Hopf com antípodas S_1 e S_2 respectivamente. Se $f : H_1 \to H_2$ é um morfismo de biálgebras então $S_2 \circ f = f \circ S_1$.*

Demonstração: Consideremos o conjunto $Hom_k(H_1, H_2)$, a idéia é provarmos que $(f \circ S_1) * f = \eta\varepsilon = f * (S_2 \circ f)$. De fato, para todo $h \in H_1$, temos

$$\begin{aligned}((f\circ S_1)*f)(h) &= \sum(f\circ S_1)(h_{(1)})f(h_{(2)})\\ &= f(\sum S_1(h_{(1)})h_{(2)})\\ &= f(\varepsilon(h)1_{H_1})\\ &= \varepsilon(h)1_{H_2}=\eta\varepsilon(h),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(f*(S_2\circ f))(h) &= \sum f(h_{(1)})(S_2\circ f)(h_{(2)})\\ &= f(h)_{(1)}S_2(f(h)_{(2)})\\ &= \varepsilon(f(h))1_{H_2}\\ &= \varepsilon(h)1_{H_2}=\eta\varepsilon(h).\end{aligned}$$

■

Se f é um morfismo de biálgebras e satisfaz a condição acima, dizemos que f é um morfismo de álgebras de Hopf.

Proposição 1.20 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então*

(i) $S(ab)=S(b)S(a)$ para todo $a,b\in H$;

(ii) $S(1_H)=1_H$;

(iii) $\Delta(S(h))=\sum_h S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)})$ para todo $h\in H$;

(iv) $\varepsilon(S(h))=\varepsilon(h)$ para todo $h\in H$.

Demonstração: (i) Para demonstrarmos tal fato, consideramos a álgebra de convolução $Hom_k(H\otimes H,H)$ e definimos os morfismos:

$$\begin{aligned}F:\ H\otimes H &\to H\\ a\otimes b &\mapsto S(ab)\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rccl}
G: & H\otimes H & \to & H\\
 & a\otimes b & \mapsto & S(b)S(a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccl}
M: & H\otimes H & \to & H\\
 & a\otimes b & \mapsto & ab
\end{array}
$$

A idéia é mostrarmos que $F*M=\eta\varepsilon=M*G$, pois assim, como a inversa por produto de convolução é única, teremos $F=G$ e portanto, $S(ab)=S(b)S(a)$ como queremos.

Seja $a\otimes b\in H\otimes H$, logo,

$$
\begin{aligned}
(F*M)(a\otimes b) &= \sum F(a_{(1)}\otimes b_{(1)})M(a_{(2)}\otimes b_{(2)})\\
&= \sum S(a_{(1)}b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}\\
&= \sum S((ab)_{(1)})(ab)_{(2)}\\
&= \varepsilon(ab)1_H=\varepsilon(a)\varepsilon(b)1_H\\
&= \eta\varepsilon(a\otimes b).
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
(M*G)(a\otimes b) &= \sum M(a_{(1)}\otimes b_{(1)})G(a_{(2)}\otimes b_{(2)})\\
&= \sum a_{(1)}b_{(1)}S(b_{(2)})S(a_{(2)})\\
&= \sum \varepsilon(b)a_{(1)}S(a_{(2)})\\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b)1_H=\eta\varepsilon(a\otimes b).
\end{aligned}
$$

(ii) Claramente $S(1_H)=S(1_H)1_H=\varepsilon(1_H)1_H=1_H$.

(iii) Consideramos novamente a álgebra de convolução $Hom_k(H\otimes H,H)$ e definimos os morfismos:

$$
\begin{array}{rccl}
\Phi: & H & \to & H\otimes H\\
 & h & \mapsto & \sum S(h)_{(1)}\otimes S(h)_{(2)}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rccl}\Psi: & H & \to & H\otimes H\\ & h & \mapsto & \sum S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)})\end{array}$$

Mostremos que ambos são inversos por convolução para Δ. Seja $h \in H$, logo,

$$\begin{aligned}\Delta * \Phi(h) &= \sum \Delta(h_{(1)})\Phi(h_{(2)})\\ &= \sum (h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)})(S(h_{(2)})_{(1)} \otimes S(h_{(2)})_{(2)})\\ &= \sum h_{(1)(1)}S(h_{(2)})_{(1)} \otimes h_{(1)(2)}S(h_{(2)})_{(2)}\\ &= \sum (h_{(1)}S(h_{(2)}))_{(1)} \otimes (h_{(1)}S(h_{(2)}))_{(2)}\\ &= \Delta(\sum h_{(1)}S(h_{(2)}))\\ &= \Delta(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H)\\ &= (\eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Psi * \Delta(h) &= \sum \Psi(h_{(1)})\Delta(h_{(2)})\\ &= \sum (S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}))(h_{(3)} \otimes h_{(4)})\\ &= \sum S(h_{(2)})h_{(3)} \otimes S(h_{(1)})h_{(4)}\\ &= \sum \varepsilon(h_{(2)})1_H \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}\\ &= 1_H \otimes \sum S(h_{(1)})h_{(2)}\\ &= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H)\\ &= (\eta_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h).\end{aligned}$$

Portanto, como o inverso por convolução é único, temos que $\Psi = \Phi$ e segue que $\sum S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} = \sum S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$.

(iv) De fato,

$$\begin{aligned}\varepsilon(S(h)) &= \sum \varepsilon(S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)}) = \varepsilon(\sum S(h_{(1)})h_{(2)})\\ &= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) = \varepsilon(h). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 1.21 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

(i) $\sum_h S(h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H$ para todo $h \in H$;

(ii) $\sum_h h_{(2)}S(h_{(1)}) = \varepsilon(h)1_H$ para todo $h \in H$;

(iii) $S^2 = I_H$, em que entendemos por S^2 a composição $S \circ S$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (iii) De fato,

$$\begin{aligned}
(S * S \circ S)(h) &= \sum S(h_{(1)})S \circ S(h_{(2)}) \\
&= S(\sum S(h_{(2)})h_{(1)}) \\
&= S(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)1_H.
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sabemos que $\sum S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H$. Então, aplicando o morfismo S em ambos os lados da equação, temos que

$$\varepsilon(h)1_H = S(\sum S(h_{(1)})h_{(2)}) = \sum S(h_{(2)})S \circ S(h_{(1)}) = \sum S(h_{(2)})h_{(1)}.$$

Por raciocínio análogo, vemos que (iii) $\Leftrightarrow$ (ii).

■

Proposição 1.22 *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita então H^* também é álgebra de Hopf.*

Demonstração: Já vimos na seção anterior que H^* é uma biálgebra. Definimos

$$\begin{array}{rccl}
S^*: & H^* & \to & H^* \\
& h^* & \mapsto & S^*(h^*) := h^* \circ S
\end{array},$$

em que $S^*(h^*) : H \to k$ é definido por $S^*(h^*)(h) := h^*(S(h))$. Vejamos que S^* satisfaz os axiomas da antípoda. De fato,

$$\begin{aligned}
(S^* * I)(h^*)(h) &= \sum (S^*(h^*_{(1)})h^*_{(2)})(h) \\
&= \sum S^*(h^*_{(1)})(h_{(1)})h^*_{(2)}(h_{(2)}) \\
&= \sum h^*_{(1)}(S(h_{(1)}))h^*_{(2)}(h_{(2)}) \\
&= h^*(\sum S(h_{(1)})h_{(2)}) \\
&= h^*(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)h^*(1_H) = \eta_{H^*}\varepsilon_{H^*}(h^*)(h),
\end{aligned}$$

em que $\eta_{H^*} : k \to H^*$ é dada por $\eta_{H^*}(\lambda) = \lambda\varepsilon$ e $\varepsilon_{H^*}(h^*) = h^*(1_H)$.

Claramente o mesmo vale para $I * S^*$ e portanto, H^* é uma álgebra de Hopf como queríamos.

■

Agora podemos definir o que vem a ser subálgebra de Hopf e ideal de Hopf.

Definição 1.23 *Seja H uma álgebra de Hopf. Um subespaço A de H é dito uma subálgebra de Hopf se A é subálgebra e subcoálgebra de H e $S(A) \subseteq A$.*

Definição 1.24 *Seja H uma álgebra de Hopf. Definimos I o ideal de Hopf de H, se I é um ideal e um coideal de H e $S(I) \subseteq I$.*

Observamos que se I é um ideal de Hopf, então a biálgebra quociente H/I tem uma estrutura natural de álgebra de Hopf, com antípoda dada por $\overline{S} : H/I \to H/I$ e definida por $\overline{S}(\overline{x}) = \overline{S(x)}$.

Encerramos a seção definindo uma classe de subálgebras de Hopf, chamadas subálgebras normais e apresentamos um resultado necessário no estudo da Seção 2.3 e no Capítulo 4, e que também nos serve de exemplo de ideal de Hopf. Iniciamos notando $H^+ = \ker(\varepsilon)$

para H é uma álgebra de Hopf.

Definição 1.25 *Uma subálgebra de Hopf A de H é dita normal se $HA^+ = A^+H$, em que $A^+ = A \bigcap \ker(\varepsilon_H)$.*

Proposição 1.26 *Seja A uma subálgebra de Hopf de H. Se A é normal, então $I = A^+H$ é um ideal de Hopf em H.*

Demonstração: Claramente, I é um ideal de H, pois A é normal. Agora, como $\varepsilon = (\varepsilon \otimes \varepsilon)\Delta$, notamos que se $a \in A^+$ então

$$\Delta(a) \in A^+ \otimes A + A \otimes A^+,$$

de fato, seja $a \in A^+$, então $a \in \ker(\varepsilon)$ e $a \in A$, logo, $\Delta(a) \in \ker(\varepsilon) \otimes H + H \otimes \ker(\varepsilon)$ e $\Delta(a) \in A \otimes A$, o que implica em $\Delta(a)$ pertencer a intersecção desses conjuntos, ou seja,

$$\Delta(a) \in A^+ \otimes A + A \otimes A^+,$$

e consequentemente,

$$\Delta(ah) \in (A^+ \otimes A + A \otimes A^+)(H \otimes H) = A^+ \otimes H + H \otimes A^+.$$

Portanto A^+H é um coideal. Ainda, como $S(A^+) \subseteq A^+$, segue que a antípoda estabiliza A^+H.

■

1.3 Módulos de Hopf

Seja H um álgebra de Hopf com antípoda S e seja M um H-módulo à direita e um H-comódulo à direita com estrutura dada por $\rho : M \to M \otimes H$.

Definição 1.27 *Dizemos que M é um módulo de Hopf à direita se o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes H \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\rho\otimes\Delta"'] & M \arrow[r, "\rho"] & M \otimes H \\
M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "I_M\otimes\tau\otimes I_H"] & & M \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\cdot\otimes\mu_H"']
\end{tikzcd}$$

ou seja, se

$$\rho(m \cdot h) = \sum_{h,m} (m^{(0)} \cdot h_{(1)}) \otimes (m^{(1)} h_{(2)}),$$

para todo $m \in M$ e todo $h \in H$.

Exemplo 1.28 *Seja V um k-espaço vetorial. Definimos sobre $V \otimes H$ uma estrutura de H-módulo à direita dada por $(v \otimes h)g = v \otimes hg$, e uma estrutura de H-comódulo à direita $\rho : V \otimes H \to V \otimes H \otimes H$ dada por $\rho(v \otimes h) = v \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. Então $V \otimes H$ tem uma estrutura de H-módulo de Hopf.*

Verifiquemos que $\rho((v\otimes h)g) = \sum (v\otimes h)^{(0)} g_{(1)} \otimes (v\otimes h)^{(1)} g_{(2)}$.

$$\begin{aligned}
\rho((v \otimes h)g) &= \rho(v \otimes hg) \\
&= \sum v \otimes (hg)_{(1)} \otimes hg_{(2)} \\
&= \sum v \otimes h_{(1)} g_{(1)} \otimes h_{(2)} g_{(2)} \\
&= \sum (v \otimes h_{(1)}) g_{(1)} \otimes h_{(2)} g_{(2)} \\
&= \sum (v \otimes h)^{(0)} g_{(1)} \otimes (v \otimes h)^{(1)} g_{(2)}.
\end{aligned}$$

No decorrer do trabalho, veremos mais alguns exemplos de módulos de Hopf.

Definição 1.29 *Seja H uma álgebra de Hopf e sejam M e N dois H-módulos de Hopf à direita. Dizemos que uma aplicação linear $f : M \to N$ é um morfismo de módulos de Hopf se f for um morfismo de módulos à direita e um morfismo de comódulos à direita.*

Definição 1.30 *Seja H uma álgebra de Hopf e seja M um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à direita.*

(i) O conjunto dos invariantes de H em M é dado por

$$M^H = \{m \in M / h \cdot m = \varepsilon(h)m, \forall h \in H\};$$

(ii) O conjunto dos coinvariantes de H em M é dado por

$$M^{coH} = \{m \in M / \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Um resultado preliminar que tiramos dessas definições relaciona o conjunto dos coinvariantes de H com o conjunto dos invariantes de H^* em M como segue.

Lema 1.31 *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e M um H-comódulo à direita. Consideremos a estrutura de H^*-módulo à esquerda de M dada por $f \rhd m = \sum m^{(0)} f(m^{(1)})$, então*

$$M^{coH} = M^{H^*}.$$

Demonstração: Mostremos que $M^{coH} \subseteq M^{H^*}$. Sejam $m \in M^{coH}$ e $f \in H^*$, como $\rho(m) = m \otimes 1_H$, temos

$$\begin{aligned} f \rhd m &= \sum f(m^{(1)})m^{(0)} \\ &= \mu(f \otimes I_M)\sigma \circ \rho(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f(1_H)\cdot m \\ &= \varepsilon_{H^*}(f)m. \end{aligned}$$

E portanto, $m \in M^{H^*}$.

Sejam agora $\{h_i\}$ base de H, $\{h_i^*\}$ a base dual de H^*, $m \in M^{H^*}$ e $f \in H^*$. Por $\{h_i\}$ e $\{h_i^*\}$ serem bases de H e H^* respectivamente, temos que $f := \sum f(h_i)h_i^*$. Assim,

$$f \triangleright m = \sum f(h_i)(h_i^* \triangleright m) = \sum f(m^{(1)})m^{(0)}.$$

Logo, como $m \in M^{H^*}$, temos:

$$\begin{aligned} \rho(m) &= \sum (h_i^* \triangleright m) \otimes h_i \\ &= \sum \varepsilon(h_i^*) m \otimes h_i \\ &= m \otimes \sum < h_i^*, 1_H > h_i \\ &= m \otimes 1_H. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.32 *Seja H o H-comódulo com estrutura induzida por Δ. Então $H^{coH} = k1_H$.*

De fato, seja $h \in H^{coH}$, então $\sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \Delta(h) = h \otimes 1_H$, o que implica em $h = \sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H \in k1_H$.

Por outro lado, seja $h = \alpha 1_H \in k1_H$, daí,

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \Delta(\alpha 1_H) \\ &= \alpha\Delta(1_H) \\ &= \alpha(1_H \otimes 1_H) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha 1_h \otimes 1_H \\
&= h \otimes 1_H \\
&\Rightarrow h \in H^{coH}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $H^{coH} = k1_H$*.*

Teorema 1.33 *(Teorema Fundamental de Módulos de Hopf) Seja H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita. Então a aplicação*

$$
\begin{array}{rccc}
f: & M^{coH} \otimes H & \rightarrow & M \\
 & m \otimes h & \mapsto & mh
\end{array}
$$

é um isomorfismo de módulos de Hopf.

Demonstração: Notemos primeiramente que o Exemplo A.5 nos garante uma estrutura de H-módulo de Hopf à direita sobre $M^{coH} \otimes H$. A estrutura de H-módulo de Hopf sobre M é dada pelo seguinte morfismo:

$$
\begin{array}{rccc}
\rho: & M & \rightarrow & M \otimes H \\
 & m & \mapsto & \sum m^{(0)} \otimes m^{(1)}.
\end{array}
$$

Ainda, definimos o morfismo

$$
\begin{array}{rccc}
g: & M & \rightarrow & M \\
 & m & \mapsto & \sum m^{(0)} S(m^{(1)}),
\end{array}
$$

que nos auxiliará na construção da inversa do morfismo f.

Mostremos que para todo $m \in M$, $g(m) \in M^{coH}$.

$$
\begin{aligned}
\rho(g(m)) &= \rho(\textstyle\sum m^{(0)} S(m^{(1)})) \\
&= \textstyle\sum (m^{(0)} S(m^{(1)}))^{(0)} \otimes (m^{(0)} S(m^{(1)}))^{(1)} \\
&= \textstyle\sum m^{(0)(0)} S(m^{(1)})_{(1)} \otimes m^{(0)(1)} S(m^{(1)})_{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rl}
= & \sum m^{(0)(0)} S(m^{(1)}_{(2)}) \otimes m^{(0)(1)} S(m^{(1)}_{(1)}) \\
= & \sum m^{(0)} S(m^{(1)}_{(3)}) \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)}) \\
= & \sum m^{(0)} S(m^{(1)}_{(2)}) \otimes \varepsilon(m^{(1)}_{(1)}) 1_H \\
= & \sum m^{(0)} S(\varepsilon(m^{(1)}_{(1)}) m^{(1)}_{(2)}) \otimes 1_H \\
= & \sum m^{(0)} S(m^{(1)}) \otimes 1_H \\
= & g(m) \otimes 1_H.
\end{array}
$$

Portanto, $g(m) \in M^{coH}$.

Visto isso, faz sentido definirmos o morfismo

$$
\begin{array}{rrcl}
F: & M & \to & M^{coH} \otimes H \\
 & m & \mapsto & \sum g(m^{(0)}) \otimes m^{(1)}.
\end{array}
$$

Mostremos que F é a inversa de f. De fato, sejam $m \in M$ e $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$, logo,

$$
\begin{array}{rcl}
f \circ F(m) & = & f(\sum g(m^{(0)}) \otimes m^{(1)}) \\
 & = & \sum f(g(m^{(0)}) \otimes m^{(1)}) \\
 & = & \sum g(m^{(0)}) m^{(1)} \\
 & = & \sum (m^{(0)})^{(0)} S((m^{(0)})^{(1)}) m^{(1)} \\
 & = & \sum m^{(0)} S(m^{(1)}_{(1)}) m^{(1)}_{(2)} \\
 & = & \sum m^{(0)} \varepsilon(m^{(1)}) 1_H = m.
\end{array}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{array}{rcl}
F \circ f(m \otimes h) & = & F(mh) \\
 & = & \sum g((mh)^{(0)}) \otimes (mh)^{(1)} \\
 & = & \sum g(m^{(0)} h_{(1)}) \otimes m^{(1)} h_{(2)} \\
 & = & \sum g(m h_{(1)}) \otimes h_{(2)}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum (mh_{(1)})^{(0)} S((mh_{(1)})^{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum (m^{(0)} h_{(1)(1)}) S(m^{(1)} h_{(1)(2)}) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum m^{(0)} h_{(1)} S(m^{(1)} h_{(2)}) \otimes h_{(3)} \\
&= \sum m h_{(1)} S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} \\
&= \sum m\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum m \otimes \varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} \\
&= m \otimes h.
\end{aligned}
$$

Por fim, devemos ver que f é um morfismo de H-módulos de Hopf, isto é, f é morfismo de H-módulo e H-comódulo.

Vejamos primeiramente que é morfismo de H-módulos. Seja $m \otimes h \otimes h' \in M \otimes H \otimes H$.

$$
\begin{aligned}
\cdot \circ (f \otimes I_H)(m \otimes h \otimes h') &= \cdot(mh \otimes h') = (mh)h' \\
&= m(hh') = f(m \otimes hh') \\
&= f \circ (I_M \otimes \mu)(m \otimes h \otimes h').
\end{aligned}
$$

Seja agora $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$, então

$$
\begin{aligned}
\rho \circ f(m \otimes h) &= \rho(mh) \\
&= \sum (mh)^{(0)} \otimes (mh)^{(1)} \\
&= \sum m^{(0)} h_{(1)} \otimes m^{(1)} h_{(2)} \\
&= \sum m h_{(1)} \otimes h_{(2)} \\
&= \sum (f \otimes I_H)(m \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\
&= (f \otimes I_H)(I_M \otimes \Delta)(m \otimes h),
\end{aligned}
$$

o que nos diz que f é um morfismo de H-comódulos.

■

1.4 Integrais

Iniciaremos construindo a teoria de integrais sobre biálgebras e então estenderemos os resultados para as álgebras de Hopf. A idéia de integral tem origem, assim como a maior parte da teoria de álgebras de Hopf, na teoria de grupos, onde é definido a integral de Haar sobre um grupo G.

1.4.1 Integrais sobre Biálgebras

Seja H uma biálgebra. Então H^* possui uma estrutura de álgebra que é dual da estrutura de coálgebra de H, com multiplicação dada pelo produto de convolução.

Definição 1.34 *Uma aplicação $T \in H^*$ é chamada integral à esquerda sobre uma biálgebra H se $h^* * T = h^*(1_H) \cdot T$, para todo $h^* \in H^*$*

Definimos por $\int_L$ o conjunto das integrais à esquerda sobre H.

Antes de vermos algumas propriedades e exemplos dessa teoria, observamos que $T \in H^*$ é uma integral à esquerda se, e somente se, $\sum T(h_{(2)})h_{(1)} = T(h)1_H$, para todo $h \in H$.

De fato, seja $T \in H^*$ uma integral à esquerda. Então, para todo $h^* \in H^*$ e todo $h \in H$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} h^* * T(h) & = & \sum h^*(h_{(1)})T(h_{(2)}) & = & h^*(\sum T(h_{(2)})h_{(1)}) \\ \| & & & & \\ h^*(1_H)T(h) & = & h^*(T(h)1_H). & & \end{array}$$

O que implica em $\sum T(h_{(2)})h_{(1)} = T(h)1_H$.

Por outro lado, se $\sum T(h_{(2)})h_{(1)} = T(h)1_H \in H$, então, para todo $h^* \in H^*$ e todo $h \in H$,

$$\begin{array}{ccc} h^*(\sum T(h_{(2)})h_{(1)}) & = & \sum h^*(h_{(1)})T(h_{(2)}) = h^* * T(h) \\ \| & & \\ h^*(T(h)1_H) & = & h^*(1_H)T(h), \end{array}$$

como queríamos.

Ressaltamos ainda que o conjunto $\int_L$ é um ideal de H^*.

É fácil vermos que $\int_L$ é realmente um subespaço vetorial de H^*. Mostremos que é ideal. Seja $g^* \in H^*$ e $T \in \int_L$. Então, para todo $h^* \in H^*$,

$$\begin{aligned} h^* * (T * g^*) &= (h^* * T) * g^* \\ &= (h^*(1_H)T) * g^* \\ &= h^*(1_H)(T * g^*) = h^*(1_H)T * g^*. \\ &\Rightarrow T * g^* \in \textstyle\int_L . \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} h^* * (g^* * T) &= (h^* * g^*) * T \\ &= (h^* * g^*)(1_H)T \\ &= (h^*(1_H)g^*(1_H))T \\ &= h^*(1_H)(g^*(1_H)T) \\ &= h^*(1_H)(g^* * T). \\ &\Rightarrow g^* * T \in \textstyle\int_L . \end{aligned}$$

Lema 1.35 *Seja T uma integral à esquerda e $h,\ h' \in H$, então*

$$\sum h_{(1)}T(h_{(2)}S(h')) = \sum T(hS(h'_{(1)}))h'_{(2)}.$$

Demonstração: Mostraremos o resultado seguindo a linha de raciocínio acima, ou seja, aplicaremos $h^* \in H^*$ arbitrariamente.

$$\begin{aligned}
h^*(\sum h_{(1)}T(h_{(2)}S(h'))) &= \sum h^*(h_{(1)})T(h_{(2)}S(h')) \\
&= \sum h^*(h_{(1)})\varepsilon(h'_{(2)})T(h_{(2)}S(h'_{(1)})) \\
&= \sum h^*(h_{(1)}S(h'_{(2)})h'_{(3)})T(h_{(2)}S(h'_{(1)})) \\
&= \sum h^*(h_{(1)}S(h'_{(1)})_{(1)}h'_{(2)})T(h_{(2)}S(h'_{(1)})_{(2)}) \\
&= \sum(h'_{(2)}) \rightharpoonup h^*((hS(h'_{(1)}))_{(1)})T((hS(h'_{(1)}))_{(2)}) \\
&= \sum(h'_{(2)} \rightharpoonup h^*)(1_H)T(hS(h'_{(1)})) \\
&= \sum h^*(h'_{(2)})T(hS(h'_{(1)})) \\
&= h^*(\sum T(hS(h'_{(1)}))h'_{(2)}),
\end{aligned}$$

como queríamos.

■

Encerramos a sessão mostrando alguns exemplos.

Exemplo 1.36 *Seja G um grupo e seja $H = kG$ a álgebra do grupo G. Então o elemento $p_e \in H^*$, definido por $p_e(g) = \delta_{e,g}$, para todo $g \in G$, é um integral à esquerda de H. De fato, para todo $h^* \in H^*$ e todo $g \in G$, temos*

$$(h^* * p_e)(g) = h^*(g)p_e(g) = \begin{cases} h^*(e), & \text{se } g = e \\ 0, & \text{se } g \neq e \end{cases}$$

portanto, $h^* * p_e = h^*(e)p_e = h^*(1_{kG})p_e$.

Exemplo 1.37 *Mostremos que no Exemplo 1.16, a única integral de H é a nula.*

Consideremos o isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & H^* & \to & k[[x]] \\ & h^* & \mapsto & \sum\limits_{n\geqslant 0} h^*(c_n)X^n \end{array},$$

e supomos $T \in H^*$ integral à esquerda, então.

$$\begin{array}{rcl} h^* * T & = & h^*(1_H)T \\ \Rightarrow \quad \varphi(h^* * T) & = & \varphi(h^*(1_H)T) \\ \Rightarrow \quad \varphi(h^*)\varphi(T) & = & h^*(1_H)\varphi(T) \\ \Rightarrow \quad \varphi(h^*)\varphi(T) & = & \varphi(h^*)(0)\varphi(T). \end{array}$$

Segue que $\varphi(T)$ é uma série formal tal que $F\varphi(T) = F(0)\varphi(T)$, para todo $F \in k[[X]]$.

Então, tomando $F \not\equiv 0$ de forma que $F(0) \neq 0$, segue que $\varphi(T) = 0$, pois $k[[X]]$ não tem divisores de zero, uma vez que k é corpo.

E como φ é um isomorfismo, temos que $T \equiv 0$ e portanto, $\int_L = \{0\}$.

1.4.2 Integral em álgebras de Hopf

Consideremos agora H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Uma integral em H, a grosso modo, é simplesmente um invariante sobre a multiplicação à esquerda.

Definição 1.38 *Uma integral à esquerda em H é um elemento $t \in H$ tal que $ht = \varepsilon(h)t$ para todo $h \in H$.*

Este conceito de integral está relacionado com o apresentado na seção anterior, pois uma integral em H é simplesmente uma integral sobre H^* e portanto um elemento de H^{**}, visto sob o isomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & H & \to & H^{**} \\ & h & \mapsto & \widehat{h}, \end{array}$$

em que $\widehat{h}(f) = f(h)$, isto porque H tem dimensão finita.

Primeiramente, observamos que $\widehat{k} * \widehat{h} = \widehat{kh}$. De fato, para todo $f \in H^*$,

$$\begin{array}{rcl} \widehat{k} * \widehat{h}(f) & = & \sum \widehat{k}(f_{(1)})\widehat{h}(f_{(2)}) \\ & = & \sum f_{(1)}(k) f_{(2)}(h) \\ & = & f(kh) = \widehat{kh}(f). \end{array}$$

Agora, se h é uma integral em H, temos,

$$\widehat{k} * \widehat{h} = \widehat{kh} = \widehat{\varepsilon(k)h} = \varepsilon(k)\widehat{h} = \widehat{k}(\varepsilon)\widehat{(h)} = \widehat{k}(1_{H^*})\widehat{h}.$$

Podemos definir também uma integral à direita em H por um elemento $t' \in H$ tal que $t'h = \varepsilon(h)t'$, para todo $h \in H$. Definimos o conjunto das integrais à esquerda em H por $\int_H^L$ e à direita por $\int_H^R$.

Dizemos que H é unimodular se $\int_H^L = \int_H^R$.

Exemplo 1.39 *Seja $H = kG$ álgebra de Hopf. Então $t = \sum\limits_{g \in G} g$ gera o espaço das integrais à esquerda e à direita em H.*

Exemplo 1.40 *Seja $H = (kG)^*$ álgebra de Hopf. Então $t = p_1$ gera o espaço das integrais à esquerda e à direita em H.*

Exemplo 1.41 *Seja H uma álgebra de Hopf sobre k, K uma extensão do corpo k e $\overline{H} = K \otimes_k H$ a álgebra de Hopf sobre k, com estrutura de comultiplicação dada por $\Delta(\alpha \otimes c) := \sum(\alpha \otimes c_{(1)}) \otimes (1_K \otimes c_{(2)})$ e counidade $\varepsilon(\alpha \otimes c) = \alpha\phi(\varepsilon(c))$, em que $\phi : k \to K$. então, se $T \in H^*$*

é integral à esquerda sobre H implica que $\overline{T} \in \overline{H}^*$ é integral à esquerda sobre $\overline{H}$, em que $\overline{T}(\delta \otimes_k h) := \delta T(h)$, para todo $\delta \otimes h \in K \otimes_k H$.

De fato, seja $\delta \otimes h \in K \otimes_k H$, logo,

$$\begin{aligned}
\sum(\delta \otimes h)_{(1)}\overline{T}((\delta \otimes h)_{(2)}) &= \sum \delta \otimes h_{(1)}\overline{T}(1_K \otimes h_{(2)}) \\
&= \sum \delta \otimes h_{(1)}T(h_{(2)})1_K \\
&= \sum \delta \otimes h_{(1)}T(h_{(2)}) \\
&= \delta \otimes T(h)1_H \\
&= \delta T(h) \otimes 1_H \\
&= \overline{T}(\delta \otimes h) \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos o resultado mais importante relativo a integrais em álgebras de Hopf de dimensão finita, vamos estabelecer uma estrutura de H-módulo de Hopf à direita sobre H^*.

Primeiramente, a multiplicação em H^* define de maneira natural uma estrutura de H^*-módulo à esquerda em H^*, a saber,

$$\varphi \triangleright \psi = \varphi * \psi.$$

Seja $\{h_i^*\}_{i=1}^n \subseteq H^*$ uma base em H^* e $\{h_i\}_{i=1}^n \subseteq H$ a base dual, tal que $h_i^*(h_j) = \delta_{ij}$ (vide [9], p. 20).

Assim, para todo $\varphi, \psi \in H^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi &= \sum_{i=1}^n (\varphi * \psi)(h_i)h_i^* \\
&= \sum_{i=1}^n \sum \varphi(h_{i_{(1)}})\psi(h_{i_{(2)}})h_i^* \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi(\sum h_{i_{(1)}}\psi(h_{i_{(2)}}))h_i^* \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi(f_i^{(\psi)})h_i^*.
\end{aligned}$$

Notemos que $f_i^{(\psi)}$ depende explicitamente de ψ. Portanto, se definirmos a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} \rho: & H^* & \to & H^* \otimes H \\ & \psi & \mapsto & \sum h_i^* \otimes f_i^{(\psi)} \end{array}$$

teremos uma estrutura de H-comódulo à direita sobre H^*.

Verifiquemos que ρ está bem definida como transformação linear. Suponhamos $\sum \alpha_j \varphi_j \equiv 0$, $\alpha_j \in k$, $\varphi_j \in H^*$. Então,

$$\begin{aligned} \rho(\sum \alpha_j \varphi_j) &= \sum_j \alpha_j \sum_i h_i^* \otimes f_i^{(\varphi_j)} \\ &= \sum_i h_i^* \otimes \sum_j \alpha_j f_i^{(\varphi_j)}. \end{aligned}$$

Avaliemos nesta igualdade $(\widehat{h_k} \otimes I_H)$, em que $\widehat{h_k} \in H^{**}$ é da forma $\widehat{h_k}(\varphi) = \varphi(h_k)$. Daí,

$$\begin{aligned} (\widehat{h_k} \otimes I_H)\rho(\sum \alpha_j \varphi_j) &= \sum_j \alpha_j f_k^{(\varphi_j)} \\ &= \sum_j \alpha_j \sum h_{k_{(1)}} \varphi_j(h_{k_{(2)}}) \\ &= \sum h_{k_{(1)}} (\sum \alpha_j \varphi_j)(h_{k(2)}) = 0 \\ &\Rightarrow \rho(\sum \alpha_j \varphi_j) = 0, \end{aligned}$$

o que garante a boa definição de f.

Lema 1.42 *A álgebra de Hopf H^* com coação à direita dada pelo morfismo $\rho : H^* \to H^* \otimes H$, em que $\rho(\psi) = \sum h_i^* \otimes f_i^{(\psi)}$ e ação à direita dada por $\leftharpoondown: H^* \otimes H \to H^*$ e definida por $\leftharpoondown (\varphi \otimes h) = \varphi \leftharpoondown h$, em que $(\varphi \leftharpoondown h)(k) = (S(h) \rightharpoonup \varphi)(k) = \varphi(kS(h))$, definem uma estrutura de H-módulo de Hopf à direita em H^*.*

Demonstração: Vamos verificar que $\leftharpoondown$ realmente define uma estrutura de módulo à direita. Sejam $\varphi \in H^*$ e $h,\ k,\ l \in H$, então

$$\begin{aligned}((\varphi \leftharpoondown h) \leftharpoondown k)(l) &= (\varphi \leftharpoondown h)(lS(k)) \\ &= \varphi(lS(k)S(h)) \\ &= \varphi(lS(hk)) \\ &= (\varphi \leftharpoondown hk)(l).\end{aligned}$$

Mostremos que para todo $\varphi,\ \psi \in H^*$, $\psi * \varphi = (I_{H^*} \otimes \psi)\rho(\varphi)$. Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned}(I_{H^*} \otimes \psi)\rho(\varphi)(h) &= \sum \langle \psi, f_i^{(\varphi)} \rangle \langle h_i^*, h \rangle \\ &= \langle \sum \langle \psi, f_i^{(\varphi)} \rangle h_i^*, h \rangle \\ &= \langle \psi * \varphi, h \rangle \\ &= (\psi * \varphi)(h).\end{aligned}$$

Vejamos agora que ρ é um morfismo de comódulos, ou seja,

$$(\rho \otimes I_H)\rho(\varphi) = (I_{H^*} \otimes \Delta)\rho(\varphi).$$

De fato, para todo $\psi,\ \theta \in H^*$, temos:

$$\begin{aligned}(I_{H^*} \otimes \psi \otimes \theta)(\rho \otimes I_H)\rho(\varphi) &= (I_{H^*} \otimes \psi \otimes \theta) \sum (\rho \otimes I_H)(h_i^* \otimes f_i^{(\varphi)}) \\ &= (I_{H^*} \otimes \psi \otimes \theta) \sum_{i,j} h_j^* \otimes h_{ji} \otimes f_i^{(\varphi)} \\ &= \sum_{i,j} h_j^* \langle \psi, h_{ji} \rangle \langle \eta, f_i^{(\varphi)} \rangle \\ &= \sum_{i,j} (\psi * h_j^*) \langle \eta, f_i^{(\varphi)} \rangle \\ &= \sum_{i,j} \psi * (h_j^* \langle \eta, f_i^{(\varphi)} \rangle) \\ &= \psi * (\eta * \varphi).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(I_{H^*} \otimes \psi \otimes \theta)(I_{H^*} \otimes \Delta)\rho(\varphi) &= (I_{H^*} \otimes \psi \otimes \eta) \sum h_j^* \otimes f_{i_{(1)}} \otimes f_{i_{(2)}} \\
&= \sum h_i^* \langle \psi, f_{i_{(1)}} \rangle \langle \eta, f_{i_{(2)}} \rangle \\
&= \sum h_i^* \langle \psi * \eta, f_i \rangle \\
&= (\psi * \eta) * \varphi.
\end{aligned}$$

E portanto, ρ é um morfismo de comódulos.

Por fim, vejamos que

$$\rho(\varphi \leftharpoondown h) = \sum \varphi^{(0)} \leftharpoondown h_{(1)} \otimes \varphi^{(1)} h_{(2)} = \sum h_i^* \leftharpoondown h_{(1)} \otimes f_i(h_{(2)})$$

Sejam $\varphi,\ \psi \in H^*$ e $h,\ k \in H$, então:

$$\begin{aligned}
(I_{H^*} \otimes \psi)\rho(\varphi \leftharpoondown h)(k) &= (\psi * (\varphi \leftharpoonup h))(k) \\
&= \sum \psi(k_{(1)})\varphi(k_{(2)}S(h)),
\end{aligned}$$

onde $\leftharpoonup: H^* \otimes H \to H^*$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&(I_{H^*} \otimes \psi)(\sum h_i^* \leftharpoondown h_{(1)} \otimes f_i(h_{(2)}))(k) = \\
&= \sum \langle h_i^* \leftharpoondown h_{(1)}, k \rangle \langle \psi, f_i h_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle h_i^*, kS(h_{(1)}) \rangle \langle \psi_{(1)}, f_i \rangle \langle \psi_{(2)}, h_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle \psi_{(1)} * \varphi, kS(h_{(1)}) \rangle \langle \psi_{(2)}, h_{(2)} \rangle \\
&= \sum \langle \psi_{(1)}, k_{(1)}S(h_{(2)}) \rangle \langle \varphi, k_{(2)}S(h_{(1)}) \rangle \langle \psi_{(2)}, h_{(3)} \rangle \\
&= \sum \langle \psi, k_{(1)}S(h_{(2)})h_{(3)} \rangle \langle \varphi, k_{(2)}S(h_{(1)}) \rangle \\
&= \sum \langle \psi, k_{(1)} \rangle \langle \varphi, k_{(2)}S(h) \rangle.
\end{aligned}$$

E como este resultado vale para todo $\psi \in H^*$ e todo $k \in H$, segue que

$$\rho(\varphi \leftharpoonup h) = \sum \varphi^{(0)} \leftharpoonup h_{(1)} \otimes \varphi^{(1)} h_{(2)} = \sum h_i^* \leftharpoonup h_{(1)} \otimes f_i(h_{(2)})$$

■

Teorema 1.43 *Seja H uma álgebra de Hopf de $dim < \infty$. São válidas:*

(i) $\int_H^L$ e $\int_H^R$ são ambas unidimensionais;

(ii) A antípoda S de H é bijetiva e $S(\int_H^L) = \int_H^R$;

Demonstração: (i) Pelo lema acima $H^* \in \mathcal{M}_H^H$. Então, pelo Teorema Fundamental de módulos de Hopf, temos que $H^* \simeq H^{*coH} \otimes H$ e isto implica que $dim H^{*coH} = 1$ pois $dim H^* = dim H$.

Pelo Lema 1.31

$$H^{*coH} = H^{*H^*} = \{f \in H^* : g{*}f = \varepsilon_{H^*}(g)f, \text{ para todo } g \in H^*\} = \int_{H^*}^l .$$

Assim, $dim \int_{H^*}^L = 1$. Consequentemente, se substituirmos $H^{**} \simeq H$ por H^* provamos que $dim \int_H^L = 1$.

(ii) Sejam $0 \neq f \in \int_{H^*}^l$ e $h \in ker(S)$. Notemos que f existe pois $H^{*^{coH}} = \int_{H^*}^L \neq 0$. Então, tomando α o isomorfismo dado pelo Teorema Fundamental de módulos de Hopf, 1.33,

$$\alpha(f \otimes h) = f \leftharpoonup h = S(h) \rightharpoonup f = f(S(h)) = 0 = \alpha(0).$$

Logo, $f \otimes h = 0$ e portanto $h = 0$.

Logo, S é injetiva e como $dim(H) < \infty$ temos que S é bijetiva.

Por fim, mostremos que $S(\int_H^L) = \int_H^R$. Seja $m \in \int_H^L$, daí,

$$
\begin{aligned}
S(m)h &= S(m)S \circ S^{-1}(h) \\
&= S(S^{-1}(h)m) \\
&= S(\varepsilon(h)m) = \varepsilon(h)S(m),
\end{aligned}
$$

portanto, $S(m) \in \int_H^R$.

■

Definição 1.44 *Uma álgebra A é dita semissimples se ela é um A-módulo à direita semisimples, ou seja, se $A = \bigoplus_{i \in J} N_i$, em que J é um conjunto de índices e para todo $i \in J$, N_i é um A-módulo à direita simples.*

Uma caracterização equivalente de uma álgebra semissimples é a seguinte:

Se M é um A-módulo à esquerda e $N \subseteq M$ é um A-submódulo, então existe um A-submódulo $N' \subseteq M$ tal que $M \simeq N \oplus N'$.

Teorema 1.45 (Teorema de Maschke) *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então H é uma álgebra semisimples $\Leftrightarrow$ $\varepsilon(t) \neq 0$ para algum $t \in \int_H^l$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$

Sabemos que $\ker(\varepsilon)$ é um ideal de codimensão 1 em H. Como $\ker(\varepsilon)$ é um submódulo à esquerda de H e H é semisimples, $\ker(\varepsilon)$ é um somando direto em H. Então existe $I \subseteq H$ um ideal à esquerda tal que $H = \ker(\varepsilon) \oplus I$.

Seja $1_H = z+h$ com $z \in \ker(\varepsilon)$ e $h \in I$. É claro que $h \neq 0$ pois $1_H \notin \ker(\varepsilon)$. Como $\ker(\varepsilon)$ tem codimensão 1, segue que $dim(I) = 1$.

Seja ainda $l \in H$, então $lh \in I$ e portanto $lh = 0 + lh$. Por outro lado, $l = (l - \varepsilon(l)1_H) + \varepsilon(l)1_H$, o que implica em

$$(l - \varepsilon(l)1_H)h + \varepsilon(l)h = lh,$$

em que $(l - \varepsilon(l)1_H)h \in \ker(\varepsilon)$ e $\varepsilon(l)h \in I$.

Logo, $(l - \varepsilon(l)1_H)h = 0$, pois $lh = 0 + lh$ e a representação é única. Portanto, $lh = \varepsilon(l)h$ para qualquer $l \in H$, ou seja, $h \in \int_H^l$ e como $I \cap \ker(\varepsilon) = 0$ e $h \neq 0$, segue que $\varepsilon(h) \neq 0$.

$(\Leftarrow)$

Seja $\varepsilon(t) \neq 0$ para algum $t \in \int_H^l$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\varepsilon(t) = 1$ (caso contrário tome $l = t/\varepsilon(t)$).

Precisamos mostrar que para qualquer H-módulo M e para qualquer H-submódulo N de M, N é somando direto de M.

Seja $\pi : M \to N$ uma projeção qualquer tal que $\pi(n) = n$ para todo $n \in N$ (N é somando direto de M como espaço vetorial).

Definimos $P : M \to N$ por $P(m) = \sum_t t_{(1)}\pi(S(t_2)m)$ para todo $m \in M$. Seja $n \in N$, então

$$\begin{aligned} P(n) &= \textstyle\sum_t t_{(1)}\pi(S(t_{(2)})n) = \sum_t t_{(1)}S(t_{(2)})n \\ &= \left(\textstyle\sum_t t_{(1)}S(t_{(2)})\right) n = \varepsilon(t)1_H n = n. \end{aligned}$$

Mostremos que P é um morfismo de H-módulos à esquerda. Sejam $m \in M$ e $h \in H$, então:

$$
\begin{aligned}
hP(m) &= \sum_t ht_{(1)}\pi(S(t_{(2)})m) \\
&= \sum_{t,h} h_{(1)}t_{(1)}\pi(S(t_{(2)})\varepsilon(h_{(2)})m) \\
&= \sum_{t,h} h_{(1)}t_{(1)}\pi(S(t_{(2)})S(h_{(2)})h_{(3)}m) \\
&= \sum_{t,h} h_{(1)}t_{(1)}\pi(S(h_{(2)}t_{(2)})h_{(3)}m) \\
&= \sum_{t,h}(h_{(1)}t)_{(1)}\pi(S((h_{(1)}t)_{(2)})h_{(2)}m) \\
&= \sum_{t,h} \varepsilon(h_{(1)})(t_{(1)}\pi(S(t_{(2)})h_{(2)}m)) \\
&= \sum_t t_{(1)}\pi(S(t_{(2)})hm) \\
&= P(hm).
\end{aligned}
$$

Portanto, existe um morfismo de H-módulos $P : M \to N$ tal que $P(n) = n$ para todo $n \in N$. Logo $M = N \oplus \ker(P)$ e o resultado procede.

■

1.5 Produto Smash

Lembramos que uma álgebra (A, μ, η) é dita um H-módulo álgebra à esquerda se A é um H-módulo à esquerda, em que μ e η são morfismos de H-módulos à esquerda, ou seja,

(i) $h \triangleright ab = \sum(h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)$, para todo $a, b \in A$, $h \in H$;

(ii) $h \triangleright 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Ainda, dizemos que A é um H-comódulo álgebra à direita se A é um H-comódulo à direita em que μ e η são morfismos de H-comódulos à direita, ou seja,

(i) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = \sum a^{(0)}b^{(0)} \otimes a^{(1)}b^{(1)}$, para todo $a, b \in A$;

(ii) $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Definição 1.46 *Seja A um H-módulo álgebra. Definimos por Produto Smash a álgebra $A\#H$, em que:*

(i) $A\#H = A \otimes H$ como k-espaço vetorial;

(ii) $(a\#h)(b\#k) = \sum a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}k$.

Mostremos que o produto definido acima é associativo. Sejam $(a\#h),\ (b\#k),\ (c\#l) \in A\#H$, daí,

$$\begin{aligned}
((a\#h)(b\#k))(c\#l) &= (\sum a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}k)(c\#l) \\
&= \sum(a(h_{(1)} \triangleright b))(h_{(2)}k_{(1)} \triangleright c)\#h_{(3)}k_{(2)}l \\
&= \sum(a(h_{(1)} \triangleright b))(h_{(2)} \triangleright (k_{(1)} \triangleright c))\#h_{(3)}k_{(2)}l \\
&= \sum a(h_{(1)} \triangleright (b(k_{(1)} \triangleright c)))\#h_{(2)}k_{(2)}l \\
&= (a\#h)(\sum b(k_{(1)} \triangleright c)\#k_{(2)}l) \\
&= (a\#h)((b\#k)(c\#l)).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.47 *Para quaisquer H e A, podemos definir a ação trivial de H sobre A por $h \triangleright a = \varepsilon(h)a$, para todo $h \in H$ e todo $a \in A$. Vejamos que com a ação dada, A é um H-módulo álgebra e ainda, que $A\#H \simeq A \otimes H$ como álgebras.*

Por se tratar da ação trivial, claramente A é um H-módulo álgebra e portanto, $A\#H$ define o produto Smash, ainda, para todo $(a\#h),\ (b\#k) \in A\#H$, temos

$$\begin{aligned}
(a\#h)(b\#k) &= \sum a(h_{(1)} \triangleright b)\#h_{(2)}k \\
&= \sum a\varepsilon(h_{(1)})b\#h_{(2)}k \\
&= \sum ab\#\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}k \\
&= ab\#hk = ab \otimes hk.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.48 *Definimos uma ação de H em H^* por:*

$$\begin{array}{rccc} \rightharpoonup: & H \otimes H^* & \to & H^* \\ & h \otimes f & \mapsto & h \rightharpoonup f, \end{array}$$

onde $(h \rightharpoonup f)(l) := f(lh)$. Vejamos que H^* é um H-módulo álgebra e definamos o produto Smash.

De fato, sejam $g,\ h \in H$ e $f \in H^*$, então, para todo $l \in H$, temos:

$$\begin{aligned} (g \rightharpoonup (h \rightharpoonup f))(l) &= (h \rightharpoonup f)(lg) \\ &= f((lg)h) = f(l(gh)) \\ &= (gh \rightharpoonup f)(l), \end{aligned}$$

e

$$(1_H \rightharpoonup f)(l) = f(l1_H) = f(l).$$

Portanto, $\rightharpoonup$ define uma estrutura de H-módulo sobre H^*. Mostremos que H^* possui estrutura de H-módulo álgebra. Sejam $f, g \in H^*$ e $h \in H$, então, para todo $l \in H$, temos:

$$\begin{aligned} (h \rightharpoonup f * g)(l) &= (f * g)(lh) \\ &= \sum f(l_{(1)}h_{(1)})g(l_{(2)}h_{(2)}) \\ &= \sum (h_{(1)} \rightharpoonup f)(l_{(1)})(h_{(2)} \rightharpoonup g)(l_{(2)}) \\ &= \sum (h_{(1)} \rightharpoonup f) * (h_{(2)} \rightharpoonup g)(l), \end{aligned}$$

e

$$(h \rightharpoonup \varepsilon)(l) = \varepsilon(lh) = \varepsilon(l)\varepsilon(h),$$

o que implica em $(h \rightharpoonup \varepsilon = \varepsilon(h)\varepsilon)$. Assim, H^* possui estrutura de

H-módulo álgebra e podemos definir $H^*\#H$, com produto dado por:

$$\begin{aligned}(f\#a)(g\#b) &= \sum f*(a_{(1)}\rightharpoonup g)\#a_{(2)}b \\ &= \sum(1_H\rightharpoonup f)*(a_{(1)}\rightharpoonup g)\#a_{(2)}b,\end{aligned}$$

para todo $f,\ g\in H^*$ e todo $a,\ b\in H$.

Exemplo 1.49 *Seja $H=kG$ e A um kG-comódulo álgebra. Sabemos que A é um espaço vetorial G-graduado, isto é, $A=\bigoplus_{g\in G} A_g$, e para $a_g\in A_g$, temos*

$$\rho(a_g)=a_g\otimes g.$$

Então, $\rho(a_gb_h)=a_gb_h\otimes gh$, o que implica em $a_gb_h\in A_{gh}$, para todo $g,\ h\in G$, e ainda, $1_A\in A_1$, o que implica em A ser uma álgebra G-graduada.

No caso em que G é um grupo finito, temos que A é uma álgebra G-graduada ((kG)-comódulo álgebra) se, e somente se, A é $(kG)^*$-módulo álgebra.

Notamos que $p_g\triangleright A := A_g$, ou seja, o conjunto $\{p_g\}$ age como a projeção em A. Assim, visto que $\Delta(p_x)=\sum_{uv=x} p_u\otimes p_v$, a estrutura de multiplicação sobre $A\#(kG)^*$, para todo $a,\ b\in A$ e todo $p_g,\ p_h\in(kG)^*$ é dada por:

$$(a\#p_g)(b\#p_h)=\sum_{uv=g} a(p_u\triangleright b)\#p_vp_h \overset{u=gh^{-1}}{\underset{v=h}{=}} ab_{gh^{-1}}\#p_h.$$

1.6 Função Traço

A idéia nessa seção é generalizar a noção de função traço existente na teoria de ações de grupo. Seja G um grupo finito que age sobre uma álgebra A, definimos a função traço como:

$$\begin{array}{rccc} tr: & A & \to & A^G \\ & a & \mapsto & \sum\limits_{g \in G} g \triangleright a \end{array}.$$

Assim, se considerarmos a álgebra de Hopf como sendo a álgebra de grupo kG, sabemos que $\sum\limits_{g \in G} g$ é uma integral sobre kG, o que nos leva a seguinte definição:

Definição 1.50 *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita agindo sobre um H-módulo álgebra A e $0 \neq t \in \int_H^l$. Então a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} \widehat{t}: & A & \to & A^H \\ & a & \mapsto & \widehat{t}(a) := t \triangleright a \end{array}$$

é uma aplicação de A^H-bimódulos com valores em A^H.

Para verificarmos isso, temos de mostrar que $\widehat{t}$ é um morfismo de álgebras, ou seja, para todo $a \in A$ e $x \in A^H$,

$$\widehat{t} \circ \mu(x \otimes a) = \mu \circ (I_{A^H} \otimes \widehat{t})(x \otimes a) \text{ e } \widehat{t} \circ \mu(a \otimes x) = \mu \circ (\widehat{t} \otimes I_{A^H})(a \otimes x).$$

De fato,

$$\begin{array}{rcccc} \widehat{t} \circ \mu(x \otimes a) & = & \widehat{t}(xa) & = & t \triangleright (xa) \\ & = & \sum (t_{(1)} \triangleright x)(t_{(2)} \triangleright a) & = & \sum \varepsilon(t_{(1)}) x (t_{(2)} \triangleright a) \\ & = & x(t \triangleright a) & = & x(\widehat{t}(a)) \\ & = & \mu(x \otimes \widehat{t}(a)) & = & \mu \circ (I_{A^H} \otimes \widehat{t})(x \otimes a), \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc}
\widehat{t}\circ\mu(a\otimes x) & = & \widehat{t}(ax) & = & t\rhd ax \\
& = & \sum(t_{(1)}\rhd a)(t_{(2)}\rhd x) & = & \sum(t_{(1)}\rhd a)\varepsilon(t_{(2)})x \\
& = & (t\rhd a)x & = & (\widehat{t}(a))x \\
& = & \mu(\widehat{t}(a)\otimes x) & = & \mu\circ(\widehat{t}\otimes I_{A^H})(a\otimes x).
\end{array}$$

Chamamos $\widehat{t}$ de função traço.

A partir deste momento, salvo quando dito o contrário, indicaremos as álgebras A e H com as subálgebras $A\#1_H$ e $1_A\#H$ de $A\#H$, respectivamente.

Lema 1.51 *Sejam A um H-módulo álgebra e suponhamos que o morfismo $\widehat{t}: A\to A^H$ é sobrejetivo. Então existe um elemento idempotente não nulo $e\in A\#H$ tal que $e(A\#H)e = A^He \simeq A^H$ como álgebras.*

Demonstração: Primeiro, sejam $h\in H$, $a\in A$ e $t\in\int_H^l$, notemos que, no produto Smash A# H, $hat = (h\rhd a)t$. De fato,

$$\begin{aligned}
hat &= (1_A\#h)(a\#t)\\
&= \sum 1_A(h_{(1)}\rhd a)\#h_{(2)}t\\
&= \sum(h_{(1)}\rhd a)\#\varepsilon(h_{(2)})t\\
&= (h\rhd a)\#t = (h\rhd a)t.
\end{aligned}$$

Definamos nosso elemento idempotente e. Como $1_A\in A^H$ e $\widehat{t}$ é sobrejetora, existe $c\in A$ tal que $\widehat{t}(c) = 1_A$, ou seja, temos que $t\rhd c = 1_A$. Portanto, definimos $e := tc = (1_A\#t)(c\#1_H)$. Claramente e é idempotente, pois

$$e^2 = tctc = (t\rhd c)tc = 1_Atc = tc = e.$$

Vejamos que vale a igualdade $e(A\#H)e = A^H e$. Sejam $a \in A$ e $h \in H$, daí:

$$\begin{aligned} e(a\#h)e &= tc(a\#h)tc \\ &= tca(ht)c \\ &= \varepsilon(h)tcatc \\ &= \varepsilon(h)(t \triangleright (ca))tc \in A^H e, \end{aligned}$$

pois $\varepsilon(h)(t \triangleright (ca)) \in A^H$.

Por outro lado, para todo $a \in A^H$ e $t \in \int_H^l$, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{t}(ca) &= t \triangleright (ca) = \sum (t_{(1)} \triangleright c)(t_{(2)} \triangleright a) \\ &= \sum (t_{(1)} \triangleright c)\varepsilon(t_{(2)})a = (t \triangleright c)a = a, \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} ae &= atc \\ &= (t \triangleright c)atc \\ &= (t \triangleright ca)tc \\ &= tcatc = eae \in eA\#He. \end{aligned}$$

Por fim, mostremos que $A^H e \simeq A^H$ com álgebras. Sejam $a,\ b \in A^H$, então,

$$\begin{aligned} (ae)(be) &= (atc)(btc) \\ &= a(tcbt)c \\ &= a(t \triangleright (cb))tc \\ &= \sum a(t_{(1)} \triangleright c)(t_{(2)} \triangleright b)tc \\ &= \sum a(t_{(1)} \triangleright c)\varepsilon(t_{(2)})btc \\ &= \sum a(t \triangleright c)btc \\ &= abtc = abe. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

1.6.1 Integral total

Definição 1.52 *Seja A um H-comódulo álgebra à direita. Uma integral total à direita para A é um morfismo $\Phi : H \to A$ de H-comódulo à direita tal que $\Phi(1_H) = 1_A$.*

Lembramos, por um teorema análogo ao Lema 1.51, mas agora com H^* sendo H-módulo de Hopf à esquerda, que se $0 \neq T \in \int_{H^*}^{l}$, então o morfismo $\theta : H \to H^*$ dado por $\theta(h) = (h \rightharpoonup T)$ é um isomorfismo de H-módulos à esquerda. Assim, tomando $t = \theta^{-1}(\varepsilon)$, temos que $t \rightharpoonup T = \varepsilon$. Mostremos que $t \in \int_{H}^{l}$.

De fato, sejam $h,\ k \in H$, então

$$\begin{array}{rclcl} \theta(ht)(k) & = & (ht \rightharpoonup T)(k) & = & (h \rightharpoonup (t \rightharpoonup T))(k) \\ & = & (h \rightharpoonup \varepsilon)(k) & = & \varepsilon(kh) \\ & = & \varepsilon(k)\varepsilon(h) & = & \varepsilon(h)(t \rightharpoonup T)(k) \\ & = & \varepsilon(h)\theta(t)(k) & = & \theta(\varepsilon(h)t)(k), \end{array}$$

e como é válido para todo $k \in H$, temos que $\theta(ht) = \theta(\varepsilon(h)t)$ e pela injetividade de θ, concluímos que $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$.

O lema a seguir relaciona a função traço definida na seção anterior com a definição de integral total.

Lema 1.53 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então o morfismo $\widehat{t} : A \to A^H$ é sobrejetivo se, e só se, existe uma integral total $\Phi : H^* \to A$. Aqui, consideramos A com estrutura de H^*-comódulo álgebra à direita.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $\widehat{t}$ é sobrejetiva. Então, existe

$c \in A$ tal que $\widehat{t}(c) = t \triangleright c = 1_{A^H} = 1_A$. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & H^* & \to & A \\ & f & \mapsto & \theta^{-1}(f) \triangleright c \end{array}.$$

Como θ é isomorfismo de H-módulos à esquerda, segue que Φ é morfismo de H-módulo à esquerda, e portanto, morfismo de H^*-comódulo à direita. Ainda, $\Phi(\varepsilon) = \theta^{-1}(\varepsilon) \triangleright c = t \triangleright c = 1_A$.

Assim, Φ é uma integral total à direita para A.

($\Leftarrow$) Seja $\Phi : H^* \to A$ uma integral total à direita para A. Mostremos que $\widehat{t}$ é sobrejetiva. Para tanto, devemos ver que existe $c \in A$ tal que $t \triangleright c = 1_A$.

De fato, tome $c = \Phi(T)$, logo,

$$t \triangleright c = t \triangleright \Phi(T) = \Phi(t \rightharpoonup T) = \Phi(\varepsilon) = 1_A.$$

■

No que segue, veremos mais alguns resultados importantes quando consideramos o fato de $\widehat{t}$ ser sobrejetivo.

Primeiramente, lembremos que $dim \int_H^L = 1$ e $\int_H^L$ é um ideal de H, portanto, para todo $h \in H$, $th \in \int_H^L$, ou seja, existe $\alpha : H \to k$ que envia h em $\alpha(h)$ tal que $th = \alpha(h)t$.

Claramente, α é linear, e se t é tal que existe um funcional ε, com $\varepsilon(t) = 1_k$, temos que

$$\alpha(hk)t = t(hk) = (th)k = \alpha(h)tk = \alpha(h)\alpha(k)t.$$

E aplicando ε a esta última igualdade, vemos que

$$\alpha(hk) = \alpha(h)\alpha(k),$$

ou seja, α é homomorfismo de álgebra.

Ainda, para todo $h,\ k \in H$, como $\Delta(\alpha) = \sum \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)}$ se, e somente se, $\alpha(hk) = \sum \alpha_{(1)}(h)\alpha_{(2)}(k)$, temos que

$$\Delta\alpha(h \otimes k) = \alpha(hk) = \alpha(h)\alpha(k) = (\alpha \otimes \alpha)(h \otimes k).$$

Portanto, $\Delta\alpha = \alpha \otimes \alpha$, ou seja, α é um elemento group-like em H^*. A este elemento denominamos "elemento group-like distinto"de H^*.

Ainda nesta estrutura de group-like, podemos enunciar o seguinte lema, cuja demonstração é encontrada em [29].

Lema 1.54 *Se t é uma integral à esquerda de A, então $S(t) = \alpha \rightharpoonup t$.*

Lema 1.55 *Sejam A um H-módulo álgebra e $0 \neq t \in \int_H^l$. Então, para todo $a \in A$ e $h \in H$, temos em $A\#H$*

(i) $ah = \sum h_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a)$;

(ii) $hat = (h \triangleright a)t$ e $tah = t(S^{-1}(h^\alpha) \triangleright a)$, onde $\alpha \in H^*$ e $h^\alpha = \alpha \rightharpoonup h$;

(iii) $(t) = AtA$ é ideal de $A\#H$.

Demonstração: (i) De fato,

$$\begin{aligned}
\sum h_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a) &= \sum (1_A \# h_{(2)})(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a \# 1_H) \\
&= \sum 1_A(h_{(2)} \triangleright (S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a)) \# h_{(3)} \\
&= \sum (h_{(2)} S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a \# h_{(3)} \\
&= \sum a \# \varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} \\
&= a \# h = ah.
\end{aligned}$$

(ii) Vimos na demonstração do Lema 1.51 que $hat = (h \triangleright a)t$. Mostremos então que $tah = t(S^{-1}(h^{\alpha}) \triangleright a)$. Para tanto, usaremos (i) e o fato de que $th = \alpha(h)t$, assim,

$$\begin{aligned}
tah &\overset{(i)}{=} \sum th_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a) \\
&= \sum \alpha(h_{(2)})t(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a) \\
&= \sum t(S^{-1}(\alpha(h_{(2)})h_{(1)}) \triangleright a) \\
&= t(S^{-1}(\alpha \rightharpoonup h) \triangleright a) \\
&= tS^{-1}(h^{\alpha}) \triangleright a.
\end{aligned}$$

(iii) É fácil ver que $\mu((t) \otimes A\#H + A\#H \otimes (t)) = (t)$ uma vez que (ii) foi provada. Assim, (t) é ideal de $A\#H$.

■

Proposição 1.56 *Seja (t) como acima, então:*

(i) Para todo $a \in (t) \bigcap A \subseteq A\#H$, existem $\{b_i\}$, $\{c_i\} \in A$ tais que, $ad = \sum_{i=1}^{n} b_i\widehat{t}(c_i d)$, para todo $d \in A$. Isto é, $aA \subseteq \sum_{i=1}^{n} b_i A^H$.

(ii) Se $(t) = A\#H$ então A é finitamente gerado como A^H-módulo à direita.

(iii) Se $I = (t) \bigcap A$ contém um elemento regular de A, isto é, existe $0 \neq a \in A$ tal que a não é divisor de zero, então A é um A^H-submódulo à direita de um A^H-módulo livre finito.

Demonstração: (i) Seja $a \in (t) \bigcap A$. Como $a \in (t)$, existem $\{b_i\}$, $\{c_i\} \in A$ tais que $a = \sum_{i=1}^{n} b_i t c_i$. Daí,

$$\begin{aligned}
ad\#1_H &= ad \cdot 1_H \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i t c_i d 1_H
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (b_i \# t)(c_i d \# 1_H) \\
&= \sum \sum_{i=1}^{n} b_i(t_{(1)} \triangleright c_i d) \# t_{(2)}
\end{aligned}
$$

e aplicando o morfismo $I_A \otimes \varepsilon$ em $ad\#1_H = \sum \sum_{i=1}^{n} b_i(t_{(1)} \triangleright c_i d)\#t_{(2)}$, temos que

$$ad = \sum_{i=1}^{n} b_i(t \triangleright c_i d) = \sum_{i=1}^{n} b_i \widehat{t}(c_i d).$$

(ii) Por (i), se $A = (t)$ e $a \in A$ temos que $aA \subseteq \sum_{i=1}^{n} b_i A^H \subseteq A$. Assim, se tomarmos $a = 1_A$, temos $A \subseteq \sum_{i=1}^{n} b_i A^H \subseteq A$, como queríamos.

(iii) Seja $a \in I$ um elemento regular. Novamente, existem $\{b_i\}$, $\{c_i\} \in A$ tais que $a = \sum_{i=1}^{n} b_i t c_i$ Definimos

$$
\begin{aligned}
\phi : \quad A &\to \bigoplus_{i=1}^{n} A^H \\
d &\mapsto (\widehat{t}(c_i d))_i
\end{aligned}
$$

Vejamos que ϕ é injetora. De fato, seja $d \in \ker(\phi)$, então $0 = \phi(d) = (\widehat{t}(c_i d))_i$, o que implica em $\widehat{t}(c_i d) = 0$, para todo i. Assim, $ad = 0$ e como a é regular, segue que $d = 0$. Portanto, ϕ é injetiva.

■

1.7 Contexto de Morita

Nas seções anteriores, vimos que existe uma relação entre $A\#H$ e A^H. Nesta seção, formalizaremos tal relação através do contexto de Morita. A grosso modo, a idéia é estabelecer uma relação entre dois anéis através de seus módulos. Vejamos primeiro o que significa dizer que dois anéis R e S estão relacionados através de um contexto de Morita.

Definição 1.57 *Um contexto de Morita é uma sêxtupla* $(R,\ S,\ P,\ Q,\ \tau,\ \gamma)$ *em que* R *e* S *são anéis unitários,* P *é um* (R,S)*-bimódulo,* Q *é um* (S,R)*-bimódulo e as funções*

$$\tau : P \otimes_S Q \to R \quad e \quad \gamma : Q \otimes_R P \to S$$

são homomorfismos de bimódulos tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_S Q \otimes_R P \arrow[r, "I_P \otimes \gamma"] \arrow[d, "\tau \otimes I_P"'] & P \otimes_S S \arrow[d, "\cong"] \\
R \otimes_R P \arrow[r, "\cong"] & P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \otimes_R P \otimes_S Q \arrow[r, "I_P \otimes \tau"] \arrow[d, "\gamma \otimes I_P"'] & Q \otimes_R R \arrow[d, "\cong"] \\
S \otimes_S Q \arrow[r, "\cong"] & Q
\end{tikzcd}$$

Ou seja, para todo $p,\ p' \in P$ *e todo* $q,\ q' \in Q$*, temos que* $p\gamma(q \otimes p') = \tau(p \otimes q)p'$ *e* $q\tau(p \otimes q') = \gamma(q \otimes p)q'$ *respectivamente.*

Queremos mostrar que existe um contexto de Morita entre $R = A^H$ e $S = A\#H$ para qualquer H álgebra de Hopf de dimensão finita, tomando $P = Q = A$.

Vejamos que $P = A$ tem estrutura de $(A^H, A\#H)$-bimódulo.

Consideremos a estrutura de A^H-módulo à esquerda dada pela multiplicação usual em A e estrutura de $A\#H$-módulo e à direita dada por $a \triangleleft (b\#h) = S^{-1}(h^\alpha) \triangleright (ab)$, em que $a,\ b \in A$, $h \in H$, $\alpha \in H^*$ e $h^\alpha = \alpha \rightharpoonup h = \sum \alpha(h_{(2)})h_{(1)}$. Mostremos que as estruturas são compatíveis.

De fato, sejam $a \in A^H$, $b \in A$ e $c\#h \in A\#H$ então

$$
\begin{aligned}
(ab) \triangleleft (c\#h) &= S^{-1}(h^{\alpha}) \triangleright (abc) \\
&= S^{-1}(\alpha \rightharpoonup h) \triangleright (abc) \\
&= \sum S^{-1}(\alpha(h_{(2)})h_1) \triangleright (abc) \\
&= \sum \alpha(h_{(2)})(S^{-1}(h_{(1)})_{(1)} \triangleright a)(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright (bc)) \\
&= \sum \alpha(h_{(2)})a(S^{-1}(h_{(1)})_{(2)} \triangleright (bc)).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
a(b \triangleleft (c\#)h) &= a(S^{-1}(h^{\alpha}) \triangleright (bc)) \\
&= \sum a(S^{-1}(\alpha(h_{(2)})h_{(1)}) \triangleright (bc)) \\
&= \sum a\alpha(h_{(2)})(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright (bc)),
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Do mesmo modo, vejamos que $Q = A$ tem estrutura de $(A\#H, A^H)$-bimódulo.

Consideremos a estrutura de $A\#H$-módulo à esquerda dada por $(a\#h) \triangleright b = a(h \triangleright b)$ e de A^H-módulo à direita dada pela multiplicação usual em A. Mostremos que as estruturas são compatíveis.

De fato, sejam $c\#h \in A\#H$, $b \in A$ e $a \in A^H$ então, temos $((c\#h) \triangleright b)a = c(h \triangleright b)a$. Por outro lado,

$$
(c\#h) \triangleright (ba) = c(h \triangleright (ba)) = \sum c(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)} \triangleright a) = c(h \triangleright b)a.
$$

Lembremos que $tah = t(S^{-1}(h^{\alpha}) \triangleright a) = t(a \triangleleft (1_A\#h))$.

Teorema 1.58 *Seja A um A^H-módulo e um $A\#H$-módulo com as estruturas definidas acima, então $P = {}_{A^H} A_{A\#H}$ e $Q = {}_{A\#H} A_{A^H}$ e os* *morfismos*

$$\begin{array}{rrcl} \tau: & A \otimes_{A^H} A & \to & A\#H \\ & a \otimes b & \mapsto & atb \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rrcl} \gamma: & A \otimes_{A\#H} A & \to & A^H \\ & a \otimes b & \mapsto & \widehat{t}(ab) \end{array},$$

onde $0 \neq t \in \int_H^l$ *geram um contexto de Morita entre* A^H *e* $A\#H$*.*

Demonstração: Temos de ver que τ e γ estão bem definidos, são morfismos de $A\#H$ e A^H-bimódulos respectivamente e que os diagramas da Definição 1.57 comutam.

Iniciamos mostrando que os diagramas comutam. De fato, para todo $m_i,\ n_i,\ q_i \in A$, temos

$$\begin{aligned} \psi \circ (I \otimes \tau)(\sum m_i \otimes n_i \otimes q_i) &= \psi(\sum m_i \otimes n_i t q_i) \\ &= \sum m_i \lhd n_i t q_i \\ &= \sum m_i \lhd ((n_i \# 1_H)(1_A \# t)(q_i \# 1_H)) \\ &= \sum (m_i \lhd (n_i \# t)) \lhd (q_i \# 1_H) \\ &= \sum (S^{-1}(t^{\alpha}) \rhd m_i n_i)(q_i \# 1_H) \\ &\overset{(*)}{=} \sum (t \rhd m_i n_i) q_i, \end{aligned}$$

onde $(*)$ é válido pelo Lema 1.54

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi \circ (\gamma \otimes I)(\sum m_i \otimes n_i \otimes q_i) &= \psi(\sum \widehat{t}(m_i n_i) \otimes q_i) \\ &= \sum \widehat{t}(m_i n_i) q_i \\ &= \sum (t \rhd (m_i n_i)) q_i, \end{aligned}$$

o que nos garante a comutatividade do primeiro diagrama. Ainda,

$$\begin{aligned} \psi \circ (\tau \otimes I(\sum m_i \otimes n_i \otimes q_i) &= \psi(\sum m_i t n_i \otimes q_i) \\ &= \sum m_i t n_i \rhd q_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum (m_i(t_{(1)} \triangleright n_i)\#t_{(2)}) \triangleright q_i \\
&= \sum m_i(t_{(1)} \triangleright n_i)(t_{(2)} \triangleright q_i) \\
&= \sum m_i(t \triangleright n_i q_i).
\end{aligned}
$$

Mas,

$$\psi \circ (I \otimes \gamma)(\sum m_i \otimes n_i \otimes q_i) = \psi(\sum m_i \otimes \widehat{t}(n_i q_i)) = \sum m_i(t \triangleright (n_i q_i)),$$

mostrando assim que o segundo diagrama é comutativo.

Vejamos agora que γ é $A\#H$-balanceada e que τ é A^H-balanceada. Sejam $a,\ b,\ c \in A$ e $h \in H$.

$$
\begin{aligned}
\gamma((b \triangleleft a\#h) \otimes c) &= \widehat{t}(((\overline{S}(h^{\alpha})) \triangleright ba)c) \\
&= \sum t \triangleright ((\overline{S}(\alpha(h_{(2)})h_{(1)}) \triangleright ba)c) \\
&= \sum t\alpha(h_{(2)}) \triangleright ((\overline{S}(h_{(1)}) \triangleright ba)c) \\
&= \sum th_{(2)} \triangleright ((\overline{S}(h_{(1)}) \triangleright ba)c) \\
&= \sum t \triangleright (((h_{(2)}\overline{S}(h_{(1)})) \triangleright ba)(h_{(3)} \triangleright c)) \\
&= t \triangleright ((ba)(h \triangleright c)) \\
&= t \triangleright (bah \triangleright c) \\
&= \widehat{t}(b(ah \triangleright c)) \\
&= \gamma(b \otimes (a\#h \triangleright c)).
\end{aligned}
$$

Sejam agora $a,\ b \in A$ e $c \in A^H$, logo,

$$
\begin{aligned}
\tau(a \otimes cb) &= atcb \\
&= (a\#t)(c\#1_H)(b\#1_H) \\
&= \sum (a(t_{(1)} \triangleright c)\#t_{(2)})(b\#1_H) \\
&= \sum (a(\varepsilon(t_{(1)})c)\#t_{(2)})(b\#1_H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (ac\#t)(b\#1_H) \\
&= actb = \tau(ac \otimes b),
\end{aligned}
$$

o que mostra que τ é A^H-balanceada.

Por fim, vejamos que τ é um morfismo de $A\#H$-bimódulo e que γ é um morfismo de A^H-bimódulo. Iniciamos por τ, sejam, $a,\ b,\ c \in A$ e $h \in H$, logo

$$
\tau((a\#h) \triangleright b \otimes c) = \tau(a(h \triangleright b) \otimes c) = a(h \triangleright b)tc.
$$

Por outro lado,

$$
(a\#h)(btc) = \sum a(h_{(1)} \triangleright b)(h_{(2)} \triangleright tc) = a(h \triangleright b)tc,
$$

e portanto, τ é um morfismo de $A\#H$-bimódulo à esquerda. E também é à direita, pois

$$
\begin{aligned}
\tau(b \otimes (c \triangleleft a\#h)) &= \tau(b \otimes (S^{-1}(h^\alpha) \triangleright (ca))) \\
&= bt(S^{-1}(h^\alpha) \triangleright ca) \\
&= bt(S^{-1}(\alpha \rightharpoonup h) \triangleright ca) \\
&= bt(ca)h.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\tau(b \otimes c)(a\#h) &= (btc)(a\#h) \\
&= (b\#1_H)(1_A\#t)(c\#1_H)(a\#h) \\
&= (b\#t)(ca\#h) = bt(ca)h.
\end{aligned}
$$

Para γ, sejam $a \in A^H$ e $b,\ c \in A$, então

$$
\begin{aligned}
\gamma(ab \otimes c) &= \widehat{t}((ab)c) \\
&= t \triangleright ((ab)c) = t \triangleright (a(bc)) \\
&= \sum (t_{(1)} \triangleright a)(t_{(2)} \triangleright bc) \\
&= a(t \triangleright bc) = a\widehat{t}(bc) \\
&= a\gamma(b \otimes c),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\gamma(b \otimes ca) &= \widehat{t}(b(ca)) \\
&= t \triangleright (b(ca)) = t \triangleright ((bc)a) \\
&= \sum (t_{(1)} \triangleright bc)(t_{(2)} \triangleright a) \\
&= (t \triangleright bc)a = \widehat{t}(bc)a \\
&= \gamma(b \otimes c)a,
\end{aligned}
$$

mostrando assim que γ é um morfismo de A^H-bimódulo à esquerda e à direita respectivamente.

■

Dois anéis são ditos Morita-equivalente se existe um contexto de Morita relacionando-os de forma que γ e τ são isomorfismos de bimódulos.

Corolário 1.59 *Seja A um H-módulo álgebra, H de dimensão finita e $0 \neq t \in \int_H^l$. Se $\widehat{t} : A \to A^H$ é sobrejetora e $(t) = A\#H$, então $A\#H$ é Morita-equivalente a A^H.*

Demonstração: Queremos mostrar que γ e τ são isomorfismos. Notemos que como H tem dimensão finita, é suficiente vermos que γ e τ são sobrejetivos. O que de fato ocorre por hipótese, pois da sobrejetividade de $\widehat{t}$ tiramos que γ é sobrejetivo e $(t) = A\#H$ garante a sobrejetividade de $A\#H$. ■

1.8 Produto Cruzado

Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra com unidade.

Definição 1.60 *Dizemos que H mede A se existe uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & H\otimes A & \rightarrow & A \\ & h\otimes a & \mapsto & h\cdot a \end{array}$$

tal que

(i) $h\cdot 1_A=\varepsilon(h)1_A$;

(ii) $h\cdot ab=\sum(h_{(1)}\cdot a)(h_{(2)}\cdot b)$.

Consideremos o morfismo

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & H\otimes H & \rightarrow & A \\ & h\otimes k & \mapsto & \sigma(h,k), \end{array}$$

para todo $h,k\in H$, inversível por produto de convolução, ou seja, existe $\psi: H\otimes H\rightarrow A$ tal que $\sigma*\psi=\psi*\sigma=\eta\circ\varepsilon$.

Definição 1.61 *Sejam H uma álgebra que mede A e σ definida acima. Então podemos definir um novo produto em $A\otimes H$ dado por*

$$(a\otimes h)(b\otimes k)=\sum a(h_{(1)}\cdot b)\sigma(h_{(2)},k_{(1)})\otimes h_{(3)}k_{(2)},$$

para todo $a,\ b\in A$ e todo $h,\ k\in H$.

Teorema 1.62 *O conjunto $A\otimes H$ com o produto definido acima é uma álgebra com unidade se, e somente se, tivermos:*

(i) $h\cdot(k\cdot a)=\sum\sigma(h_{(1)},k_{(1)})(h_{(2)}k_{(2)}\cdot a)\overline{\sigma}(h_{(3)},k_{(3)})$, em que $\overline{\sigma}$ é o inverso de convolução de σ em $Hom_k(H\otimes H,A)$;

(ii) $\sum(h_{(1)}\cdot\sigma(k_{(1)},l_{(1)}))\sigma(h_{(2)},k_{(2)}l_{(2)}) = \sum\sigma(h_{(1)},k_{(1)})\sigma(h_{(2)}k_{(2)},l)$;

(iii) $\sigma(1_H,h) = \sigma(h,1_H) = \varepsilon(h)1_A$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $A\otimes H$ uma álgebra com unidade definida por $1_{A\otimes H} := 1_A\otimes 1_H$. Provemos primeiro (iii).

Seja $a\otimes h\in A\otimes H$, logo

$$\begin{array}{rcl} a\otimes h & = & (a\otimes h)(1_A\otimes 1_H) \\ & = & \sum a(h_{(1)}\cdot 1_A)\sigma(h_{(2)},1_H)\otimes h_{(3)} \\ & = & \sum a\sigma(h_{(1)},1_H)\otimes h_{(2)} \\ & \overset{(*)}{\Rightarrow} & \varepsilon(h)1_A = \sigma(h,1_H), \end{array}$$

onde $(*)$ é válido desde que tomemos $a = 1_A$ e aplicarmos $I_A\otimes\varepsilon$.

Do mesmo modo,

$$\begin{array}{rcl} a\otimes h & = & (1_A\otimes 1_H)(a\otimes h) \\ & = & \sum 1_A(1_H\cdot a)\sigma(1_H,h_{(1)})\otimes h_{(2)} \\ & \overset{(*)}{\Rightarrow} & \varepsilon(h)1_A = \sigma(1_H,h), \end{array}$$

onde $(*)$ é válido desde que tomemos $a = 1_A$ e aplicarmos $I_A\otimes\varepsilon$.

Mostremos agora (i) e (ii). Sejam $a\otimes h,\ b\otimes k,\ c\otimes l\in A\otimes H$, daí

$$\begin{array}{l} (a\otimes h)((b\otimes k)(c\otimes l)) = (a\otimes h)(\sum b(k_{(1)}\cdot c)\sigma(k_{(2)},l_{(1)})\otimes k_{(3)}l_{(2)}) \\ = \sum a(h_{(1)}\cdot b)(h_{(2)}\cdot(k_{(1)}\cdot c))(h_{(3)}\cdot\sigma(k_{(2)},l_{(1)}))\cdot\sigma(h_{(4)},k_{(3)}l_{(2)})\otimes h_{(5)}k_{(4)}l_{(3)} \\ \overset{(*)}{=} \sum(h_{(1)}\cdot(k_{(1)}\cdot c))\sigma(h_{(2)},k_{(2)})\otimes h_{(3)}k_{(3)}, \end{array} \tag{1.4}$$

tomando $a = b = 1_A$ e $l = 1_H$ em $(*)$.

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
&((a \otimes h)(b \otimes k))(c \otimes l) = (\sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)})(c \otimes l) \\
&= \sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)})(h_{(3)}k_{(2)} \cdot c)) \cdot \sigma(h_{(4)}k_{(3)}, l_{(1)}) \otimes h_{(5)}k_{(4)}l_{(2)} \\
&\overset{(*)}{=} \sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})(h_{(2)}k_{(2)} \cdot c) \otimes h_{(3)}k_{(3)},
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

tomando $a = b = 1_A$ e $l = 1_H$ em $(*)$.

Daí, aplicando $I_H \otimes \varepsilon$, a associatividade e multiplicando pelo inverso por produto de convolução à direita, temos (i)

$$\sum h_{(1)} \cdot (k_{(1)} \cdot c)\sigma(h_{(2)}, k_{(2)})\overline{\sigma}(h_{(3)}, k_{(3)}) = \sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})(h_{(2)}k_{(2)} \cdot c)\overline{\sigma}(h_{(3)}, k_{(3)}).$$

Da associatividade, tomando $a = b = c = 1_A$, temos

$$
\begin{gathered}
\sum (h_{(1)} \cdot \sigma(k_{(1)}, l_{(1)}))\sigma(h_{(2)}, k_{(2)}l_{(2)}) \otimes h_{(3)}k_{(3)}l_{(3)} \\
\shortparallel \\
\sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})\sigma(h_{(2)}k_{(2)}, l_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(3)}l_{(2)},
\end{gathered}
$$

e aplicando $I_H \otimes \varepsilon$, temos (ii).

$(\Leftarrow)$ Seja σ satisfazendo (i), (ii) e (iii). Mostremos que a álgebra é associativa. Sejam $a \otimes h,\ b \otimes k,\ c \otimes l \in A \otimes H$, então,

$$
\begin{aligned}
&(a \otimes h)((b \otimes k)(c \otimes l)) = (a \otimes h)(\sum b(k_{(1)} \cdot c)\sigma(k_{(2)}, l_{(1)}) \otimes k_{(3)}l_{(2)}) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum a(h_{(1)} \cdot b)(h_{(2)} \cdot (k_{(1)} \cdot c))(h_{(3)} \cdot \sigma(k_{(2)}, l_{(1)}))\sigma(h_{(4)}, k_{(3)}l_{(2)}) \\
&\qquad\qquad \otimes h_{(5)}k_{(4)}l_{(3)} \\
&\overset{(ii)}{=} \sum a(h_{(1)} \cdot b)(h_{(2)} \cdot (k_{(1)} \cdot c))\sigma(h_{(3)}, k_{(2)})\sigma(h_{(4)}k_{(3)}, l_{(1)}) \otimes h_{(5)}k_{(4)}l_{(2)} \\
&\overset{(i)}{=} \sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)})(h_{(3)}k_{(2)} \cdot a)\overline{\sigma}(h_{(4)}, k_{(3)})\sigma(h_{(5)}, k_{(4)}) \\
&\qquad\qquad \sigma(h_{(6)}k_{(5)}, l_{(1)}) \otimes h_{(7)}k_{(6)}l_{(2)}
\end{aligned}
$$

$\overset{(1.5)}{=} \sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)})(h_{(3)}k_{(2)} \cdot a)\sigma(h_{(4)}k_{(3)}, l_{(1)}) \otimes h_{(5)}k_{(4)}l_{(2)}$
$= (\sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)})\#h_{(3)}k_{(2)})(c\#l)$
$= ((a \otimes h)(b \otimes l))(c \otimes l).$

Mostremos que $1_A \otimes 1_H \in A \otimes H$ é a unidade da álgebra $A \otimes H$. De fato,

$$\begin{aligned}(a \otimes h)(1_A \otimes 1_H) &= a(h_{(1)} \cdot 1_A)\sigma(h_{(2)}, 1_H) \otimes h_{(3)}1_H \\ &= a\varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})1_A \otimes h_{(3)} \\ &= a \otimes h.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, $(1_A \otimes 1_H)(a \otimes h) = 1_A(1_H \cdot a)\sigma(1_H, h_{(1)}) \otimes 1_H h_{(2)} = a \otimes h$, e portanto, $1_A \otimes 1_H$ é a unidade em $A \otimes H$.

■

Definição 1.63 *Sejam H uma biálgebra que mede A e $\sigma : H \otimes H \to A$ como acima e satisfazendo as condições* (i), (ii) e (iii) do teorema acima. Então o produto cruzado $A\#_\sigma H$ é a álgebra unital $A \otimes H$ com o produto dado por

$$(a \otimes h)(b \otimes k) = \sum a(h_{(1)} \cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)},$$

para todo $a,\ b \in A$ e todo $h,\ k \in H$.

Exemplo 1.64 *Para o primeiro exemplo, consideremos o caso em que σ é trivial, isto é, $\sigma(h, k) = \varepsilon(h)\varepsilon(k)1_A$, para todo $h,\ k \in H$, então*

$$h \cdot (k \cdot c) = \sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})(h_{(2)}k_{(2)} \cdot a)\sigma(h_{(3)}k_{(3)}) = hk \cdot a,$$

para todo $h,\ k \in H$ e todo $a \in A$, o que implica que A é um H-módulo *álgebra e assim,* $A\#_\sigma H = A\#H$*, com produto*

$$(a\otimes h)(b\otimes k) = \sum a(h_{(1)}\cdot b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)})\otimes h_{(3)}k_{(2)} = \sum a(h_{(1)}\cdot b)\otimes h_{(2)}k,$$

para todo $h,\ k \in H$ *e todo* $a,\ b \in A$*.*

Exemplo 1.65 *Seja* $H = kG$ *a álgebra de grupo. Então*

$$g\cdot(h\cdot a) = \sum \sigma(g,h)(gh\cdot a)\overline{\sigma}(g,h),$$

$$(g\cdot\sigma(h,k))\sigma(g,hk) = \sigma(g,h)\sigma(gh,k),$$

para todo $g,\ h,\ k \in G$*, e todo* $a \in A$*. E o produto em* $A\#_\sigma kG$ *é dado por*

$$(a\otimes g)(b\otimes h) = a(g\cdot b)\sigma(g,h)\otimes gh,$$

para todo $g,\ h \in G$ *e todo* $a,\ b \in A$*.*

Exemplo 1.66 *Como um caso especial desse exemplo, notamos que para qualquer grupo* G *e qualquer subgrupo normal* N *de* G*, podemos escrever* $kG = kN\#_\sigma k[G/N]$*, o produto cruzado de* kN *com o grupo quociente* $\overline{G} = G/N$*.*

De fato, para toda classe $\overline{g} \in G/N$*, tomemos sua representação*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & G/N & \to & G \\ & \overline{g} & \mapsto & \gamma(\overline{g}). \end{array}$$

Notemos que dada a classe $\overline{g}$*, temos que*

$$\overline{g} = N\gamma(\overline{g}).$$

Assim, $G = \bigcup\limits_{\overline{g}\in G/N} N\gamma(\overline{g})$*, ou seja, um elemento* $g \in G$ *pode* *ser reescrito como* $g = n_i\gamma(\overline{g_j})$. *Ainda, como* $G = \bigcup_{\overline{g}\in G/N} N\gamma(\overline{g})$, *então* $kG = kN\gamma(\overline{G/N})$, *em que a multiplicação entre dois elementos de* kG, $n\gamma(\overline{g})$ *e* $m\gamma(\overline{h})$, *é dada por:*

$$\begin{aligned}
(n\gamma(\overline{g}))(m\gamma(\overline{h})) &= n\gamma(\overline{g})m\gamma(\overline{h}) \\
&= n\gamma(\overline{g})m\gamma(\overline{g})^{-1}\gamma(\overline{g}\gamma(\overline{h}) \\
&= n\gamma(\overline{g})m\gamma(\overline{g})^{-1}\gamma(\overline{g}\gamma(\overline{h})\gamma(\overline{gh})^{-1}\gamma(\overline{gh}) \\
&= n(\overline{g}\cdot m)\sigma(\overline{g},\overline{h})\gamma(\overline{gh}),
\end{aligned}$$

e este elemento pertence a $kG = kN\gamma(G/N)$, *pois, primeiramente, como* N *é um subgrupo normal, temos que* $\gamma(\overline{g})N\gamma(\overline{g})^{-1} \subseteq N$. *Por fim, mostremos que* $N\gamma(\overline{g}\gamma(\overline{h})\gamma(\overline{gh})^{-1} = N$.

Sabemos que $\overline{g}\overline{h} = \overline{gh}$, *assim,*

$$\begin{array}{c}
N\gamma(\overline{g})N\gamma(\overline{h}) = N\gamma(\overline{gh}) \\
\| \\
N\gamma(\overline{g})\gamma(\overline{h}),
\end{array}$$

o que implica em $N\gamma(\overline{g})\gamma(\overline{h})\gamma(\overline{gh})^{-1} = N$. *Portanto,*

$$\gamma(\overline{g})\gamma(\overline{h})\gamma(\overline{gh})^{-1} \in N.$$

Assim, temos que $kG = kN\#_\sigma k[G/N]$

Capítulo 2

Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf

Iniciaremos o capítulo definindo as noções de extensão e extensão fielmente plana. A primeira aparece em praticamente todas as definições de extensões que daremos daqui pra frente, como extensões fendidas, extensões de Hopf-Galois e extensões homogêneas principais, afirmando que existe uma estrutura de comódulo-álgebra sobre a álgebra em questão. A segunda, definida sobre um anel, tem no Capítulo 3 sua principal aplicação e portanto, tratamos aqui sua definição, assim como o resultado que usaremos no Capítulo 3. Veremos no Capítulo 4 que também podemos construir uma extensão fielmente plana sobre $A(SL_q(2))$ e no Apêndice B, apresentamos alguns resultados importantes dessa teoria que fogem ao escopo do trabalho.

Definição 2.1 *Dizemos que $B \subset A$ é uma H-extensão à direita se A é um H-comódulo álgebra com $A^{coH} = B$, onde A, B são álgebras e H é uma álgebra de Hopf.*

2.1 Extensões Fielmente Planas

Iniciamos esta seção definindo a estrutura de módulo fielmente plano, para então darmos sequência ao estudo de extensões fielmente planas, para maiores detalhes, indicamos o Apêndice B e [20].

Definição 2.2 *Seja P um módulo à direita sobre um anel R. Dizemos que P_R é um módulo fielmente plano se satisfaz qualquer uma das condições do teorema abaixo, cuja demonstração pode ser vista em [20].*

Teorema 2.3 *Para qualquer módulo à direita P sobre um anel R, são equivalentes:*

(i) A sequência

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

é exata, se, e somente se,

$$P \otimes_R M' \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M''$$

é uma sequência exata;

(ii) P é um módulo plano, e para qualquer R-módulo à esquerda M, $P \otimes_R M = 0$ implica em $M = 0$;

(iii) P é um módulo plano, e o morfismo $\phi : M' \to M''$, na categoria dos R-módulos à esquerda $({}_R\mathfrak{M})$, é nulo se o morfismo induzido $I_P \otimes \overline{\phi} : P \otimes_R M' \to P \otimes_R M''$ é nulo.

Exemplo 2.4 *Todo k-espaço vetorial, k corpo, é um k-módulo fielmente plano.*

De fato, sejam V um k-espaço vetorial e $f : W \to W'$ uma transformação linear injetiva.

Sejam ainda $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq W$ base de W e $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq V$, base de V.

Como f é injetiva, os vetores $\{f(e_i)\}_{i\in I} \subseteq W'$ são linearmente independentes. Podemos, assim, obter uma base de W da forma

$$\{f(e_i)\}_{i\in I} \dot{\bigcup} \{w_j\}_{j\in J}.$$

Agora, consideremos a transformação linear

$$I_V \otimes f : V \otimes W \to V \otimes W',$$

como $\{v_\lambda \otimes e_i\}_{\lambda\in\Lambda, i\in I}$ é base de $V \otimes W$ e $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ são vetores linearmente independentes em $V \otimes W'$, logo, $I_V \otimes f$ é injetiva, o que implica em que V seja um k-módulo plano.

Por outro lado, suponhamos que $I_V \otimes f : V \otimes W \to V \otimes W'$ é injetiva e seja $\{\eta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ base dual em V^*, isto é, $\eta_\lambda(v_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$.

Seja $\sum \alpha_i e_i \in \ker(f) \subseteq W$, então $\sum \alpha_i f(e_i) = 0$. Daí, tomando $\lambda_0 \in \Lambda$, temos que

$$\sum \alpha_i v_{\lambda_0} \otimes e_i \in \ker(I_V \otimes f),$$

o que é uma contradição, visto que $I_V \otimes f$ é injetiva.

Portanto, f é injetiva, o que garante que V é fielmente plano como k-módulo.

Definição 2.5 *Uma extensão $B \subset A$ é dita fielmente plana se A é uma extensão em que A é B-módulo fielmente plano.*

Uma definição equivalente a esta, vista em [20], é dada por:

Definição 2.6 *Uma extensão $B \subset A$, A, B k-álgebras, é dita fielmente plana à esquerda se para qualquer morfismo de B-módulos à direita $f : M \to N$, f é injetora se, e somente se, $f \otimes I_A : M \otimes_B A \to N \otimes_B A$ é injetivo.*

Para mostrarmos a propriedade citada acima, precisamos definir o que chamamos de equalizador de dois morfismos.

Definição 2.7 *Sejam os morfismos $f, g : M \to N$, chamamos de equalizador de f e g o conjunto* $\ker(f, g) = \{m \in M : f(m) = g(m)\}$.

Dizemos que o diagrama do equalizador

$$0 \to L \xrightarrow{h} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

é exato se $Im(h) = \ker(f, g)$ e h for injetivo.

A partir de agora e no decorrer do todo este capítulo, a menos que se diga o contrário, assumimos que k é um anel comutativo com unidade.

Lema 2.8 *Seja A uma k-álgebra k-fielmente plana e M um k-módulo à esquerda. Então a sequência*

$$0 \to M \xrightarrow{\theta} A \otimes M \xrightarrow{\delta} A \otimes A \otimes M$$

é exata, onde $\theta(m) = 1_A \otimes m$ e $\delta(a \otimes m) = a \otimes 1_A \otimes m - 1_A \otimes a \otimes m$.

Demonstração: Como A é k-fielmente plano, basta mostrarmos que a sequência

$$0 \to A \otimes_k M \overset{I_A \otimes \theta}{\to} A \otimes_k A \otimes_k M \overset{I_A \otimes \delta}{\to} A \otimes_k A \otimes_k A \otimes_k M$$

é exata, ou seja, temos de mostrar que $I_A \otimes \theta$ é injetor e também que $Im(I_A \otimes \theta) = \ker(I_A \otimes \delta)$.

Seja $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(I_A \otimes \theta)$ então

$$0 = (I_A \otimes \theta)\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum a_i \otimes \theta(m_i) = \sum a_i \otimes 1_A \otimes m_i$$

e aplicando o morfismo $\mu \otimes I_M$ temos que

$$0 = \sum a_i \otimes m_i,$$

portanto, $I_A \otimes \theta$ é injetivo.

Vejamos que $Im(I_A \otimes \theta) = \ker(I_A \otimes \delta)$.

Claramente $Im(I_A \otimes \theta) \subset \ker(I_A \otimes \delta)$, pois

$$\begin{aligned}(I_A \otimes \delta) \circ (I_A \otimes \theta)\left(\sum a_i \otimes m_i\right) &= I_A \otimes \delta\left(\sum a_i \otimes 1_A \otimes m_i\right) \\ &= \sum a_i \otimes 1_A \otimes 1_A \otimes m_i \\ &\quad - \sum a_i \otimes 1_A \otimes 1_A \otimes m_i = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i \in \ker(I_A \otimes \delta)$ então

$$0 = I_A \otimes \delta\left(\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i\right) = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1_A \otimes m_i - \sum a_i \otimes 1_A \otimes b_i \otimes m_i,$$

logo, $\sum a_i \otimes 1_A \otimes b_i \otimes m_i = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1_A \otimes m_i$ e aplicando o morfismo $\mu \otimes I_A \otimes I_M$ temos que

$$\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i = \sum a_i b_i \otimes 1_A \otimes m_i = (I_A \otimes \theta)\left(\sum a_i b_i \otimes m_i\right).$$

Assim, $Im(I_A \otimes \varepsilon) = \ker(I_A \otimes \delta)$ e segue que a sequência $0 \to M \stackrel{\varepsilon}{\to} A \otimes M \stackrel{\delta}{\to} A \otimes A \otimes M$ é exata por A ser k-fielmente plano.

■

2.2 Extensão Fendida

As extensões fendidas são extensões que possuem uma estrutura trivial, sendo caracterizadas por produtos cruzados. Ao final desta seção veremos um teorema que descreve tal caracterização. Iniciamos o capítulo definindo uma extensão fendida.

Definição 2.9 *Dizemos que uma H-extensão $B \subset A$ é H-fendida (ou H-extensão fendida) se existe um morfismo de H-comódulos à direita $\gamma : H \to A$ que é inversível por convolução.*

Conforme visto na Proposição A.37, um morfismo $\phi : H \to A$ é inversível por produto de convolução se existe $\psi : H \to A$ tal que $\phi * \psi = \psi * \phi = \eta \circ \varepsilon$.

Como $Hom(H, A)$ é uma álgebra com unidade, sabemos que se o inverso de um morfismo ϕ, se existir, é único.

Ainda, se $\psi : A \to A \otimes H$ é um morfismo de álgebras, então

$$\begin{array}{cccc} \psi_* & Hom(H,A) & \to & Hom(H, A \otimes H) \\ & \phi & \mapsto & \psi_*(\phi) := \psi \circ \phi, \end{array}$$

é um morfismo de álgebras. E segue que $\psi_*(\phi)$ é inversível, se ϕ é inversível.

Pensando agora sobre o morfismo γ dado na definição, vemos que o mesmo pode ser normalizado, tornando-o unital.

De fato, seja $\widehat{\gamma} : H \to A$ como acima tal que $\widehat{\gamma}(1_H) := b$. Notemos que $b \in B$, pois

$$\begin{aligned} \rho(b) &= \rho \circ \widehat{\gamma}(1_H) = (\widehat{\gamma} \otimes I_H) \circ \Delta(1_H) \\ &= \widehat{\gamma}(1_H) \otimes 1_H = b \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Ainda, b é inversível, pois

$$\begin{aligned} 1_A &= \eta \circ \varepsilon(1_H) &&= \widehat{\gamma} * \overline{\widehat{\gamma}}(1_H) \\ &= \widehat{\gamma}(1_H)\overline{\widehat{\gamma}}(1_H) &&= b\overline{\widehat{\gamma}}(1_H). \end{aligned}$$

Chamemos $\overline{\widehat{\gamma}}(1_H) = b^{-1}$, claramente $b^{-1} \in B$, pois

$$\begin{aligned} \rho(b^{-1}) &= (b^{-1}b \otimes 1_H)\rho(b^{-1}) \\ &= (b^{-1} \otimes 1_H)(b \otimes 1_H)\rho(b^{-1}) \\ &= (b^{-1} \otimes 1_H)\rho(b)\rho(b^{-1}) \\ &= (b^{-1} \otimes 1_H)\rho(bb^{-1}) \\ &= b^{-1} \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Por fim, definamos o morfismo

$$\begin{aligned} \gamma : \quad H &\to A \\ h &\mapsto b^{-1}\widehat{\gamma}(h). \end{aligned}$$

É fácil ver que γ é colinear à direita e inversível por produto de convolução, basta definirmos $\overline{\gamma} : H \to A$ por $\overline{\gamma}(h) = (\overline{\widehat{\gamma}}b)(h) := \overline{\widehat{\gamma}}(h)b$.

Assim, γ é unital como queríamos.

O próximo teorema mostra que toda extensão fendida é de fato um produto cruzado, conforme definido no Capítulo 1, Definição 1.63.

Teorema 2.10 *Uma extensão $B \subset A$ é H-fendida se, e somente se, $A \simeq B\#_\sigma H$ como álgebras.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $B \subset A$ uma H-extensão fendida de B. Então existe um morfismo de comódulos $\gamma : H \to A$ unital e inversível por produto de convolução, ao qual denominamos morfismo fenda.

Definimos, para todo $h \in H$ e todo $a \in B = A^{coH}$, uma ação de H em B dada por

$$h \triangleright a = \sum \gamma(h_{(1)}) a \overline{\gamma}(h_{(2)}),$$

em que $\overline{\gamma} : H \to A$ é o inverso por convolução do morfismo fenda γ, e um morfismo inversível por produto de convolução, $\sigma : H \otimes H \to B$ definido por

$$\sigma(h \otimes k) = \sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)})$$

para todo $h,\ k \in H$, com inversa

$$\overline{\sigma}(h \otimes k) = \sum \gamma(h_{(1)}k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)})\overline{\gamma}(k_{(2)}).$$

Provemos que $h \triangleright a$ e $\sigma(h,k) \in B$, para todo $h,\ k \in H$ e todo $a \in B$. De fato,

$$\begin{aligned}
\rho(h \triangleright a) &= \rho(\textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\overline{\gamma}(h_{(2)})) \\
&= \textstyle\sum \rho(\gamma(h_{(1)}))\rho(a)\rho(\overline{\gamma}(h_{(2)})) \\
&\overset{(*)}{=} \textstyle\sum (\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)})(a \otimes 1_H)(\overline{\gamma}(h_{(4)}) \otimes S(h_{(3)})) \\
&= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\overline{\gamma}(h_{(4)}) \otimes h_{(2)}S(h_{(3)}) \\
&= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\overline{\gamma}(h_{(3)}) \otimes \varepsilon(h_{(2)})1_H \\
&= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\overline{\gamma}(h_{(2)}) \otimes 1_H,
\end{aligned}$$

em que $(*)$ diz que $\rho(\overline{\gamma}(h)) = (\overline{\gamma} \otimes S) \circ \Delta^{op}(h)$. O que de fato é válido, pois, para todo $h \in H$, temos que $\sum \overline{\gamma}(h_{(1)})\gamma(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_B$ e daí, como $1_A = 1_B$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h)1_B \otimes 1_H &= \rho(\textstyle\sum \overline{\gamma}(h_{(1)})\gamma(h_{(2)})) \\
&= \textstyle\sum (\overline{\gamma}(h_{(1)})^{(0)} \otimes \overline{\gamma}(h_{(1)})^{(1)})(\gamma(h_{(2)}) \otimes h_{(3)}) \\
&= \textstyle\sum \overline{\gamma}(h_{(1)})^{(0)}\gamma(h_{(2)}) \otimes \overline{\gamma}(h_{(1)})^{(1)}h_{(3)} \\
&\Rightarrow \overline{\gamma}(h_{(1)})^{(0)} \otimes \overline{\gamma}(h_{(1)})^{(1)} = \textstyle\sum \overline{\gamma}(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}),
\end{aligned}$$

uma vez que $\sum \overline{\gamma}(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$ é o inverso de $\sum \gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$ em $Hom(H, A \otimes H)$, e o inverso é único.

Visto isso, provemos que $\sigma(h,k) \in B$.

$$\begin{aligned}
\rho(\sigma(h,k)) &= \rho(\textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)})) \\
&= \textstyle\sum (\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)})(\gamma(k_{(1)}) \otimes k_{(2)})(\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(4)}) \otimes S(h_{(3)}k_{(3)})) \\
&= \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(4)}) \otimes h_{(2)}k_{(2)}S(k_{(3)})S(h_{(3)}) \\
&= \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(3)}k_{(3)}) \otimes \varepsilon(h_{(2)})\varepsilon(k_{(2)})1_H \\
&= \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)}) \otimes 1_H,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Podemos ver também que H mede B (conforme Definição 1.60 do Capítulo 1). Sejam $h \in H$, $a,\ b \in B$, então

$$h \rhd 1_B = \sum \gamma(h_{(1)})1_B\overline{\gamma}(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_B,$$

e

$$\begin{aligned} h \rhd ab &= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})ab\overline{\gamma}(h_{(2)}) \\ &= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\varepsilon(h_{(2)})b\overline{\gamma}(h_{(3)}) \\ &= \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})a\overline{\gamma}(h_{(2)})\gamma(h_{(3)})b\overline{\gamma}(h_{(4)}) \\ &= \textstyle\sum (h_{(1)} \rhd a)(h_{(2)} \rhd b). \end{aligned}$$

Ainda, vemos que $B\#_\sigma H$ é uma álgebra associativa com unidade, como no Teorema 1.62. Para todo $h,\ k \in H$ e todo $a \in B$, temos

$$\begin{aligned} & h \rhd (k \rhd a) = h \rhd (\textstyle\sum \gamma(k_{(1)})a\overline{\gamma}(k_{(2)})) \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})a\overline{\gamma}(k_{(2)})\overline{\gamma}(h_{(2)}) \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)})\gamma(h_{(3)}k_{(3)})a\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(4)})\gamma(h_{(5)}k_{(5)})\overline{\gamma}(k_{(6)})\overline{\gamma}(h_{(6)}) \\ & = \textstyle\sum \sigma(h_{(1)}k_{(1)})(h_{(2)}k_{(2)} \rhd a)\overline{\sigma}(h_{(3)}k_{(3)}). \end{aligned}$$

E, para todo $h,\ k,\ l \in H$, temos

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})\sigma(h_{(2)}k_{(2)}l) = \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}, k_{(2)})\gamma(h_{(3)}k_{(3)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(4)}l_{(2)}) \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)}l_{(2)}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum (h_{(1)} \rhd \sigma(k_{(1)}, l_{(1)}))\sigma(h_{(2)}, k_{(2)}l_{(2)}) = \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(k_{(2)}l_{(2)})\overline{\gamma}(h_{(2)})\gamma(h_{(3)})\gamma(k_{(3)}l_{(3)})\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(4)}l_{(4)}) \\ & = \textstyle\sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(k_{(2)}l_{(2)})\varepsilon(h_{(2)})\gamma(k_{(3)}l_{(3)})\overline{\gamma}(h_{(3)}k_{(4)}l_{(4)}) \end{aligned}$$

$$= \sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\gamma(l_{(1)})\varepsilon(k_{(2)}l_{(2)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(3)}l_{(3)})$$
$$= \sum \gamma(h_{(1)})\gamma(k_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}k_{(2)}l_{(2)}).$$

como queríamos.

Claramente, o item (iii) do Teorema 1.62 é demonstrado, pois, dados $1_H,\ h \in H$, temos que

$$\sigma(1_H \otimes h) = \gamma(1_H)\gamma(h_{(1)})\overline{\gamma}(1_H h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_A,$$

analogamente para $\sigma(h \otimes 1_H)$.

Por fim, vejamos que $A \simeq B\#_\sigma H$, conforme Definição 1.63. Definamos, para todo $a \in A$, $b \otimes h \in B\#_\sigma H$, os morfismos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & B\#_\sigma H & \to & A \\ & b \otimes h & \mapsto & b\gamma(h) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi: & A & \to & B\#_\sigma H \\ & a & \mapsto & \sum a^{(0)}\overline{\gamma}(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} \end{array}$$

Notemos primeiramente que o morfismo ϕ é um morfismo de álgebras e de H-comódulos à direita. Sejam $a \otimes h,\ b \otimes k \in B\#_\sigma H$, então:

$$\begin{aligned} \phi((a \otimes h)(b \otimes k)) &= \phi(\sum a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)}) \\ &= \sum a\gamma(h_{(1)})b\overline{\gamma}(h_{(2)})\gamma(h_{(3)})\gamma(k_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(4)}k_{(2)})\gamma(h_{(5)}k_{(3)}) \\ &= \sum a\gamma(h_{(1)})b\varepsilon(h_{(2)})\gamma(k_{(1)})\varepsilon(h_{(3)}k_{(2)}) \\ &= \sum a\gamma(h)b\gamma(k) = \phi(a \otimes h)\phi(b \otimes k), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho \circ \phi(a \otimes h) &= \rho(a\gamma(h)) \\ &= \rho(a)\rho(\gamma(h)) \\ &= (a \otimes 1_A)((\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(h)) \\ &= \sum a\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \phi(a \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= (\phi \otimes I_H) \circ (I_A \otimes \Delta)(a \otimes h) \\
&= (\phi \otimes I_H) \circ \rho_{A\otimes H}(a \otimes h).
\end{aligned}
$$

Por fim, mostramos que ψ é o inverso de ϕ. Sejam $a \in A$ e $b \otimes h \in B\#_\sigma H$.

$$
\begin{aligned}
\phi \circ \psi(a) &= \phi(\sum a^{(0)}\overline{\gamma}(a^{(1)}) \otimes a^{(2)}) \\
&= \sum a^{(0)}\overline{\gamma}(a^{(1)})\gamma(a^{(2)}) \\
&= \sum a^{(0)}\varepsilon(a^{(1)}) = a,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\psi \circ \phi(b \otimes h) &= \psi(b\gamma(h)) \\
&= \sum b^{(0)}\gamma(h)^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)}\gamma(h)^{(1)}) \otimes b^{(2)}\gamma(h)^{(2)} \\
&= \sum b\gamma(h_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} \\
&= \sum b\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = b \otimes h.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A \simeq B\#_\sigma H$, como queríamos.

($\Leftarrow$) Suponhamos $A = B\#_\sigma H$, para B e σ determinados.

Provemos que existe $\gamma : H \to A = B\#_\sigma H$ inversível por produto de convolução. Para isso, definimos uma estrutura de comódulo sobre A através do morfismo

$$
\begin{aligned}
\rho : \quad A \quad &\to \quad A \otimes H \\
b \otimes h \quad &\mapsto \quad \sum b \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Mostremos que $B = A^{coH}$. Claramente, $B \subset B\#_\sigma H$, pois há uma cópia de B em $B\#_\sigma H$ dada pela imersão

$$B \hookrightarrow B\#_\sigma H \subseteq A^{coH}$$

que a cada $b \in B$ associa o elemento $b \otimes 1_H$. Seja $\sum a_i \otimes h_i \in A^{coH}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $\{a_i\}$ são linearmente independentes. Então, aplicando ρ, temos que

$$\sum a_i \otimes h_{i_{(1)}} \otimes h_{i_{(2)}} = \sum a_i \otimes h_i \otimes 1_H$$

e aplicando o morfismo $I_A \otimes \varepsilon \otimes I_H$, temos que

$$\sum a_i \otimes h_i = \sum a_i \otimes \varepsilon(h_i) 1_H. \tag{2.1}$$

Daí, tomando funcionais lineares $\{\alpha_i \in B^*\}_{i=1}^n$ de forma que $\alpha_i(a_j) = \delta_{ij}$ e aplicando em 2.1 temos que

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_j \otimes I_H)(\sum a_i \otimes h_i) & = & (\alpha_j \otimes I_H)(\sum a_i \otimes \varepsilon(h_i)1_H) \\ & \Rightarrow & h_j = \varepsilon(h_j)1_H \\ & \Rightarrow & \sum a_i \otimes h_i = \sum a_i \varepsilon(h_i) \otimes 1_H \in B \otimes 1_H = B. \end{array}$$

Portanto, $B = A^{coH}$, como queríamos.

Vejamos agora que A é um H-comódulo álgebra. De fato, sejam $a \otimes h,\ b \otimes k \in B\#_\sigma H$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} \rho((a \otimes h)(b \otimes k)) & = & \rho(\sum a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)}) \\ & = & \sum a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)} \otimes h_{(4)}k_{(3)}. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} \rho(a \otimes h)\rho(b \otimes k) & = & (a \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)})(b \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\ & = & \sum a(h_{(1)} \triangleright b)\sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \otimes h_{(3)}k_{(2)} \otimes h_{(4)}k_{(3)}. \end{array}$$

E portanto, A é um H-comódulo álgebra.

Por fim, definimos

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & H & \to & B\#_\sigma H \\ & h & \mapsto & 1_B \otimes h, \end{array}$$

tal que vale $\gamma(1_H) = 1_B \otimes 1_H = 1_{B\#_\sigma H}$ e vemos que

$$\rho(\gamma(h)) = \rho(1_B \otimes h) = \sum 1_B \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}, \text{ para todo } h \in H;$$

e

$$(\gamma \otimes I_H)\Delta(h) = \sum \gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = \sum 1_B \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}, \text{ para todo } h \in H.$$

A inversa de γ é dada por

$$\begin{array}{rccl} \overline{\gamma}: & H & \to & B\#_\sigma H \\ & h & \mapsto & \sum \overline{\sigma}(S(h_{(2)}), h_{(3)}) \otimes S(h_{(1)}). \end{array}$$

De fato, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{array}{rcl} \overline{\gamma} * \gamma(h) & = & \overline{\gamma}(h_{(1)})\gamma(h_{(2)}) \\ & = & \sum(\overline{\sigma}(S(h_{(2)}), h_{(3)}) \otimes S(h_{(1)}))(1_B \otimes h_{(4)}) \\ & = & \sum \overline{\sigma}(S(h_{(4)}), h_{(5)})(S(h_{(3)}) \triangleright 1_B)\sigma(S(h_{(2)}), h_{(6)}) \otimes S(h_{(1)})h_{(7)} \\ & = & \sum \overline{\sigma}(S(h_{(3)}), h_{(4)})\sigma(S(h_{(2)}), h_{(5)}) \otimes S(h_{(1)})h_{(6)} \\ & = & 1_B \otimes \sum S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h) 1_B \otimes 1_H. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \gamma * \overline{\gamma}(h) & = & \sum \gamma(h_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}) \\ & = & \sum(1_B \otimes h_{(1)})(\overline{\sigma}(S(h_{(3)}), h_{(4)})) \otimes h_{(2)}) \\ & = & \sum(h_{(1)} \triangleright \overline{\sigma}(S(h_{(6)}), h_{(7)}))\sigma(h_{(2)}, S(h_{(5)})) \otimes h_{(3)}S(h_{(4)}) = *. \end{array}$$

Para continuarmos a demonstração, precisamos ver que

$$h \triangleright \overline{\sigma}(k,l) = \sum \sigma(h_{(1)}, k_{(1)}l_{(1)})\overline{\sigma}(h_{(2)}k_{(2)}, l_{(2)})\overline{\sigma}(h_{(3)}, k_{(3)}),$$

para todo $h,\ k,\ l \in H$.

De fato, como $\sum \overline{\sigma}(k_{(1)}, l_{(1)})\sigma(k_{(2)}, l_{(2)}) = \varepsilon(k)\varepsilon(l)1_B$, temos que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(h)\varepsilon(k)\varepsilon(l)1_B = h \triangleright \left(\sum \overline{\sigma}(k_{(1)}, l_{(1)})\sigma(k_{(2)}, l_{(2)})\right)\\
&= \sum (h_{(1)} \triangleright \overline{\sigma}(k_{(1)}, l_{(1)}))(h_{(2)} \triangleright \sigma(k_{(2)}, l_{(2)}))\\
&= \sum (h_{(1)} \triangleright \overline{\sigma}(k_{(1)}, l_{(1)}))\sigma(h_{(2)}, k_{(2)})\sigma(h_{(3)}k_{(3)}, l_{(2)})\overline{\sigma}(h_{(4)}, k_{(4)}l_{(3)})\\
&\Rightarrow h \triangleright \overline{\sigma}(k,l) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)}l_{(1)})\overline{\sigma}(h_{(2)}k_{(2)}, l_{(2)})\overline{\sigma}(h_{(3)}, k_{(3)}).
\end{aligned}$$

Assim, tomando $k = S(h_{(4)})$ e $l = h_{(5)}$, temos

$$\begin{aligned}
* \quad &= \quad \sum (h_{(1)} \triangleright \overline{\sigma}(S(h_{(4)}), h_{(5)}))\sigma(h_{(2)}, S(h_{(3)})) \otimes 1_H\\
&= \quad \sum \sigma(h_{(1)}, S(h_{(8)})h_{(9)})\overline{\sigma}(h_{(2)}S(h_{(7)}), h_{(10)})\overline{\sigma}(h_{(3)}, S(h_{(6)}))\\
&\qquad\qquad \sigma(h_{(4)}, S(h_{(5)})) \otimes 1_H\\
&= \quad \sum \sigma(h_{(1)}, 1_H)\overline{\sigma}(h_{(2)}S(h_{(3)}), h_{(4)}) \otimes 1_H\\
&= \quad \varepsilon(h)1_B \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

O que nos mostra que se $A \simeq B\#_\sigma H$, então $B \subset A$ é uma H-extensão fendida.

■

2.3 Extensões de Hopf-Galois

Na teoria de grupos, dizemos que uma extensão algébrica $E \subset F$ $(F\backslash E)$ é galoisiana (extensão de Galois) se $F\backslash E$ é uma extensão normal e separável. Por extensão normal, entendemos que para todo $\alpha \in F$, o polinômio minimal $Irr(\alpha, E)$ tem todas as raízes em F. Por separável, dizemos que para todo $\alpha \in F$, $Irr(\alpha, E)$ tem raízes simples.

Podemos ver tais extensões, de forma mais geral, como ações de grupos sobre anéis comutativos. Essas idéias foram estendidas para coações de álgebras de Hopf agindo sobre uma k-álgebra comutativa, com k um anel comutativo, ao que foram chamadas de extensões de Hopf-Galois por Chase e Sweedler. E generalizadas por Kreimer e Takeuchi no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita. Formalmente, sejam H uma álgebra de Hopf, A, B álgebras.

Definição 2.11 *Dizemos que uma H-extensão $B = A^{coH} \subset A$ com $\rho : A \to A \otimes H$ (estrutura de H-comódulo de A), é H-Galois à direita se o morfismo*

$$can : A \otimes_B A \to A \otimes_k H$$

definido por $can(a \otimes_B b) = (a \otimes 1_H)\rho(b)$ é bijetiva.

No decorer do trabalho, chamaremos extensões H-Galois por H-extensão de Hopf-Galois.

Podemos definir também as H-extensões de Hopf-Galois à esquerda, através do morfismo can' dado por

$$\begin{array}{rccl} can' & A \otimes_B A & \to & A \otimes_k H \\ & a \otimes b & \mapsto & \rho(a)(b \otimes 1_H). \end{array}$$

Se a antípoda, S, é bijetiva, temos o seguinte resultado:

Afirmação: O morfismo can' é bijetivo se, e somente se, o morfismo can é bijetivo.

Seja $\phi \in End(A \otimes H)$ tal que $\phi(a \otimes h) = \rho(a)(1_A \otimes S(h))$ e sua inversa $\phi^{-1} \in End(A \otimes H)$ dada por $\phi^{-1}(a \otimes h) = (1_A \otimes S^{-1}(h))\rho(a)$. Assim, vemos que $\phi \circ can = can'$ e $\phi^{-1} \circ can' = can$.

Portanto, can é bijetiva se, e somente se, can' é bijetiva.

■

Observação 2.12 *Para extensões de Hopf-Galois $B \subset A$, consideraremos para todo $h \in H$, $l_i(h),\ r_i(h) \in A$, $i \in I$, uma quantidade finita de termos tais que*

$$1_A \otimes h = \sum_i \sum_{(h)} l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \in A \otimes H \tag{2.2}$$

Dizemos que $\sum l_i(h) \otimes r_i(h)$ é unicamente determinada como a imagem inversa de $1_A \otimes h$ pelo isomorfismo can.

Vejamos ainda, que no contexto das extensões algébricas de corpos, as definições de extensão de Galois e extensão de Hopf-Galois se equivalem.

Teorema 2.13 *Seja $F \backslash E$ uma extensão algébrica finita e $G = gal(F \backslash E)$, então $F \backslash E$ é uma extensão galoisiana se, e somente se, $E \subset F$ é uma $(EG)^*$-extensão de Hopf Galois.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Tome $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e sejam $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma E-base de F, $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ a base dual de $(EG)^*$ e uma coação dada por

$$\begin{array}{cccc} \rho : & F & \to & F \otimes_E (EG)^* \\ & a & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \rhd a) \otimes p_i. \end{array}$$

Afirmação: $E = F^{co((EG)^*)}$

De fato, seja $a \in E$, então

$$\rho(a) = \sum a \otimes p_i = a \otimes \sum p_i = a \otimes 1_{(EG)^*}.$$

Por outro lado, seja $b \in F^{co((EG)^*)}$, logo, $\rho(b) = b \otimes 1_{(EG)^*}$, assim,

$$x_i \triangleright b = \sum b^{(0)} < \delta_{x_i}, b^{(1)} >= b \Rightarrow b \in E.$$

Portanto, $E = F^{co((EG)^*)}$.

Definimos:

$$\begin{array}{rccl} can: & F \otimes_E F & \to & F \otimes_E (EG)^* \\ & a \otimes b & \mapsto & (a \otimes 1_{(EG)^*})\rho(b) := \sum a(x_i \triangleright b) \otimes p_i. \end{array}$$

Mostremos que can é injetivo. Seja $w = \sum a_j \otimes b_j \in \ker(can)$, então

$$0 = can(w) = can(\sum a_j \otimes b_j) = \sum a_j(x_i \triangleright b_j) \otimes p_i$$

em que $\{b_j\}$ é base de $F \backslash E$. Como $\{p_i\}$ é base de $(EG)^*$, concluímos que $\sum a_j(x_i \triangleright b_j) = 0$, para todo i, assim, $a_j = 0$, pelo Lema de Dedekind (ver Lema C.4) e o fato de $A = (x_i \triangleright b_j)_{i,j}$ ser uma matriz inversível e portanto, $w = \sum a_j \otimes b_j = 0$.

Como $dim(F \otimes_E F) = n^2 = dim(F \otimes (EG)^*)$, segue que can é sobrejetiva, e portanto, bijetiva.

($\Leftarrow$) Sabemos que $dim(F \otimes_E F) = [F : E]^2$ e também que $dim(F \otimes (EG)^*) = |G|[E : F]$. Logo, como

$$dim(F \otimes_E F) = dim(F \otimes (EG)^*),$$

temos que $[F : E] = |G|$ e portanto, $F\backslash E$ é uma extensão galoisiana.

■

O exemplo abaixo mostra que nem toda extensão de Hopf-Galois é uma extensão algébrica galoisiana.

Exemplo 2.14 *Sejam $E = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $w := \sqrt[4]{2}$ e o quociente $H := k[c, s]/ < c^2 + s^2 - 1, cs >$ com estrutura de comultiplicação dada por*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & H & \to & H \otimes_E H \\ & c & \mapsto & c \otimes c - s \otimes s \\ & s & \mapsto & c \otimes s + s \otimes c \end{array},$$

counidade

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & H & \to & E \\ & c & \mapsto & 1 \\ & s & \mapsto & 0, \end{array}$$

e antípoda

$$\begin{array}{rccc} S : & H & \to & H \\ & c & \mapsto & c \\ & s & \mapsto & -s. \end{array}$$

A ação de H_k sobre E é dada por

$\cdot$	1	w	w^2	w^3
c	1	0	$-w^2$	0
s	0	$-w$	0	w^3

Portanto, $E \subset F$ é H_k^*-extensão de Hopf-Galois para o corpo $k = \mathbb{Q} = E$. Porém, $E \subset F$ não é uma extensão galoisiana clássica, pois, embora $E \subset F$ seja uma extensão algébrica separável, a mesma não é normal, uma vez que o polinômio minimal de $\sqrt[4]{2}$ é $x^4 - 2$ e tem raízes imaginárias $\pm i\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R}$.

No próximo exemplo, caracterizamos os anéis graduados como extensões de Hopf-Galois. Antes de enunciá-lo, lembramos que uma álgebra A ser fortemente graduada é o mesmo que dizermos $A_x \cdot A_y = A_{xy}$, para todo $x,\ y \in G$.

Exemplo 2.15 *Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada, ou seja, A é um kG-comódulo álgebra via $\rho : A \to A \otimes kG$, dada por $\rho(a) = \sum_{x \in G} a_x \otimes x$, em que $a = \sum_{x \in G} a_x \in \bigoplus_{x \in G} A_x$. Ainda, como $H = kG$, então $A^{coH} = A_e$.*

Então $A_e \subset A$ é kG-extensão de Hopf-Galois se, e somente se, A é fortemente graduada.

Primeiramente, verifiquemos que A ser fortemente graduada é equivalente a $A_x \cdot A_{x^{-1}} = A_e$, de fato,

$$A_{xy} = A_{xy} \cdot A_e = A_{xy} \cdot (A_{y^{-1}} \cdot A_y) = (A_{xy} A_{y^{-1}}) A_y \subseteq A_x \cdot A_y \subseteq A_{xy}.$$

$$\Rightarrow A_x \cdot A_y = A_{xy}.$$

Demonstremos por fim o resultado dado no exemplo acima.

($\Leftarrow$) Sejam A fortemente graduada e

$$\begin{array}{rccc} can: & A \otimes_{A_e} A & \to & A \otimes kG \\ & a \otimes b & \mapsto & \sum_x a b_x \otimes x, \end{array}$$

o morfismo de Galois. Mostremos que can é bijetiva.

Definimos

$$\begin{array}{rccc} \omega: & A \otimes kG & \to & A \otimes_{A_e} A \\ & a \otimes g & \mapsto & \sum_i a a_i^g \otimes b_i^g \end{array},$$

em que $a_i^g \in A_{g^{-1}}$, $b_i^g \in A_g$, $i = 1, \cdot, n_g$ *e* $\sum_i a_i^g b_i^g = 1 \in A_1 = A_g \cdot A_{g^{-1}}$. *Sejam* $a,\ b \in A$ *e* $g \in G$, *então,*

$$\begin{aligned} can \circ \omega(a \otimes g) &= can(\sum_i a a_i^g \otimes b_i^g) \\ &= \sum_{i,x} a a_i^g b_{i_x}^g \otimes x \\ &= \sum_i a a_i^g b_{i_g}^g \otimes g \\ &= a \sum_i a_i^g b_i^g \otimes g \\ &= a \otimes g. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega \circ can(a \otimes b) &= \omega(\sum_g a b_g \otimes g) \\ &= \sum_{g,i} a b_g a_{i_g}^g \otimes b_{i_g}^g \\ &= \sum_{g,i} a \otimes b_g a_{i_g}^g b_{i_g}^g \\ &= \sum_g a \otimes b_g = a \otimes b. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) *Seja* $can : A \otimes_{A_e} A \to A \otimes kG$ *bijetiva. Em particular,* can *é sobrejetiva, logo,* $1_A \otimes y \in Im(can)$, *para todo* $y \in G$. *Portanto, existem* $a_i,\ b_i \in A$ *tais que* $can(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_{i,x} a_i b_{i_x} \otimes x = 1_A \otimes y$, *para todo* $y \in G$. *Segue que* $\sum_{i,y} a_i b_{i_y} = 1_A$ *e* $\sum_{i,x} a_i b_{i_x} = 0$, *para todo* $x \neq y$, *o que implica em* $A_{y^{-1}} \cdot A_y = A_e$ *e consequentemente,* A *é fortemente graduada como queríamos.*

■

Vejamos agora um lema que nos dá algumas propriedades sobre a inversa do morfismo *can*, com base no que foi definido na Observação 2.12.

Lema 2.16 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois. Escrevendo $can^{-1}(1_A \otimes h) = \sum l_i(h) \otimes r_i(h)$ como na Observação 2.12. Então, para todo $h \in H$ e $a \in A$, temos:*

(i) $\sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}) = 1_A \otimes a$;

(ii) $\sum l_i(h) r_i(h) = \varepsilon(h) 1_A$;

(iii) $\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} = \sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$

Demonstração: (i) Seja $a \in A$, então

$$\begin{aligned} 1_A \otimes a &= can^{-1} \circ can(1_A \otimes a) \\ &= can^{-1}\left(\sum a^{(0)} \otimes a^{(1)}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \sum a^{(0)} can^{-1}(1_A \otimes a^{(1)}) \\ &= \sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}). \end{aligned}$$

Notemos que $(*)$ é válido pois can^{-1} é um morfismo de A-módulos à esquerda.

(ii) Seja $h \in H$, logo, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(h)1_A &= \mu(I_A \otimes \varepsilon)(1_A \otimes h) \\ &= \mu(I_A \otimes \varepsilon) can \circ can^{-1}(1_A \otimes h) \\ &= \mu(I_A \otimes \varepsilon)\left(\sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) \\ &= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \varepsilon(r_i(h)^{(1)}) \\ &= \sum l_i(h) r_i(h). \end{aligned}$$

(iii) Para mostrarmos (iii), consideramos o morfismo $can \otimes I_H$ e aplicamo-lo dos dois lados da equação, então

$$
\begin{aligned}
(can \otimes I_H)\left(\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) = \\
&= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)(0)} \otimes r_i(h)^{(0)(1)} \otimes r_i(h)^{(1)} \\
&= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \otimes r_i(h)^{(2)} \\
&= (I_A \otimes \Delta)\left(\sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) \\
&= (I_A \otimes \Delta)(1_A \otimes h) \\
&= 1_A \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Pelo outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(can \otimes I_H)\left(\sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\right) = \\
&= \sum l_i(h_{(1)}) r_i(h_{(1)})^{(0)} \otimes r_i(h_{(1)})^{(1)} \otimes h_{(2)} \\
&= 1_A \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.
\end{aligned}
$$

O que mostra a igualdade (iii).

$\blacksquare$

Finalizamos essa seção com um lema que caracteriza uma extensão de Hopf-Galois a partir de certas propriedades dadas. Para sua demonstração, entretanto, precisamos antes provar que existe um isomorfismo $\phi : \ker(\mu) \to A \otimes_C A/C$, em que A é um H-comódulo álgebra à direita e C uma subálgebra de A^{coH}.

De fato, consideremos a sequência exata

$$0 \to C \overset{i}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\to} A/C \to 0.$$

Tensorizando em A sobre C, temos a seguinte sequência exata,

$$A \otimes_C C \overset{I_A \otimes i}{\hookrightarrow} A \otimes_C A \overset{I_A \otimes \pi}{\to} A \otimes_C A/C \to 0.$$

Notemos que mesma cinde, de fato, se considerarmos o morfismo $\Lambda : A \to A \otimes_C C$, definido por $\Lambda(a) = a \otimes 1_C$ então $\Lambda \circ \mu$ é um morfismo de $A \otimes_C A \to A \otimes_C C$ tal que $\Lambda \circ \mu \circ (I_A \otimes i) = I_{A \otimes_C C}$, ainda, vemos que $I_A \otimes i$ é injetora, pois como

$$(\Lambda \circ \mu) \circ (I_A \otimes i) = I_A \otimes_C e,$$

temos que $\Lambda \circ \mu$ é epimorfismo e $I_A \otimes i$ é monomorfismo, e que

$$0 \to A \otimes_C C \to A \otimes_C A \to A \otimes_C A/C \to 0$$

é exata e cindida.

Assim, como a sequência cinde, existe $Q \subset A \otimes_C A$ tal que $A \otimes_C A = Im(I_A \otimes i) \oplus Q$ e deduzimos que $Q = \ker(\Lambda \circ \mu)$. Se provarmos que Λ é injetora, obtemos que $Q = \ker(\mu)$, mas, temos a aplicação k-linear

$$\begin{array}{rccc} p: & A \otimes_C C & \to & A \\ & a \otimes c & \mapsto & ac, \end{array}$$

e como $p \circ \Lambda = I_A$, temos que Λ é injetora.

Lema 2.17 *Sejam A um H-comódulo álgebra à direita e C uma subálgebra de A^{coH} tal que*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & A \otimes_C A & \to & A \otimes H \\ & a \otimes b & \mapsto & \sum ab^{(0)} \otimes b^{(1)} \end{array}$$

é bijetivo e exista $s : A \to C$ homomorfismo unital e C-linear à direita. Então $C = A^{coH}$ e A é uma extensão H-Galois de C.

Demonstração: Claramente $C \subseteq A^{coH}$. Mostremos que $A^{coH} \subseteq C$.

Notamos primeiramente que dado $x \in A^{coH}$, temos,

$$\begin{aligned} 1_A \otimes x &= \psi^{-1}(\psi(1_A \otimes x)) \\ &= \sum \psi^{-1}(x^{(0)} \otimes x^{(1)}) \\ &= \psi^{-1}(x \otimes 1_H) \\ &= \psi^{-1}(\psi(x \otimes 1_A)) \\ &= x \otimes 1_A. \end{aligned}$$

Então, como existe o isomorfismo $\phi : \ker(\mu) \to A \otimes_C A/C$ dado por $\phi(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i \otimes [b_i]_C$. Temos que, em particular, ϕ leva $1_A \otimes x - x \otimes 1_A$ em $1_A \otimes [x]_C$, daí, aplicando o morfismo $\mu \circ (s \otimes I)$ em $1_A \otimes [x]_C$, temos que $0 = \mu \circ (s \otimes I_{A/C})(1_A \otimes [x]_C) = [x]_C$, ou seja, $x \in C$ como queríamos.

■

2.3.1 Extensões Fendidas e a Propriedade da Base Normal

Um teorema clássico da teoria de Galois diz que se $F \backslash E$ é uma extensão de Galois finita de corpos, e G é o grupo de Galois associado, então $F \backslash E$ tem uma base normal, isto é, existe $a \in F$ tal que o conjunto $\{x \triangleright a : x \in G\}$ é uma base para F sobre E (vide [25]). Assim como na seção anterior, estenderemos essa noção para H-extensões de Galois.

Definição 2.18 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão à direita. Dizemos que ela tem a propriedade da base normal se $A \simeq B \otimes H$ como B-módulo à esquerda e H-comódulo à direita.*

O exemplo abaixo nos mostra que a definição de base normal para extensões de Hopf-Galois é equivalente a definição clássica de base normal para extensões de Galois, quando a álgebra de Hopf H tem dimensão finita.

Exemplo 2.19 *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $dim H = n$, e $B \subset A$ uma H-extensão. Consideremos H^* agindo sobre A, com $A^{H^*} = B$.*

Suponhamos que A tenha uma base normal no sentido usual. Isto é, existe $u \in A$ e $\{f_i\} \subset H^*$ tais que $\{f_1 \triangleright u, f_2 \triangleright u, \cdots, f_n \triangleright u\}$ é uma base para o B-módulo livre à esquerda A.

Lembramos que, se $0 \neq t \in \int_H^l$ então $H \simeq H^* \rightharpoonup t$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} \psi : & H^* & \to & H \\ & f & \mapsto & (f \rightharpoonup t). \end{array}$$

é isomorfismo de H^*-módulo à esquerda. E portanto, definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi : & B \otimes H & \to & A \\ & b \otimes (f \rightharpoonup t) & \mapsto & b(f \triangleright u). \end{array}$$

Como $B \otimes H$ é um H^*-módulo à esquerda com ação dada por $f \cdot (b \otimes h) = b \otimes (f \rightharpoonup h)$, segue pela dualidade, que $B \otimes H$ tem estrutura de H-comódulo à direita, com coação dada por $(I \otimes \Delta)$.

Além disso, o morfismo ϕ dado acima é um morfismo de H^*-módulo à esquerda e portanto, morfismo de H-comódulo à direita, e claramente, ϕ é isomorfismo de B-módulo à esquerda.

Por outro lado, consideremos $A \simeq B \otimes H$. Seja $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ uma k-base para H^*, então

$$\{1_B \otimes (f_1 \rightharpoonup t), 1_B \otimes (f_2 \rightharpoonup t), \cdots, 1_B \otimes (f_n \rightharpoonup t)\}$$

é uma B-base para $B \otimes H$.

Daí, via $\phi : B \otimes H \stackrel{\simeq}{\to} A$, segue que

$$\{f_1 \rhd u, f_2 \rhd u, \cdots, f_n \rhd u\}$$

é base de A, em que $u = \phi(1_B \otimes t)$.

O próximo exemplo, na verdade um contra-exemplo, evidencia que nem toda extensão de Hopf-Galois tem a propriedade da base normal.

Exemplo 2.20 *Seja $A = M_3(k)$. A é $\mathbb{Z}_2$-graduado pelos conjuntos*

$$A_{\overline{0}} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad e \quad A_{\overline{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil vermos que A é fortemente graduado, logo, pelo Exemplo 2.15, $A_{\overline{0}} \subset A$ é uma extensão de Hopf-Galois. Porém, $A \not\simeq A_{\overline{0}} \otimes k\mathbb{Z}_2$, pois $dim(A) = 9 \neq 10 = (dim A_{\overline{0}} \otimes k\mathbb{Z}_2)$.

Para finalizarmos essa seção, relacionamos as extensões fendidas com as extensões de Hopf-Galois que possuem a propriedade da base normal através do seguinte teorema, e mostramos algumas aplicações.

Teorema 2.21 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão, então são equivalentes:*

(i) *$B \subset A$ é H-fendida;*

(ii) *$B \subset A$ é H-extensão de Hopf-Galois e tem a propriedade da base normal.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $B \subset A$ uma extensão fendida, então, pelo Teorema 2.10, $A \simeq B\#_\sigma H$ como B-módulo à esquerda e H-comódulo à direita. Portanto, a propriedade da base normal é satisfeita.

Resta mostrarmos que $B \subset A$ é H-Galois, ou seja, acharmos quem é a inversa para o morfismo

$$\begin{array}{rccl} can: & A \otimes_B A & \to & A \otimes H \\ & a \otimes b & \mapsto & \sum ab^{(0)} \otimes b^{(1)}. \end{array}$$

Como $B \subset A$ é H-fendida, tomamos $\gamma : H \to A$ um morfismo fenda e definimos

$$\begin{array}{rccl} can^{-1}: & A \otimes H & \to & A \otimes_B A \\ & a \otimes h & \mapsto & \mu((a \otimes 1_B) \circ (\overline{\gamma} \otimes \gamma) \circ \Delta(h)) = \sum a\overline{\gamma}(h_{(1)}) \otimes \gamma(h_{(2)}). \end{array}$$

Claramente can^{-1} está bem definida. Vejamos que ela é a inversa do morfismo can. Seja $a \otimes h \in A \otimes H$, daí,

$$can \circ can^{-1}(a \otimes h) = \sum a\overline{\gamma}(h_{(1)})\gamma(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} = a \otimes h.$$

Por outro lado, para mostrarmos que $can^{-1} \circ can = I_{A \otimes_B A}$, precisamos provar que $\sum b^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)}) \in B = A^{coH}$.

De fato,

$$\begin{array}{rcl} \rho(\sum b^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)})) & = & \sum \rho(b^{(0)})\rho(\overline{\gamma}(b^{(1)})) \\ & = & \sum (b^{(0)(0)} \otimes b^{(0)(1)})((\overline{\gamma} \otimes S) \circ \Delta^{op}(b^{(1)})) \\ & = & \sum (b^{(0)(0)} \otimes b^{(0)(1)})((\overline{\gamma} \otimes S) \circ (b^{(1)}_{(2)} \otimes b^{(1)}_{(1)})) \\ & = & \sum (b^{(0)(0)} \otimes b^{(0)(1)})(\gamma(b^{(1)}_{(2)}) \otimes S(b^{(1)}_{(1)})) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum(b^{(0)} \otimes b^{(1)})(\gamma(b^{(3)}) \otimes S(b^{(2)})) \\
&= \sum b^{(0)}\gamma(b^{(3)}) \otimes b^{(1)}S(b^{(2)}) \\
&= \sum b^{(0)}\gamma(b^{(2)}) \otimes \varepsilon(b^{(1)}) \\
&= \sum b^{(0)}\gamma(b^{(1)}) \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sum b^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)}) \in B = A^{coH}$, e segue que para todo $a \otimes b \in A \otimes_B A$,

$$
\begin{aligned}
can^{-1} \circ can(a \otimes b) &= \sum can^{-1}(ab^{(0)} \otimes b^{(1)}) \\
&= \sum ab^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)}_{(1)}) \otimes \gamma(b^{(1)}_{(2)}) \\
&= \sum a \otimes b^{(0)}\overline{\gamma}(b^{(1)})\gamma(b^{(2)}) \\
&= \sum a \otimes b^{(0)}\varepsilon(b^{(1)}) \\
&= a \otimes b,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois com a propriedade da base normal, ou seja, can é bijetiva e existe um isomorfismo de B-módulo à esquerda e H-comódulo à direita $\phi : B \otimes H \stackrel{\simeq}{\to} A$. Assim, definimos,

$$
\begin{aligned}
\gamma : \quad H &\to A \\
h &\mapsto \gamma(h) := \phi(1_B \otimes h).
\end{aligned}
$$

Claramente, γ é morfismo de H-comódulo à direita, pois ϕ o é, e

$$
\begin{aligned}
H &\to B \otimes H \\
h &\mapsto 1 \otimes h,
\end{aligned}
$$

é morfismo de H-comódulo à direita.

Mostremos que γ é inversível por produto de convolução. Para isso, seja $g \in Hom_B(A, B)$ tal que $g(a) := (I_B \otimes \varepsilon) \circ \phi^{-1}(a)$. Notemos que se $\phi^{-1}(a) = \sum b_i \otimes h_i$ então $g(a) = \sum b_i\varepsilon(h_i)$.

Notamos ainda que $g(\gamma(h)) = \varepsilon(h)1_B$, e então,

$$\begin{array}{rccl} \overline{\gamma}: & H & \to & A \\ & h & \mapsto & \mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1}(1_A \otimes h), \end{array}$$

está bem definida. Vejamos que $\overline{\gamma}$ é a inversa por convolução de γ. Seja $h \in H$, logo,

$$\begin{array}{rcl} \gamma * \overline{\gamma}(h) & = & \sum \gamma(h_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}) \\ & = & \sum \gamma(h_{(1)})(\mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1}(1_A \otimes h_{(2)})) \\ & = & \sum \mu \circ [(\gamma(h_{(1)}) \otimes 1_B)(I_A \otimes g)] \circ can^{-1}(1_A \otimes h_{(2)}) \\ & = & \sum \mu \circ (I_A \otimes g)((\gamma(h_{(1)}) \otimes 1_A)can^{-1}(1_A \otimes h_{(2)})) \\ & = & \sum \mu \circ (I_A \otimes g)can^{-1}(\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}) \\ & = & \sum \mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1}(\gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)})) \\ & = & \mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1} \circ \rho \circ \gamma(h) \\ & = & \mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1} \circ can(1_A \otimes \gamma(h)) \\ & = & \mu \circ (I_A \otimes g) \circ (1_A \otimes \gamma(h)) \\ & = & \varepsilon(h)1_A. \end{array}$$

Para mostrarmos que $\overline{\gamma} * \gamma = \eta \circ \varepsilon$ devemos ver que:

(a) $(I_A \otimes \Delta) \circ can = (can \otimes I_H) \circ (I_A \otimes \rho)$;

(b) $(I_A \otimes \rho) \circ can^{-1} = (can^{-1} \otimes I_H) \circ (I_A \otimes \Delta)$;

(c) $a = \sum g(a^{(0)})\gamma(a^{(1)})$.

Para (a) basta aplicarmos ambos os lados da equação no ponto $a \otimes b \in A \otimes_B A$ que a igualdade é facilmente verificada. Para (b), suponhamos que a igualdade não é válida e aplicamos o morfismo *can* à direita e o morfismo $(can \otimes I_H)$ à esquerda da desigualdade sugerida, obtendo $(can \otimes I_H) \circ (I_A \otimes \rho) \neq (I_A \otimes \Delta) \circ can$, o que contradiz a igualdade (a).

Mostremos (c). De fato, para todo $a \in A$, existem $\{a_i\} \in B$ e $\{h_i\} \in H$ tais que $a = \phi(\sum_i a_i \otimes h_i)$, por causa do isomorfismo $\phi : B \otimes H \to A$. Daí,

$$\sum a^{(0)} \otimes a^{(1)} = \rho(a) = \rho \circ \phi(\sum_i a_i \otimes h_i) = (\phi \otimes I_H) \circ (I_A \otimes \Delta)(\sum_i a_i \otimes h_i)$$

E então, aplicando o morfismo $\mu(g \otimes \gamma)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum g(a^{(0)})\gamma(a^{(1)}) &= \sum g \circ \phi(a_i \otimes h_{i_{(1)}})\gamma(h_{i_{(2)}}) \\
&= \sum \mu \circ (I_A \otimes \varepsilon) \circ \phi^{-1}(\phi(a_i \otimes h_{i_{(1)}}))\gamma(h_{i_{(2)}}) \\
&= \sum a_i \gamma(h_i) = \sum a_i \phi(1_B \otimes h_i) \\
&= \phi(\sum a_i \otimes h_i) = a.
\end{aligned}$$

Por fim, seja $h \in H$, daí

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma} * \gamma(h) &= \sum \overline{\gamma}(h_{(1)})\gamma(h_{(2)}) \\
&= \sum [\mu \circ (I_A \otimes g) \circ can^{-1}(1_A \otimes h_{(1)})]\gamma(h_{(2)}) \\
&\overset{(b)}{=} \sum [\mu \circ (I_A \otimes g)(l_i(h) \otimes (r_i(h))^{(0)})]\gamma((r_i(h))^{(1)}) \\
&= \sum l_i(h) g((r_i(h))^{(0)})\gamma((r_i(h))^{(1)}) \\
&\overset{(c)}{=} \sum l_i(h) r_i(h) = \varepsilon(h) 1_A.
\end{aligned}$$

como queríamos.

■

O corolário a seguir relaciona as extensões de Hopf-Galois que possuem a propriedade da base normal com o produto cruzado de B

com H. A demonstração segue do teorema acima e do Teorema 2.10.

Corolário 2.22 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão à direita. Então $B \subset A$ é H-extensão de Hopf-Galois com a propriedade da base normal se, e somente se, $A \simeq B\#_\sigma H$.*

A partir deste corolário, vemos que dada uma extensão de Hopf-Galois fendida, conseguimos determinar o cociclo e a ação do cociclo, que definem a estrutura de produto cruzado, através das fórmulas:

$$\sigma_\gamma(h \otimes l) := \sum \gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}l_{(2)});$$
$$h \triangleright_\gamma b := \sum \gamma(h_{(1)})b\overline{\gamma}(h_{(2)}),$$

em que $h,\ l \in H$, $b \in B = A^{coH}$ e $\gamma : H \to A$ é um morfismo fenda.

Por outro lado, com a ajuda de γ, podemos construir um morfismo de B-módulos à esquerda, unital, que nos permite calcular o cociclo σ_γ de maneira mais simples que a dada acima. A saber, definimos

$$\begin{array}{cccc} s_\gamma & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ \rho(a). \end{array}$$

Lema 2.23 *Seja A uma H-extensão Hopf-Galois fendida. Então o cociclo σ_γ é dado por*

$$\sigma_\gamma = s_\gamma \circ \mu \circ (\gamma \otimes \gamma),$$

em que γ é um morfismo fenda.

Demonstração: Sejam $h,\ l \in H$, então,

$$
\begin{aligned}
s_\gamma \circ \mu \circ (\gamma \otimes \gamma)(h \otimes l) &= s_\gamma(\gamma(h)\gamma(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})\rho(\gamma(h))\rho(\gamma(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})((\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(h))((\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})(\gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)}) \otimes h_{(2)}l_{(2)}) \\
&= \mu((\gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)}) \otimes \overline{\gamma}(h_{(2)}l_{(2)}))) = \sigma_\gamma(h \otimes l).
\end{aligned}
$$

■

Salientamos ainda que, com a ajuda do morfismo translação $\tau : H \to A \otimes_B A$ definido por $\tau(h) := can^{-1}(1 \otimes h) = \sum l_i(h) \otimes r_i(h)$, podemos calcular o morfismo $\gamma : H \to A$. A saber,

$$
\begin{aligned}
\mu \circ (I_A \otimes s_\gamma) \circ \tau(h) &= l_i(h)s_\gamma(r_i(h)) \\
&= l_i(h)(r_i(h))^{(0)}\overline{\gamma}((r_i(h))^{(1)}) \\
&= (\mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ can)(\textstyle\sum l_i(h) \otimes r_i(h)) \\
&= (\mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ can)(can^{-1}(1 \otimes h)) = \overline{\gamma}(h).
\end{aligned}
$$

E portanto, $\gamma = \overline{(\mu \circ (I_A \otimes s_\gamma) \circ \tau)}$.

2.3.2 Extensões de Galois para Álgebras de Hopf de Dimensão Finita

Para finalizarmos a seção, veremos alguns resultados da teoria de extensões de Hopf-Galois para o caso onde H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A é um H-módulo álgebra, e portanto, um H^*-comódulo álgebra.

Teorema 2.24 *Sejam A e H como acima e $can : A \otimes_{A^H} A \to A \otimes H^*$*

sobrejetora. Então:

(i) A é A^H-módulo projetivo, finitamente gerado à direita;

(ii) O morfismo can é injetivo.

Demonstração: (i) Sabemos que

$$\begin{array}{rccl} \theta: & H^* & \to & H \\ & f & \mapsto & \theta(f) = (t \leftharpoonup f) := \sum f(t_{(1)})t_{(2)}, \end{array}$$

é um isomorfismo de H^*-módulo à direita, para algum $0 \neq t \in \int_H^l$.

Tomemos $T \in H^*$ tal que $t \leftharpoonup T = 1_H$. Assim, $T \in \int_{H^*}^R$. Como can é sobrejetora, existem $a_i,\ b_i \in A$ tais que

$$1_A \otimes T = can(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i^{(0)} \otimes b_i^{(1)}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, defina $\phi_i(a) := t \cdot (b_i a) \in A^H$, para todo $a \in A$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^n a_i \phi_i(a) & = & \sum\limits_{i=1}^n a_i (t \cdot (b_i a)) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^n a_i (t_{(1)} \cdot b_i)(t_{(2)} \cdot a) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^n a_i b_i^{(0)} < b_i^{(1)}, t_{(1)} > (t_{(2)} \cdot a) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^n < T, t_{(1)} > (t_{(2)} \cdot a) \\ & = & (t \leftharpoonup T) \cdot a = a. \end{array}$$

(ii) Como H tem dimensão finita, se provarmos que o morfismo can' é injetivo, estará provado que o morfismo can é injetivo, em que $can'(a \otimes b) = \sum a^{(0)} b \otimes a^{(1)}$. Seja $\sum\limits_{i=1}^n u_i \otimes v_i \in \ker(can')$, ou seja,

$\sum u_i^{(0)} v_i \otimes u_i^{(1)}$, então por (i), segue que

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i & = & \sum\limits^{i,j} a_j \phi_j(u_i) \otimes v_i \\ & = & \sum\limits^{i,j} a_j \otimes \phi_j(u_i) v_i \\ & = & \sum\limits^{j} a_j \otimes \sum\limits^{i} (t \cdot (b_j u_i)) v_i \\ & = & \sum\limits^{j} a_j \otimes \sum\limits^{i} ((t_{(1)} \cdot b_j)(t_{(2)} \cdot u_i)) v_i \\ & = & \sum\limits^{j} a_j \otimes \sum\limits^{i} ((t_{(1)} \cdot b_j)(u_i^{(0)} < u_i^{(1)}, t_{(2)} >) v_i = 0. \end{array}$$

Portanto, $\ker(can') = 0$ e segue que can' é injetiva. Consequentemente, can é injetiva.

■

Lembramos que a ação à esquerda de $A\#H$ sobre A é dada por $(a\#h) \cdot b = a(h \cdot b)$. Assim, determinamos o morfismo de álgebra $\pi : A\#H \to End(A_{A^H})$, onde A é um A^H-módulo via multiplicação à direita. Do mesmo modo, relacionamos A^H com os endomorfismos de ${}_{A\#H}A$ através do seguinte lema.

Lema 2.25 *Sejam A e H como definidos acima. Então $A^H \simeq End({}_{A\#H}A)^{op}$ como álgebras.*

Demonstração: Definimos $\psi : A^H \to End({}_{A\#H}A)^{op}$ por $\psi(a) = a_r$, a multiplicação à direita por $a \in A^H$.

Notemos que para todo $a\#h \in A\#H$, $b \in A^H$ e $c \in A$, temos que

$$\begin{array}{rcl} a\#h(\psi(b)(c)) & = & (a\#h) \cdot (cb) \\ & = & a(h \cdot cb) \\ & = & \sum a(h_{(1)} \cdot c)(h_{(2)} \cdot b) \\ & = & a(h \cdot c)b \\ & = & \psi(b)((a\#h) \cdot c), \end{array}$$

portanto, ψ está bem definida. Vejamos que ψ é um isomorfismo de álgebras.

Sejam $a,\ b \in A^H$ e $c \in A$, logo,

$$\begin{aligned}\psi(ab)c &= c(ab) = (ca)b \\ &= \psi(b)(ca) = \psi(b)(\psi(a)(c)) \\ &= \psi(b) \circ \psi(a)(c).\end{aligned}$$

Ainda, ψ é um morfismo injetor, pois se $a \in \ker(\psi)$, então $\psi(a) \equiv 0$, o que implica em $ba = 0$, para todo $b \in A$. Em particular, se tomarmos $b = 1$, temos que $\psi(a)(1) = 1a = a = 0$. Por fim, mostremos a sobrejetividade.

Sejam $\sigma \in End({}_{A\#H}A)^{op}$ e $a \in A$, então

$$\sigma(a) = \sigma((a\#1_H) \cdot 1_A) = (a\#1_H)\sigma(1_A) = a\sigma(1_A) = \psi(\sigma(1_A))(a),$$

pois $\sigma(1_A) \in A^H$. Para vermos isso, seja $h \in H$, daí,

$$h \cdot \sigma(1_A) = (1_A\#h) \cdot \sigma(1_A) = \sigma(h \cdot 1_A) = \varepsilon(h)\sigma(1_A).$$

Portanto ψ é um isomorfismo, como queríamos.

■

Finalizamos essa subseção com uma série de equivalências que relaciona as extensões de Hopf-Galois à direita com a teoria vista até agora nessa subseção, assim como com o contexto de Morita.

Teorema 2.26 *Sejam A e H como antes, então são equivalentes:*

(i) $A^H \subset A$ é H^*-Galois à direita;

(ii) a) $\pi : A\#H \to End(A_{A^H})$ é um isomorfismo de álgebras;

b) A é um A^H-módulo à direita projetivo e finitamente gerado.

(iii) A é um gerador para a categoria dos $A\#H$-módulos à esquerda ${}_{A\#H}\mathcal{M}$, ou seja, para todo $N \in_{A\#H} \mathcal{M}$ existe um conjunto de índices I e um epimorfismo de $A\#H$-módulos $\psi : A^{(I)} \to N$ (isto é, A é um gerador na categoria ${}_{A\#H}\mathcal{M}$).

(iv) Se $0 \neq t \in \int_H^l$, então o morfismo

$$\begin{array}{rccc} [,]: & A \otimes_{A^H} A & \to & A\#H \\ & a \otimes b & \mapsto & atb \end{array}$$

é sobrejetor;

(v) Para qualquer $M \in {}_{A\#H}\mathcal{M}$, considere $A \otimes_{A^H} M^H$ como um $A\#H$-módulo à esquerda com ação $(a\#h)(b \otimes m) = a(h \cdot b) \otimes m$. Então,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A \otimes_{A^H} M^H & \to & M \\ & a \otimes m & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

é isomorfismo de $A\#H$-módulos à esquerda.

Antes de iniciarmos a demonstração, vejamos um fato que usaremos constantemente. Seja $M = A\#H$ então $M^H = (1_A\#t)(A\#1_H) = t \cdot A$, para todo $t \in \int_H^l$. Isto vem do fato que, se S é invertível, então $A\#H = (1_A\#H)(A\#1_H)$. A inclusão $(\supseteq)$ é óbvia, e a inclusão $(\subseteq)$ pode ser vista notando que

$$a\#h = \sum (1_A\#h_{(2)})((S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a)\#1_H).$$

Demonstração: (i) $\Leftrightarrow$ (iv) Basta mostrarmos que $[,] = (I_A \otimes \theta) \circ can$, onde θ é o mesmo isomorfismo dado no Teorema 2.24.

Sejam $a,\ b \in A$, então,

$$\begin{aligned}
[a,b] &= atb \\
&= \sum a(t_{(1)} \cdot b)t_{(2)} \\
&= \sum ab^{(0)} < b^{(1)}, t_{(1)} > t_{(2)} \\
&= \sum ab^{(0)}(t \leftharpoonup b^{(1)}) \\
&= (I_A \otimes \theta) \circ can(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Assim, se $[,]$ é sobrejetiva, então can é sobrejetiva e como H tem dimensão finita, segue que can é bijetiva. Por outro lado, se can é bijetiva, pela igualdade demonstrada, segue que $[,]$ é sobrejetiva.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Como $[,]$ é sobrejetora, existem $\{b_i\},\ \{c_i\} \subseteq A$ tais que $1_A \# 1_H = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i t c_i$. Definimos,

$$\begin{array}{rccl}
\psi : & A^{(n)} & \to & A\#H \\
& (a_1, a_2, \cdots, a_n) & \mapsto & \sum\limits_i a_i t c_i.
\end{array}$$

Claramente, ψ é sobrejetiva e é um morfismo $A\#H$-linear à esquerda. Assim, A é gerador de ${}_{A\#H}\mathcal{M}$.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Seja ϕ o isomorfismo de $A\#H$-módulo à esquerda dado em (v) e tomemos $M = A\#H$ um $A\#H$-módulo com ação dada pela multiplicação à esquerda. Assim, $M^H = t \cdot A$ para $0 \neq t \in \int_H^l$.

Logo, o morfismo ϕ pode ser dado por $\phi : A \otimes_{A^H} tA \to A\#H$ dada por $\phi(a \otimes tb) = atb$. E como t está no centro de A^H, temos que $A \otimes_{A^H} tA \simeq A \otimes_{A^H} A$.

E portanto, (iv) fica demonstrado.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Já vimos que $1_A \otimes 1_H = \sum b_i t c_i$. Definimos então $tc_i := d_i$.

Como $t \in \int_H^l$, $d_i M \subseteq M^H$. Agora, seja $m \in M$, então,

$$m = (1_A \# 1_H) \cdot m = \sum b_i d_i m = \phi(\sum b_i \otimes d_i m).$$

E portanto, definimos

$$\begin{array}{rccc} \psi: & M & \to & A \otimes_{A^H} M^H \\ & m & \mapsto & \sum b_i \otimes d_i m. \end{array}$$

Vejamos que ψ é a inversa de ϕ. Sejam $m \in M$ e também $\sum a_j \otimes m_j \in A \otimes_{A^H} M^H$, daí,

$$\phi \circ \psi(m) = \phi(\sum b_i \otimes d_i m) = m.$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \phi(\sum a_j \otimes m_j) & = & \psi(\sum a_j \cdot m_j) \\ & = & \sum b_i \otimes d_i \cdot (a_j m_j) \\ & \overset{(*)}{=} & \sum b_i d_i a_j \otimes m_j \\ & \overset{(**)}{=} & \sum a_j \otimes m_j, \end{array}$$

em que $(*)$ vale pois,

$$\begin{array}{rcl} \sum d_i \cdot (a_j m_j) & = & \sum tc_i \cdot a_j m_j \\ & = & \sum (t_{(1)} \cdot c_i a_j)(t_{(2)} \cdot m_j) \\ & = & \sum ((t_{(1)} \cdot c_i a_j) \# t_{(2)}) m_j \\ & = & [t \cdot ((c_i a_j) \# 1_H)] \# m_j \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum t \cdot c_i a_j) m_j \\
&\Rightarrow \sum t \cdot c_i a_j \in A^H.
\end{aligned}
$$

E $(**)$ vale pois temos que $\sum b_i d_i \cdot a_j = a_j$, uma vez que $\sum b_i d_i = 1_A \otimes 1_H$.

Portanto, ϕ é um isomorfismo de $A\#H$-módulos à esquerda.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por (ii)b), existem $b_1, b_2, \cdots, b_s \in A$ e também $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_s \in Hom_{-A^H}(A, A^H)$ tais que para todo $a \in A$,

$$a = \sum^{i} b_i \phi_i(a).$$

Então $\sum b_i \phi_i = I_A \in Hom_{-A^H}(A)$.

Notemos que $End_{-A^H}(A) \overset{\pi}{\simeq} A\#H$. Logo, para cada índice $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$, existe $d_i \in A\#H$ tal que

$$\phi_i = \pi(d_i) \text{ e } \sum b_i d_i = 1_A \# 1_H.$$

Vejamos que $d_i \in (A\#H)^H$, pois

$$\pi(hd_i)(a) = h \cdot \phi_i(a) = \varepsilon(h)\phi_i(a) = \pi(\varepsilon(h)d_i)(a), \text{ para todo } a \in A.$$

Assim, $d_i \in M^H$, o que implica em $d_i = tc_i$ e portanto, $1_A \# 1_H = \sum b_i t c_i = \sum [b_i, c_i]$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Basta considerarmos o Teorema de Morita dado no Teorema 1.58. Vide [25] para maiores detalhes.

■

2.4 Extensões Homogêneas Principais

Nesta seção, consideraremos que A é uma álgebra de Hopf, J um ideal de Hopf de A e uma A/J-extensão de Hopf-Galois de B, em que $B = A^{coA/J}$, com coação $\rho : A \rightarrow A \otimes A/J$ definida por $\rho(a) := (I_A \otimes \pi) \circ \Delta(a)$ para todo $a \in A$, em que $\pi : A \rightarrow A/J$ é o morfismo projeção.

Sendo A nestas condições, dizemos que A é uma A/J-extensão homogênea principal de B. Indicamos [8] para referências.

No que segue, caracterizaremos as extensões homogêneas principais assim como as relacionaremos com as extensões fendidas. Vejamos primeiramente dois lemas que facilitam o desenvolvimento do capítulo.

Os próximos lemas facilitam a construção de extensões de Hopf-Galois e serão constantemente utilizados nesse trabalho.

Lema 2.27 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois. Então, para todo $b \in B$, temos que $\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} \in A \otimes B$.*

Demonstração: Seja $b \in B$, então

$$\begin{aligned}
(I_A \otimes \rho)(\textstyle\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}) &= \textstyle\sum b_{(1)} \otimes \rho(b_{(2)}) \\
&= \textstyle\sum b_{(1)} \otimes (I_A \otimes \pi) \circ \Delta(b_{(2)}) \\
&= \textstyle\sum (I_A \otimes I_A \otimes \pi)(b_{(1)} \otimes \Delta(b_{(2)})) \\
&= \textstyle\sum (I_A \otimes I_A \otimes \pi)(I_A \otimes \Delta) \circ \Delta(b) \\
&= \textstyle\sum (I_A \otimes I_A \otimes \pi)(\Delta \otimes I_A) \circ \Delta(b) \\
&= (\Delta \otimes I_{A/J}) \circ (I_A \otimes \pi) \circ \Delta(b) \\
&= (\Delta \otimes I_{A/J}) \circ \rho(b) = (\Delta \otimes I_{A/J})(b \otimes 1_{A/J}) \\
&= \textstyle\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes 1_{A/J}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 2.28 *Seja H uma álgebra de Hopf e $H' \subset H$ uma subálgebra tal que $\Delta(H') = H \otimes H'$. Definimos $\overline{H} := H/H'^{+}H$, em que H'^{+} é dado por $H' \bigcap \ker(\varepsilon)$. Então $\overline{H}$ é uma coálgebra quociente, um quociente de H-módulo à direita, $H' \subset H^{co\overline{H}}$ e*

$$\begin{array}{rccl} can: & H \otimes_{H'} H & \rightarrow & H \otimes \overline{H} \\ & x \otimes y & \mapsto & \sum xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}}, \end{array}$$

para todo $x, y \in H$ é bijetiva.

Demonstração: Claramente, $\overline{H}$ é uma coálgebra quociente e um quociente de H-módulos à direita, pois H'^{+} é um ideal de Hopf pela Proposição 1.26.

Vejamos que $H' \subset H^{co\overline{H}}$. De fato, seja $h' \in H'$, aplicando ρ em h', temos:

$$\begin{array}{rcl} \rho(h') & = & (I \otimes \pi) \circ \Delta(h') \\ & = & \sum h'_{(1)} \otimes \pi(h'_{(2)}) \\ & = & \sum h'_{(1)} \otimes \pi(h'_{(2)}) - \sum h'_{(1)} \otimes \varepsilon(h'_{(2)})1_{\overline{H}} + \sum h'_{(1)} \otimes \varepsilon(h'_{(2)})1_{\overline{H}} \\ & = & \sum h'_{(1)} \otimes \pi(h'_{(2)} - \varepsilon(h'_{(2)}1_H))1_{\overline{H}} + \sum h'_{(1)} \otimes \varepsilon(h'_{(2)})1_{\overline{H}} \\ & \overset{(*)}{=} & \sum h'_{(1)} \otimes \varepsilon(h'_{(2)})1_{\overline{H}} = h \otimes 1_{\overline{H}}, \end{array}$$

em que $(*)$ ocorre pois $h'_{(2)} - \varepsilon(h'_{(2)})1_H \in H'^{+} = H' \bigcap \ker(\varepsilon)$.

Para provarmos que o morfismo can dado acima é bijetivo, consideraremos o morfismo

$$\begin{array}{rccl} \widehat{can^{-1}}: & H \otimes H & \rightarrow & H \otimes_{H'} H \\ & h \otimes k & \mapsto & \sum hS(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \end{array}$$

que está bem definido. Notemos que, para todo $b \in H'^{+}$ e para todo

$h,\ k \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{can^{-1}}(h \otimes bk) &= \sum hS(b_{(1)}k_{(1)}) \otimes_{H'} b_{(2)}k_{(2)} \\
&= \sum hS(k_{(1)})S(b_{(1)}) \otimes_{H'} b_{(2)}k_{(2)} \\
&= \sum hS(k_{(1)})S(b_{(1)})b_{(2)} \otimes_{H'} k_{(2)} \\
&= \sum hS(k_{(1)})\varepsilon(b) \otimes_{H'} k_{(2)} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, podemos definir

$$\begin{aligned}
can^{-1}: \quad H \otimes \overline{H} &\rightarrow H \otimes_{H'} H \\
h \otimes \overline{k} &\mapsto \sum hS(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}.
\end{aligned}$$

Por fim, can^{-1} é o inverso da can. Sejam $h, k \in H$ e $\overline{k} \in \overline{H}$, daí

$$\begin{aligned}
(can \circ can^{-1})(h \otimes \overline{k}) &= can(\sum hS(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= \sum hS(k_{(1)})k_{(2)} \otimes \overline{k_{(3)}} \\
&= \sum h \otimes \varepsilon(k_{(1)})\overline{k_{(2)}} = h \otimes \overline{k}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
(can^{-1} \circ can)(h \otimes k) &= can^{-1}(\sum hk_{(1)} \otimes \overline{k_{(2)}}) \\
&= \sum hk_{(1)}S(k_{(2)}) \otimes k_{(3)} \\
&= \sum h \otimes \varepsilon(k_{(1)})k_{(2)} = h \otimes k.
\end{aligned}$$

E portanto, temos nosso resultado demonstrado.

■

Vejamos agora um teorema que caracteriza uma A/J-extensão de Hopf-Galois a partir do ideal J.

Teorema 2.29 *Sejam A uma álgebra de Hopf, J um ideal de Hopf e*

$B = A^{coA/J}$ uma subálgebra de Hopf normal conforme Definição 1.25. Então A é uma A/J-extensão homogênea principal de B se, e somente se, $J = B^+A$, onde $B^+ = B \bigcap \ker(\varepsilon)$.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Seja $J = B^+A$. Como B é uma Hopf subálgebra normal de A, pela Proposição 1.26, temos que J é um ideal de Hopf. Ainda, como B satisfaz as condições do Lema 2.28, existe um morfismo bijetivo $can : A \otimes_B A \to A \otimes A/J$, e portanto, A é uma extensão homogênea principal de B.

($\Rightarrow$) Para mostramos esse lado da demonstração, provemos o seguinte lema:

Lema 2.30 *Sejam A, B e J como no teorema acima. Então $B \subset A$ é uma A/J-extensão de Hopf-Galois se, e somente se, $\pi_B \circ (S \otimes I_A) \circ \Delta(J) = 0$, em que o morfismo $\pi_B : A \otimes A \to A \otimes_B A$ é a sobrejeção canônica.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $B \subset A$ uma A/J-extensão de Hopf-Galois de B. Veremos mais a frente que a sequência

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \hookrightarrow A \otimes A \overset{T_R}{\to} A \otimes A/J \to 0 \tag{2.3}$$

é exata, em que $\Omega^1 B = \ker(\mu_B : B \otimes B \to B)$ e ainda, $T_R := (\mu \otimes \pi)(I_A \otimes \Delta)$.
Vejamos que $T_R \circ (S \otimes I_A) \circ \Delta(J) = 0$. Seja $j \in J$, logo,

$$\begin{aligned} T_R \circ (S \otimes I_A) \circ \Delta(j) &= T_R \circ (S \otimes I_A)(\sum j_{(1)} \otimes j_{(2)}) \\ &= \sum S(j_{(1)}) j_{(2)} \otimes \pi(j_{(3)}) \\ &= 1_P \otimes \pi(j) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(S \otimes I_A) \circ \Delta(J) \subset \ker(T_R) = A(\Omega^1 B)A$. E assim, $\pi_B \circ (S \otimes I_A) \circ \Delta(J) = 0$, pois a sequência

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \hookrightarrow A \otimes A \stackrel{\pi_B}{\to} A \otimes_B A \to 0, \qquad (2.4)$$

também é exata.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que o morfismo

$$\begin{array}{rccl} can: & A \otimes_B A & \to & A \otimes A/J \\ & a \otimes b & \mapsto & (a \otimes 1_{A/J})\rho(b) \end{array}$$

é bijetor. Para tanto, definamos

$$\begin{array}{rccl} \widehat{can^{-1}}: & A \otimes A & \to & A \otimes_B A \\ & a \otimes b & \mapsto & (a \otimes 1_A)\pi_B(\sum S(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}) \\ & & & \shortparallel \\ & & & \sum aS(b_{(1)}) \otimes_B b_{(2)}. \end{array}$$

Notemos que para todo $a \in A$ e todo $j \in J$, temos por hipótese que

$$\widehat{can^{-1}}(a \otimes j) = (a \otimes 1_A)\pi_B((S \otimes I_A) \circ \Delta(j)) = 0$$

Então, podemos definir

$$\begin{array}{rccl} can^{-1}: & A \otimes A/J & \to & A \otimes_B A \\ & a \otimes \pi(b) & \mapsto & (a \otimes 1_A)\pi_B(\sum S(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}) \\ & & & \shortparallel \\ & & & \sum aS(b_{(1)}) \otimes_B b_{(2)}. \end{array}$$

E claramente $can^{-1} \circ can = I_{A \otimes_B A}$ e $can \circ can^{-1} = I_{A \otimes A/J}$ por raciocínio análogo ao do Lema 2.28.

$\blacksquare$

Um corolário imediato que tiramos do lema acima é:

Corolário 2.31 *Seja $B \subset A$ uma extensão A/J-Galois. Então o morfismo translação $\tau : A/J \to A \otimes_B A$ definido por $\tau(\pi(a)) = can^{-1}(1_A \otimes \pi(a))$ pode ser expresso por*

$$\tau(\pi(a)) := \sum S(a_{(1)}) \otimes_B a_{(2)}.$$

Voltemos a demonstração do Teorema 2.29. Seja A uma A/J-extensão homogênea principal de B. Então, pelo corolário acima, para todo $ba \in B^+A$, temos que

$$\begin{aligned} \tau(\pi(ba)) &= \sum S(b_{(1)}a_{(1)}) \otimes b_{(2)}a_{(2)} \\ &= S(a_{(1)})S(b_{(1)})b_{(2)} \otimes a_{(2)} \\ &= \sum S(a_{(1)})\varepsilon(b) \otimes a_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Portanto $B^+A \subseteq J$ pela injetividade de τ.

Definimos

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} : \quad A \times A &\to A \otimes A/B^+A \\ (a, b) &\mapsto \sum ab_{(1)} \otimes \pi(b_{(2)}). \end{aligned}$$

Vejamos que $\widehat{\beta}(a, ba') = \widehat{\beta}(ab, a')$, para todo $a,\ a' \in A$ e $b \in B$. De fato,

$$
\begin{array}{rcl}
\widehat{\beta}(a, ba') & = & \sum ab_{(1)}a'_{(1)} \otimes [b_{(2)}a'_{(2)}]_{B^+A} \\
& = & ab_{(1)}a'_{(1)} \otimes [b_{(2)}a'_{(2)} - \varepsilon(b_{(2)})a'_{(2)} + \varepsilon(b_{(2)})a'_{(2)}]_{B^+A} \\
& = & ab_{(1)}a'_{(1)} \otimes [(b_{(2)} - \varepsilon(b_{(2)}))a'_{(2)} + \varepsilon(b_{(2)})a'_{(2)}]_{B^+A} \\
& \overset{(*)}{=} & \sum ab_{(1)}a'_{(1)} \otimes \varepsilon(b_{(2)})[a'_{(2)}]_{B^+A} \\
& = & \sum aba'_{(1)} \otimes [a'_{(2)}]_{B^+A} \\
& = & \widehat{\beta}(ab, a'),
\end{array}
$$

em que $(*)$ é válido pois dado $b \in B$, vimos que $\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} \in A \otimes B$ pelo Lema 2.27 e portanto, $b_{(2)} - \varepsilon(b_{(2)}) \in B^+$.

Assim, pela propriedade universal do produto tensorial, definimos

$$
\begin{array}{rrcl}
\beta : & A \otimes_B A & \to & A \otimes A/B^+A \\
& a \otimes b & \mapsto & \sum ab_{(1)} \otimes \pi(b_{(2)}),
\end{array}
$$

que é bijetivo pois estamos nas condições do Lema 2.28.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo,

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_B A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "I_{A \otimes_B A}"] & A \otimes A/B^+A \arrow[d, "I_A \otimes l"] \\
A \otimes_B A \arrow[r, "can"] & A \otimes A/J
\end{tikzcd}
$$

em que $l : A/B^+A \to A/J$ é dada por $l([p]_{B^+P}) := [p]_I$ e está bem definida pois $B^+A \subseteq J$.

Então, $I_A \otimes l$ é um morfismo bijetivo, pois β, can e $I_{A \otimes_B A}$ o são. Consequentemente, l é injetor e segue que se $a \in J$, então $a \in B^+A$, e portanto, $J \subseteq B^+A$. O que implica $J = B^+A$ como queríamos.

■

Antes de discorrermos mais sobre as extensões homogêneas principais, devemos justificar porque as sequências 2.3 e 2.4 dadas no Lema 2.30 são exatas. Para isso, precisaremos incessantemente do Lema da Cobra, dado no Apêndice C deste trabalho.

Por se tratar de um resultado que envolve, além da habitual teoria de álgebras de Hopf, a teoria de álgebra Homológica, devemos definir algumas noções básicas.

Sejam A uma álgebra sobre k, H uma álgebra de Hopf sobre o mesmo corpo, $B = A^{coH}$ e $\Omega^1 A = \ker(\mu_A)$ o cálculo diferencial universal de primeira ordem, definimos:

- $N_A \leqslant \Omega^1 A = \ker(\mu_A)$ um A-bimódulo;
- $M_H \trianglelefteq \ker \varepsilon$ um ideal invariante à direita pela ação adjunta Ad_R, ou seja, $Ad_R(M_H) \subseteq M_H \otimes H$, em que

$$Ad_R := (I_H \otimes \mu) \circ (I_H \otimes S \otimes I_H) \circ (\tau \otimes I_H)(\Delta \otimes I_H) \circ \Delta;$$

- $\rho : A \to A \otimes H$ um morfismo de álgebras. Definindo assim uma estrutura de H-comódulo álgebra à direita sobre A.

  Dadas essas condições, dizemos que a quíntupla (A, H, ρ, N_A, M_H) é um fibrado quântico principal se

- O morfismo

$$\begin{array}{rccl} T_R : & A \otimes A & \to & A \otimes H \\ & a \otimes b & \mapsto & (\mu_A \otimes I_H)(I_A \otimes \rho)(a \otimes b), \end{array}$$

  é uma sobrejeção.

- $\rho_{A\otimes A}(N_A) \subseteq N_A \otimes H$, em que

$$\rho_{A\otimes A} := (I_A \otimes I_A \otimes \mu_H)(I_A \otimes \tau \otimes I_A)(\rho \otimes \rho);$$

- $T_R(N_A) \subseteq A \otimes M_H$;

- Dado o morfismo

$$\begin{array}{rccl} T: & \Omega^1(A) := \Omega^1 A/N_A & \rightarrow & A \otimes \ker(\varepsilon)/M_H \\ & [\alpha]_{N_A} & \mapsto & ((I_A \otimes \pi_H) \circ T_R)(\alpha), \end{array}$$

em que $\alpha \in \ker(\mu_A)$ e $\pi_H : \ker \varepsilon \rightarrow \ker \varepsilon/M_H$, temos que

$$\ker(T) \subseteq A\Omega^1(B)A,$$

em que $\Omega^1(B) := \Omega^1 B/(N_A \bigcap \Omega^1 B)$ e $\Omega^1 B := \ker(\mu_A|_B)$.

Notemos que T está bem definida.

De fato, sejam $[\alpha]_{N_A}$ e $[\beta]_{N_A} \in \Omega^1(A)$ tais que $[\alpha]_{N_A} = [\beta]_{N_A}$. Logo, $\alpha - \beta \in N_A$ e portanto, $T_R(\alpha - \beta) \in A \otimes M_H$, e aplicando $I_A \otimes \pi_H$ temos que $(I_A \otimes \pi_H) \circ (T_R(\alpha - \beta)) = 0$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} T([\alpha]_{N_A}) - T([\beta]_{N_A}) & = & T([\alpha]_{N_A} - [\beta]_{N_A}) \\ & = & T([\alpha - \beta]_{N_A}) \\ & = & (I_A \otimes \pi_H) \circ (T_R(\alpha - \beta)) = 0. \end{array}$$

Assim, $T([\alpha]_{N_A}) = T([\beta]_{N_A})$ como queríamos e T está bem definida.

Calculando o morfismo T nos elementos de $\Omega^1(A)$ explicitamente, temos que

$$T(pdq) = pq^{(0)} \otimes [q^{(1)}]_{M_H} - pq \otimes 1_{\ker\varepsilon/M_H}.$$

em que $d(q) = 1_A \otimes q - q \otimes 1_{\ker\varepsilon/M_H}$.

Ressaltamos que a quíntupla (A, H, ρ, N_A, M_H) deveras vezes denotada também por $A(B, H)$ é um fibrado quântico principal (com cálculo universal) se, e somente se, $B \subset A$ é uma H-extensão de Hopf-Galois.

Seja (A, H, ρ, N_A, M_H) um fibrado quântico principal e definamos $T_u : \Omega^1 A \to A \otimes \ker\varepsilon$ e $T_{NM} : N_A \to A \otimes M_H$ restrições apropriadas de T_R. Assim, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & \ker(T_u) & \longrightarrow & \ker(T_R) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(1) & 0 & \longrightarrow & \Omega^1 A & \xrightarrow{i_1} & A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle T_u} & & \downarrow{\scriptstyle T_R} & & \downarrow{\scriptstyle I_A} & & \\
(2) & 0 & \longrightarrow & A \otimes \ker\varepsilon & \xrightarrow{i_2} & A \otimes H & \xrightarrow{I_A \otimes \varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & Coker(T_u) & \longrightarrow & Coker(T_R) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \ker(T_{NM}) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(T_u) \arrow[r, "\pi_u"] \arrow[d] & \ker(T) \arrow[d] & \\
(3) & 0 \arrow[r] & N_A \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "T_{NM}"] & \Omega^1 A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "T_u"] & \Omega^1(A) \arrow[r] \arrow[d, "T"] & 0 \\
(4) & 0 \arrow[r] & A \otimes M_H \arrow[r, "i_4"] \arrow[d] & A \otimes \ker\varepsilon \arrow[r, "I_A \otimes \pi_H"] \arrow[d] & A \otimes (\ker\varepsilon/M_H) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Coker(T_{NM}) \arrow[r] & Coker(T_u) \arrow[r] & Coker(T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

cujas linhas e colunas são sequências exatas de A-módulos à esquerda. De fato, com excessão da linha (2), as demais linhas e colunas do diagrama são exatas por tratarem de injeções e projeções canônicas. Provemos que (2) é exata.

Seja $0 \neq \sum a_i \otimes h_i \in \ker(I_A \otimes \varepsilon)$, em que os elementos a_i's são L.I. sobre k, então

$$I_A \otimes \varepsilon(\sum a_i \otimes h_i) = 0 \Rightarrow \sum a_i \varepsilon(h_i) = 0,$$

portanto, $\varepsilon(h_i) = 0$, pois caso contrário, $a_i = 0$ e teríamos $\sum a_i \otimes h_i = 0$, contradizendo nossa hipótese inicial.

Assim, $h_i \in \ker\varepsilon$ e consequentemente, $\sum a_i \otimes h_i \in Im(i_2)$.

A comutatividade dos diagramas são de fácil demonstração uma vez que T_u e T_{NM} são restrições de T_R.

Então, aplicando o Lema da Cobra sobre as sequências (1) e (2) no diagrama 2.5 e sobre as sequências (3) e (4) no diagrama 2.6

obtemos, respectivamente, as seguintes sequências exatas,

$$0 \to \ker(T_u) \to \ker(T_R) \to 0 \to Coker(T_u) \to Coker(T_R) \to 0 \quad (2.7)$$

e

$$\begin{aligned} 0 \to \ker(T_{NM}) \to \ker(T_u) \to \ker(T) \to \\ \to Coker(T_{NM}) \to Coker(T_u) \to Coker(T) \to 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Daí, da sequência 2.7, temos que $\ker(T_u) \simeq \ker(T_R)$, pois

$$0 \to \ker(T_{NM}) \to \ker(T_u) \to \ker(T) \to 0,$$

é exata. E também, como T_R é injetivo por estarmos trabalhando com um fibrado quântico principal, temos que $Coker(T_R) = \{0\}$ o que implica em $Coker(T_u) = 0$.

E da sequência 2.8, tiramos que

$$\ker(T_{NM}) = \ker(T_u) \bigcap N_A.$$

De fato, seja $\sum a_i \otimes b_i \in N_A \bigcap \ker(T_u)$, logo

$$T_u(i_3(\sum a_i \otimes b_i)) = 0$$

e como o diagrama 2.6 é comutativo, temos que $T_u \circ i_3 = i_4 \circ T_{NM}$ e portanto, $i_4(T_{NM}(\sum a_i \otimes b_i)) = 0$. E assim, $T_{NM}(\sum a_i \otimes b_i) = 0$, pois i_4 é injetivo.

Assim, $\sum a_i \otimes b_i \in \ker(T_{NM})$, ou seja, $\ker(T_u) \bigcap N_A \subseteq \ker T_{NM}$.

Claramente, $\ker(T_{NM}) \subseteq \ker(T_u) \bigcap N_A$ e temos então que

$$\ker(T_{NM}) = \ker(T_u) \bigcap N_A,$$

como queríamos.

Um resultado interessante que podemos tirar do que foi visto até agora é dado pelo seguinte corolário.

Corolário 2.32 *Seja (A, H, ρ, N_A, M_H) um fibrado quântico principal. Então temos que $T_R(N_A) = A \otimes M_H$.*

Demonstração: Provemos inicialmente que $\ker(T) = \pi_A(A(\Omega^1 B)A)$.

Como temos as hipóteses de fibrado quântico principal, claramente $\ker(T) \subseteq \pi_A(A(\Omega^1 B)A)$.

Por outro lado, seja $\sum\limits_{i,j} p_i a_j \otimes b_j q_i \in A(\Omega^1 B)A$, daí

$$\begin{aligned}
T(\pi_A(\sum_{i,j} p_i a_j \otimes b_j q_i)) &= T \circ \pi_A(\sum_{i,j} p_i a_j \otimes b_j q_i) \\
&\overset{(*)}{=} (I_A \otimes \pi_H) \circ T_u(\sum_{i,j} p_i a_j \otimes b_j q_i) \\
&= (I_A \otimes \pi_H)(\sum_{i,j} p_i a_j b_j q_i^{(0)} \otimes q_i^{(1)}) \\
&\overset{(**)}{=} (I_A \otimes \pi_H)(0) = 0,
\end{aligned}$$

em que $(*)$ é válido pois o diagrama 2.6 é comutativo e $(**)$ é válido pois $\sum\limits_j a_j \otimes b_j \in \Omega^1 B = \ker(\mu_B)$.

Portanto, $\ker(T) = \pi_A(A(\Omega^1 B)A)$ como queríamos.

Ainda, como $A(\Omega^1 B)A \subseteq \ker(T_u)$ e $\pi_u : \ker(T_u) \to \ker(T)$ dado no diagrama 2.6 é uma restrição do morfismo π_A ao $\ker(T_u)$, concluímos que π_u é sobrejetivo. Consequentemente, pela exatidão da sequência 2.8 temos que $CokerT_{NM} = 0$ e logo $T_R(N_A) = A \otimes M_H$. ■

Nas linhas que seguem, provaremos que as sequências 2.3 e 2.4 são exatas. Porém, os resultados colhidos também servem para mostrarmos que $A(B,H)$ é um fibrado quântico principal com cálculo universal se, e somente se, $B \subset A$ é uma H-extensão de Hopf Galois de B.

Seja $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois, em que o morfismo $T_B : A \otimes_B A \to A \otimes H$ é o morfismo canônico bijetivo definido anteriormente por *can*. Consideremos o seguinte diagrama comutativo de linhas e colunas exatas

$$
\begin{tikzcd}
 & & & (7) & (8) & \\
 & 0 \arrow[r] & A(\Omega^1 B)A \arrow[r] \arrow[d] & \ker(T_R) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(T_B) \arrow[d] & \\
(5) & 0 \arrow[r] & \ker(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "T_R"] & A \otimes_B A \arrow[r] \arrow[d, "T_B"] & 0 \\
(6) & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes H \arrow[r, "I_{A\otimes H}"] \arrow[d] & A \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 \arrow[r] & Coker(T_R) \arrow[r] & Coker(T_B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{2.9}
$$

Aplicando o Lema da Cobra sobre as linhas (5) e (6) temos que

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \to \ker(T_R) \to \ker(T_B) \to 0 \to Coker(T_R) \to Coker(T_B) \to 0$$

é uma sequência exata de A-módulos à esquerda.

Como T_B é um morfismo bijetivo, segue que

$$\ker(T_B) = \{0\} = Coker(T_B).$$

Assim, temos que $Coker(T_R) = \{0\}$. O que implica em

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \to \ker(T_R) \to 0$$

ser uma sequência exata de A-módulos à esquerda, ou seja, temos que $A(\Omega^1 B)A \simeq \ker(T_R)$ e portanto, a sequência 2.3

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \to A \otimes A \to A \otimes H \to 0$$

é uma sequência exata de A-módulos à esquerda.

Do mesmo modo, aplicando o Lema da Cobra sobre as colunas (7) e (8) temos que

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \to \ker(\pi) \to 0$$

é uma sequência exata, ou seja, $A(\Omega^1 B)A \simeq \ker(\pi)$ e portanto, a sequência 2.4

$$0 \to A(\Omega^1 B)A \to A \otimes A \to A \otimes_B A \to 0$$

é uma sequência exata de A-módulos à esquerda.

■

Demonstrado esse fato, seguimos agora com mais alguns resultados da teoria de extensões homogêneas principais. Tais resultados se farão úteis no decorrer do Capítulo 4.

Teorema 2.33 *Seja A uma extensão homogênea principal de B. Então A é fendida se, e somente se, existe um morfismo de B-módulos à esquerda $\psi : A \to B$ inversível por produto de convolução.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja A uma extensão fendida, então existe um morfismo $\gamma : A/J \to A$ inversível por convolução. Definimos:

$$\begin{array}{rccl} \psi : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \psi(a) := s_\gamma(a) = \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ \rho(a). \end{array}$$

Claramente ψ é morfismo de B-módulo à esquerda, pois s_γ o é. Mostremos então que é inversível por produto de convolução.

De fato, tomamos $\overline{\psi} : A \to B$ dada por $\overline{\psi}(a) := \sum \gamma(\pi(a_{(1)}))S(a_{(2)})$. Notamos que $\overline{\psi}$ está bem definida, pois, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} \rho(\overline{\psi}(a)) &= \rho(\textstyle\sum \gamma(\pi(a_{(1)}))S(a_{(2)})) \\ &= \textstyle\sum \rho(\gamma(\pi(a_{(1)})))\rho(S(a_{(2)})) \\ &= \textstyle\sum ((\gamma \otimes I_{A/J}) \circ \Delta(\pi(a_{(1)})))\rho(S(a_{(2)})) \\ &= \textstyle\sum (\gamma(\pi(a_{(1)})) \otimes \pi(a_{(2)}))(S(a_{(4)}) \otimes \pi(S(a_{(3)}))) \\ &= \textstyle\sum \gamma(\pi(a_{(1)}))S(a_{(4)}) \otimes \pi(a_{(2)})\pi(S(a_{(3)})) \\ &= \textstyle\sum \gamma(\pi(a_{(1)}))S(a_{(2)}) \otimes 1_{A/J} \\ &= \rho(\overline{\psi}(a)) \otimes 1_{A/J}. \end{aligned}$$

Por fim, para todo $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \psi * \overline{\psi}(a) &= \textstyle\sum \psi(a_{(1)})\overline{\psi}(a_{(2)}) \\ &= \textstyle\sum a_{(1)}\overline{\gamma}(\pi(a_{(2)}))\gamma(\pi(a_{(3)}))S(a_{(4)}) \\ &= \textstyle\sum a_{(1)}\eta(\varepsilon(a_{(2)}))S(a_{(3)}) \\ &= \textstyle\sum \eta(1_k)a_{(1)}S(a_{(2)}) = \eta \circ \varepsilon(a) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi} * \psi(a) &= \sum \overline{\psi}(a_{(1)})\psi(a_{(2)}) \\
&= \sum \gamma(\pi(a_{(1)}))S(a_{(2)})a_{(3)}\overline{\gamma}(\pi(a_{(4)})) \\
&= \sum \gamma(\pi(a_{(1)}))\overline{\gamma}(\pi(a_{(2)})) \\
&= \eta \circ \varepsilon(a).
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Para mostrarmos a construção do morfismo fenda, γ, a partir do morfismo ψ, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.34 *Seja $\psi : A \to B$ como no teorema acima. Então para todo $a \in A$ e todo $b \in B$,*

$$\sum \overline{\psi}(b_{(1)}a)b_{(2)} = \varepsilon(b)\overline{\psi}(a).$$

Demonstração: Pelo Lema 2.27, sabemos que para todo $b \in B$, $\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} \in A \otimes B$. Assim, para todo $a \in A$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b)\overline{\psi}(a) &= \sum \varepsilon(b)\varepsilon(a_{(1)})\overline{\psi}(a_{(2)}) \\
&= \sum \overline{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\psi(b_{(2)}a_{(2)})\overline{\psi}(a_{(3)}) \\
&= \sum \overline{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})b_{(2)}\psi(a_{(2)})\overline{\psi}(a_{(3)}) \\
&= \sum \overline{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})b_{(2)}\eta \circ \varepsilon(a_{(2)}) \\
&= \sum \overline{\psi}(b_{(1)}a)b_{(2)}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Portanto, podemos definir o morfismo

$$
\begin{aligned}
\gamma : \quad A/J &\to A \\
\pi(a) &\mapsto \gamma(a) := (\overline{\psi} * I_A)(a) = \sum \overline{\psi}(a_{(1)})a_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Para vermos que γ está bem definido, lembramos que A é uma

A/J-extensão homogênea principal, logo, pelo Teorema 2.29, $J = B^+A$ e segue que para todo $ba \in B^+A$,

$$\gamma(\pi(ba)) = \sum \overline{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})b_{(2)}a_{(2)} = \sum \varepsilon(b)\overline{\psi}(a_{(1)})a_{(2)} = 0.$$

Ainda, γ é colinear, pois

$$\begin{array}{rcl}
(\rho \circ \gamma)(\pi(a)) & = & \sum \rho(\overline{\psi}(a_{(1)})a_{(2)}) \\
& = & \sum \rho(\overline{\psi}(a_{(1)}))\rho(a_{(2)})) \\
& = & \sum(\overline{\psi}(a_{(1)}) \otimes 1_{A/J})((I_A \otimes \pi) \circ \Delta(a_{(2)})) \\
& = & \sum(\overline{\psi}(a_{(1)}) \otimes 1_{A/J})(a_{(2)} \otimes \pi(a_{(3)})) \\
& = & \sum \overline{\psi}(a_{(1)})a_{(2)} \otimes \pi(a_{(3)}) \\
& = & \sum \gamma(\pi(a_{(1)})) \otimes \pi(a_{(2)}).
\end{array}$$

Por fim, com o auxílio do morfismo $\tau : H \to A \otimes_B A$ definido na Seção 2.3.1, após o Lema 2.23, podemos definir um morfismo

$$\begin{array}{rrcl}
\overline{\gamma} : & A/J & \to & A \\
& \pi(a) & \mapsto & (I_A *_\tau \psi)(\pi(a)) = \sum S(a_{(1)})\psi(a_{(2)}),
\end{array}$$

em que $\tau(\pi(a)) = S(a_{(1)}) \otimes_B a_{(2)}$, e claramente

$$\gamma * \overline{\gamma} = \eta \circ \varepsilon = \overline{\gamma} \circ \gamma.$$

■

A existência do morfismo ψ dado no teorema acima nos remete a seguinte definição

Definição 2.35 *Dizemos que $B \subset A$ é uma extensão cofendida se, e somente se, existe um morfismo de B-módulos à esquerda $\psi : A \to B$ inversível por produto de convolução, chamado morfismo cofenda.*

Já vimos anteriormente que podemos considerar o morfismo γ unital, ou seja, $\gamma(1_{A/J}) = 1_A$. Vejamos que o mesmo pode ser feito com o morfismo ψ quando A é uma A/J-extensão homogênea principal.

De fato, dado $\widehat{\psi} : A \to B$ um morfismo cofenda, baseando-nos no processo que torna γ um morfismo unital, basta definirmos o morfismo

$$\begin{array}{rccl} \psi: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \psi(a) := \widehat{\psi}(a)\overline{\widehat{\psi}}(1_A) \end{array}$$

que claramente é um morfismo de B-módulos à esquerda, unital, e inversível por produto de convolução, com iversasa dada por $\overline{\psi} : A \to B$ por $\overline{\psi}(a) := \widehat{\psi}(1_A)\overline{\widehat{\psi}}(a)$.

Há ainda um lema dizendo-nos que os morfismos γ e ψ podem ser conormalizados, tornando-os counitais. Vejamos.

Lema 2.36 *Seja A uma A/J-extensão homogênea principal de B. Então podemos conormalizar os morfismos γ e ψ, respectivamente chamados de morfismos fenda e cofenda, tornando-os counitais.*

Quando tratamos de álgebras, coálgebras, álgebras de Hopf, dentre outras estruturas já vistas no trabalho, estamos sempre buscando meios onde podemos "dualizar" a estrutura dada. O processo de conormalização também pode ser visto assim, como uma espécie de dualização do processo de normalização. Quando normalizamos um morfismo, pensamos no seguinte diagrama:

$$H \xrightarrow{I_H \otimes 1_k} H \otimes k \xrightarrow{\gamma \otimes (\overline{\gamma} \circ \eta)} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A\ ,$$

em que $H = A/J$ e $B \subset A$ como no enunciado do lema, o que remete-nos ao seguinte diagrama "dual"

$$H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{(\varepsilon\circ\overline{\gamma})\otimes\gamma} k \otimes A \xrightarrow{\simeq} A\ .$$

Demonstração: Baseado no exposto acima, dado $\widehat{\gamma} : H \to A$ um morfismo fenda, unital, definimos

$$\begin{array}{cccl} \gamma & H & \to & A \\ & h & \mapsto & \sum \varepsilon(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\widehat{\gamma}(h_{(2)}) \end{array}$$

que está bem definido e permanece unital. Vejamos que γ é colinear e counital respectivamente. Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned} \rho \circ \gamma(h) &= \sum \rho(\varepsilon(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\widehat{\gamma}(h_{(2)})) \\ &= \sum \varepsilon(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\rho(\widehat{\gamma}(h_{(2)})) \\ &= \sum \varepsilon(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))(\widehat{\gamma} \otimes I_H) \circ \Delta(h_{(2)}) \\ &= \sum \varepsilon(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\widehat{\gamma}(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} \\ &= \sum \gamma(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = (\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(h). \end{aligned}$$

E é counital, pois para todo $h \in H$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A \circ \gamma(h) &= \varepsilon_A(\varepsilon_A(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\widehat{\gamma}(h_{(2)})) \\ &= \varepsilon_A(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)}))\varepsilon_A(\widehat{\gamma}(h_{(2)})) \\ &= \varepsilon_A(\overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)})\widehat{\gamma}(h_{(2)})) \\ &= \varepsilon_A(\eta \circ \varepsilon(h)) = \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Por fim, γ é inversa por produto de convolução do morfismo

$$\begin{array}{cccl} \overline{\gamma} : & H & \to & A \\ & h & \mapsto & \overline{\gamma}(h) := \sum \overline{\widehat{\gamma}}(h_{(1)})\varepsilon(\widehat{\gamma}(h_{(2)})). \end{array}$$

Portanto, $\gamma : H \to A$ é um morfismo fenda, unital, counital, colinear e inverso por produto de convolução.

Por processo análogo, vemos que dada $\widehat{\psi} : A \to B$ um morfismo cofenda, unital, podemos conormalizá-la, definindo o morfismo

$$\begin{array}{rccl} \psi : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \psi(a) := \sum \widehat{\psi}(a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(a_{(2)})), \end{array}$$

que é unital, counital e inversível por produto de convolução. A saber,

$$\begin{array}{rccl} \overline{\psi} : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \overline{\psi}(a) := \sum \varepsilon(\widehat{\psi}(h_{(1)}))\overline{\widehat{\psi}}(h_{(2)}). \end{array}$$

Resta mostrarmos que ψ é morfismo B-linear à esquerda. Para todo $a \in A$ e $b \in B$, temos

$$\begin{array}{rcl} \psi(ba) & = & \sum \widehat{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(b_{(2)}a_{(2)})) \\ & = & \sum \widehat{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(b_{(2)}\varepsilon(b_{(3)})a_{(2)})) \\ & = & \sum \widehat{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(b_{(2)}a_{(2)}))\varepsilon(b_{(3)}) \\ & = & \sum \widehat{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(b_{(2)}a_{(2)})b_{(3)}) \\ & = & \sum \widehat{\psi}(b_{(1)}a_{(1)})\varepsilon(\varepsilon(b_{(2)})\overline{\widehat{\psi}}(a_{(2)})) \\ & = & \sum \widehat{\psi}(ba_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(a_{(2)})) \\ & = & \sum b\widehat{\psi}(a_{(1)})\varepsilon(\overline{\widehat{\psi}}(a_{(2)})) = b\psi(a). \end{array}$$

■

Corolário 2.37 *Seja A uma A/J-extensão homogênea principal de B. Então são equivalentes:*

(i) A é uma extensão fendida;

(ii) A é uma extensão cofendida;

(iii) Existe um morfismo unital, counital, inversível por produto de convolução e A/J-colinear à direita

$$\gamma : A/J \to A;$$

(iv) Existe um morfismo unital, counital, inversível por produto de convolução e B-linear à esquerda

$$\psi : A \to B.$$

Conseguimos ainda uma correspondência $1-1$ entre a família de morfismos fenda γ e a família de morfismos cofenda ψ dada por

$$\begin{array}{rccl} \zeta : & Cl_{A/J,A} & \to & Ccl_{A,B} \\ & \gamma & \mapsto & \zeta(\gamma)(a) := s_\gamma = \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ \rho(a), \end{array}$$

e inversa dada por

$$\begin{array}{rccl} \chi : & Ccl_{A,B} & \to & Cl_{A/J,A} \\ & \psi & \mapsto & \chi(\psi)(\pi(a)) := (\overline{\psi} * I_{A/J})(a). \end{array}$$

Capítulo 3

Uma biálgebra que admite extensão de Hopf-Galois é uma álgebra de Hopf

Neste capítulo veremos como as extensões definidas no Capítulo 2 influem na construção de álgebras de Hopf, se considerarmos as mesmas definidas sobre biálgebras. Nosso objetivo é construir um morfismo S, chamado de antípoda, que é o inverso por produto de convolução do morfismo identidade.

Notamos que nas definições sobre extensões, dadas no Capítulo 2, em nenhum momento foram determinadas condições que exigissem a existência da antípoda, assim sendo, reconsiderar essas definições no conceito em que H é uma k-biálgebra pode ser feito sem problemas. Um fator interessante a se considerar é que a idéia de extensão mais geral acaba levando a álgebras de Hopf de novo. Além de H ser uma

k-biálgebra, neste capítulo, consideramos que k é um anel comutativo com unidade, e não um corpo como no restante do trabalho, A e B são k-álgebras, em que $B \subset A$ é uma k-extensão.

Lembramos que, pelo Lema **??**, dado um morfismo inversível por convolução $\psi : H \to A$, com inversa $\overline{\psi}$, e um morfismo de álgebras $\phi : A \to A \otimes H$, a composta $\phi \circ \psi$ é inversível por produto de convolução, com inversa $\phi \circ \overline{\psi}$.

Os próximos dois resultados começam a dar base para a construção do morfismo S. Neles, relacionamos a noção de extensão, ou seja, o fato de A ser um H-comódulo álgebra, com a noção de integral total (Definição 1.52, Subseção 1.6.1, Capítulo 1), ou seja, a existência de um morfismo $\phi : H \to A$ de H-comódulo à direita, ou ainda, $\rho_A \circ \phi = (\phi \otimes I_H) \circ \Delta$. Notamos que a noção de Integral é diferente do morfismo fenda, uma vez que o morfismo ϕ não é necessariamente inversível por produto de convolução.

Lema 3.1 *Seja $\phi : H \to A$ um morfismo de k-módulo. Se ϕ é uma integral total sobre H então $\rho_A \circ \phi = (i_1 \circ \phi) * \eta_0$, em que:*

$$\begin{array}{rccc} i_1 : & A & \to & A \otimes H \\ & a & \mapsto & a \otimes 1_H \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \eta_0 : & H & \to & A \otimes H \\ & h & \mapsto & 1_A \otimes h. \end{array}$$

Demonstração: Como ϕ é uma integral total sobre H, sabemos que $\rho_A \circ \phi = (\phi \otimes I_H) \circ \triangle_H$, logo

$$\begin{aligned} \rho_A \circ \phi(h) &= (\phi \otimes I_H) \circ \triangle_H(h) \\ &= \sum \phi(h_1) \otimes h_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(i_1 \circ \phi) * \eta_0(h) &= \mu\left(\sum (i_1 \circ \phi(h_1)) \otimes \eta_0(h_2)\right) \\
&= \sum \mu((\phi(h_1) \otimes 1_H) \otimes (1_A \otimes h_2)) \\
&= \sum \phi(h_1) \otimes h_2.
\end{aligned}
$$

E portanto, vale a igualdade.

■

Proposição 3.2 *Seja $\phi : H \to A$ um morfismo de k-módulos, tal que ϕ é uma integral total inversível por convolução sobre H, ou seja, um morfismo fenda, então:*

(i) *O morfismo η_0 dado acima é inversível por convolução;*

(ii) *Se existe um morfismo de álgebras $\alpha : A \to k$, então I_H é inversível por convolução.*

Demonstração: (i) Vimos acima que $\rho_A \circ \phi = (i_1 \circ \phi) * \eta_0$. Como ϕ é inversível por convolução e ρ_A e i_1 são morfismos de álgebra, pelo Lema **??**, temos que $\rho_A \circ \phi$ e $i_1 \circ \phi$ são inversíveis por convolução e segue que η_0 é inversível por convolução.

(ii) Notemos que $(\alpha \otimes I_H) \circ \eta_0 = I_H$, logo, I_H é invertível por convolução usando (i).

■

Um resultado imediato que tiramos da proposição acima é que se H é uma extensão fendida sobre H, então H é uma álgebra de Hopf, pois $H^{coH} = k$ neste caso.

O próximo corolário é um caso particular do principal resultado desse trabalho, o Teorema 3.5 que será provado mais adiante. Nele consideramos que a extensão dada é fendida, o que é um resultado mais forte do que trabalharmos com extensões de Hopf-Galois, como observamos no Teorema 2.21, Seção 2.3.1.

Corolário 3.3 *Se A é H-fendida e k-fielmente plana, então H é uma álgebra de Hopf.*

Os próximos resultados, assim como o último lema deste capítulo, dão os passos finais para a demonstração do teorema. O primeiro trata de algumas propriedades de extensões de Hopf-Galois não tratadas no Capítulo 2. O último, mais técnico por exigir apenas a condição de coálgebra ao invés da habitual k-biálgebra que estamos considerando neste capítulo, estabelece uma propriedade importante sobre k-álgebras fielmente planas, justificando o porquê desta condição aparecer como hipótese do teorema.

Proposição 3.4 *Sejam H uma k-biálgebra, E uma k-álgebra, $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois e $\alpha : A \to E$ um morfismo de álgebra, onde E é um A-bimódulo com estrutura dada por:*

$$a \cdot x = \alpha(a)x \quad \text{e} \quad x \cdot a = x\alpha(a), \text{ para todo } a \in A, \text{ e todo } x \in E.$$

Então aplicando o funtor $Hom_{B^-}(-, E)$, em que B^- é uma notação para B-módulo à esquerda, em $can : A \otimes_B A \to A \otimes H$ temos que

$$\begin{array}{rccc} \omega : & Hom_{B^-}(A \otimes H, E) & \to & Hom_{B^-}(A \otimes_B A, E) \\ & f & \mapsto & f \circ can, \end{array}$$

é um isomorfismo de B-módulos à esquerda. E também, temos que

$$\begin{array}{rccc} \pi : & Hom(H, E) & \to & Hom_{B^-}(A, E) \\ & f & \mapsto & \pi(f), \end{array}$$

em que $\pi(f)(a) = \sum \alpha(a^{(0)})f(a^{(1)})$, *é um isomorfismo de* B*-bimódulos.*

Demonstração: Mostraremos primeiro que ω é um isomorfismo de k-módulos, demonstrando a injetividade e a sobrejetividade. Notemos que ω é claramente um morfismo de k-módulos.

Seja $f \in \ker(\omega)$ então

$$0 = \omega(f)\left(\sum a_i \otimes b_i\right) \text{ para todo } \sum a_i \otimes b_i \in A \otimes_B A.$$

Vejamos que $f \equiv 0$.

De fato, para todo $\sum a_i \otimes h_i \in A \otimes H$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum a_i \otimes h_i\right) &= f \circ (can \circ can^{-1})\left(\sum a_i \otimes h_i\right) \\ &= f \circ can(can^{-1}\left(\sum a_i \otimes h_i\right)) \\ &= \omega(f)(can^{-1}\left(\sum a_i \otimes h_i\right)) = 0. \end{aligned}$$

Seja agora $\psi \in Hom_{B-}(A \otimes_B A, E)$. Definamos o morfismo $\gamma := \psi \circ can^{-1} \in Hom(A \otimes H, E)$. Daí

$$\omega(\gamma) = \omega(\psi \circ can^{-1}) = (\psi \circ can^{-1}) \circ can = \psi \circ (can^{-1} \circ can) = \psi$$

como queríamos.

Por fim π é um isomorfismo de B-bimódulos. Para tanto, consideramos as estruturas de B-bimódulo em $Hom(H, E)$ e $Hom_{B-}(A, E)$ dadas por $(b_1 f b_2)(h) = b_1 \cdot (f(h)) \cdot b_2$ e $(b_1 f' b_2)(a) = f'(ab_1) \cdot b_2$ respectivamente, para todo $b_1, b_2 \in B$, $a \in A$, $h \in H$, $f \in Hom(H, E)$ e todo $f' \in Hom_{B-}(A, E)$.

Notemos que π está bem definida pois

$$\begin{aligned}
\pi(f)(ba) &= \sum \alpha((ba)^{(0)})f((ba)^{(1)}) \\
&= \sum \alpha(b^{(0)})\alpha(a^{(0)})f(b^{(1)}a^{(1)}) \\
&= \alpha(b)(\sum \alpha(a^{(0)})f(a^{(1)})) \\
&= b \cdot \pi(f)(a),
\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom(H,E),\ a \in A$ e $b \in B = A^{coH}$.

E π é um morfismo de B-bimódulos, pois

$$\begin{aligned}
\pi(b_1 \cdot f \cdot b_2)(a) &= \alpha(\sum a^{(0)})(b_1 \cdot f \cdot b_2)(a^{(1)}) \\
&= \sum \alpha(a^{(0)})\alpha(b_1)f(a^{(1)})\alpha(b_2) \\
&= \sum \alpha(a^{(0)}b_1^{(0)})f(a^{(1)}b_1^{(1)})\alpha(b_2) \\
&= \pi(f)(ab_1) \cdot b_2 \\
&= b_1 \cdot \pi(f) \cdot b_2(a),
\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom(H,E),\ a \in A$ e $b_1,\ b_2 \in B$.

Ainda, seja $f \in \ker(\pi)$ então $0 = \pi(f)(a) = \sum \alpha(a^{(0)})f(a^{(1)})$ e

$$\begin{aligned}
f(h) &= \alpha(1_A)f(h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)(1_A \otimes h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)can \circ can^{-1}(1_A \otimes h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)\sum l_i(h)r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \\
&= \sum \alpha(l_i(h)r_i(h)^{(0)})f(r_i(h)^{(1)}) \\
&= \sum \alpha(l_i(h))\alpha(r_i(h)^{(0)})f(r_i(h)^{(1)}) \\
&= \alpha(l_i(h))\pi(f)(r_i(h)) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, em que $\sum l_i(h) \otimes r_i(h) = can^{-1}(1_A \otimes h)$ dada na Observação 2.12, o que implica $1_A \otimes h = \sum l_i(h)r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}$.

Por fim, seja $F \in Hom_{B-}(A,E)$, definamos $\widetilde{F} : A \otimes A \to E$

dada por $\widetilde{F}(a \otimes b) = \sum a \cdot F(b)$. Como $\widetilde{F} \in Hom_{B\text{-}}(A \otimes A, E)$ então existe $\widehat{F} \in Hom_{B\text{-}}(A \otimes H, E)$ tal que $\widehat{F} \circ can = \widetilde{F}$.

Assim, defina $f : H \to E$ tal que $f(h) = \widehat{F}(1_A \otimes h)$, daí

$$\begin{aligned}
\pi(f)(a) &= \sum \alpha(a^{(0)}) \cdot f(a^{(1)}) \\
&= \widehat{F}(\sum a^{(0)} \otimes a^{(1)}) \\
&= \widetilde{F}(1_A \otimes a) \\
&= F(a).
\end{aligned}$$

Portanto π é um isomorfismo de B-bimódulos como queríamos.

■

Teorema 3.5 *Seja H uma k-biálgebra e A uma extensão H-Galois à direita de $B = A^{coH}$ tal que A é k-fielmente plano sobre k. Então H é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração: Queremos ver se existe $S : H \to H$ inversa por convolução de I_H. Para tanto, consideremos

$$\begin{array}{rccc}
\widehat{S}: & H & \to & A \otimes H \\
& h & \mapsto & \sum l_i(h)^{(0)} r_i(h) \otimes l_i(h)^{(1)}.
\end{array}$$

Mostremos que o morfismo η_0 dado por $\eta_0(h) = 1_A \otimes h$ visto no Lema 3.1 é o inverso por convolução de $\widehat{S}$. Ou seja, temos de ver que:

(a) $\sum l_i(h_{(1)})^{(0)} r_i(h_{(1)}) \otimes l_i(h_{(1)})^{(1)} h_{(2)} = \varepsilon(h) 1_A \otimes 1_H$.

(b) $\sum l_i(h_{(2)})^{(0)} r_i(h_{(2)}) \otimes h_{(1)} l_i(h_{(2)})^{(1)} = \varepsilon(h) 1_A \otimes 1_H$.

Para (a) usamos o Lema 2.16, itens (ii) e (iii), ou seja, as equações

$$\sum l_i(h) r_i(h) = \varepsilon(h) 1_A$$

e

$$\sum l_i(h)\otimes r_i(h)^{(0)}\otimes r_i(h)^{(1)} = \sum l_i(h_{(1)})\otimes r_i(h_{(1)})\otimes h_{(2)},$$

respecivamente, juntamente com a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi: & A\otimes A\otimes H & \to & A\otimes H \\ & x\otimes y\otimes h & \mapsto & \sum x^{(0)}y\otimes x^{(1)}h. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \sum l_i(h_{(1)})^{(0)}r_i(h_{(1)})\otimes l_i(h_{(1)})^{(1)}h_{(2)} & = & \psi\left(\sum l_i(h_{(1)})\otimes r_i(h_{(1)})\otimes h_{(2)}\right) \\ & \overset{\text{(iii)}}{=} & \psi\left(\sum l_i(h)\otimes r_i(h)^{(0)}\otimes r_i(h)^{(1)}\right) \\ & = & \sum l_i(h)^{(0)}r_i(h)^{(0)}\otimes l_i(h)^{(1)}r_i(h)^{(1)} \\ & = & \rho(\sum l_i(h)r_i(h)) \\ & \overset{\text{(ii)}}{=} & \rho(\varepsilon(h)1_A) \\ & = & \varepsilon(h)1_A\otimes 1_H. \end{array}$$

Para (b) usamos a Proposição 3.4, considerando $E = A\otimes H$, juntamente com o morfismo

$$\begin{array}{rccc} can': & A\otimes A & \to & A\otimes H \\ & x\otimes y & \mapsto & \sum x^{(0)}y\otimes x^{(1)}, \end{array}$$

e a equação (i) do Lema 2.16, ou seja, $\sum a^{(0)}l_i(a^{(1)})\otimes r_i(a^{(1)}) = 1_A\otimes a$.

Definamos

$$\begin{array}{rccl} f: & H & \to & A\otimes H \\ & h & \mapsto & \sum l_i(h_{(2)})^{(0)}r_i(h_{(2)})\otimes h_{(1)}l_i(h_{(2)})^{(1)} \end{array}$$

e ainda $g: H\to A\otimes H$ por $g(h) = \varepsilon(h)1_A\otimes 1_H$. Vejamos que para todo $a \in A$, $\pi(f)(a) = \pi(g)(a)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\pi(f)(a) &= \sum a^{(0)} f(a^{(1)}) \\
&= \sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}_{(2)})^{(0)} r_i(a^{(1)}_{(2)}) \otimes a^{(1)}_{(1)} l_i(a^{(1)}_{(2)})^{(1)} \\
&= \sum a^{(0)} l_i(a^{(2)})^{(0)} r_i(a^{(2)}) \otimes a^{(1)} l_i(a^{(2)})^{(1)} \\
&= \sum (a^{(0)} l_i(a^{(1)}))^{(0)} r_i(a^{(1)}) \otimes (a^{(0)} l_i(a^{(1)}))^{(1)} \\
&\overset{(*)}{=} a \otimes 1_H,
\end{aligned}$$

notemos que $(*)$ é verdadeira desde que apliquemos o morfismo can' em (i) do Lema 2.16 pois

$$\begin{aligned}
a \otimes 1_H &= can'(1_A \otimes a) = can'\left(\sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)})\right) \\
&= \sum (a^{(0)} l_i(a_{(1)}))^{(0)} r_i(a_{(1)}) \otimes (a^{(0)} l_i(a_{(1)}))^{(1)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\pi(g)(a) = \sum a^{(0)} g(a^{(1)}) = \sum a^{(0)} \varepsilon(a^{(1)}) 1_A \otimes 1_H = a \otimes 1_H.$$

Assim, $\pi(f)(a) = \pi(g)(a)$ para todo $a \in A$, como queríamos e segue que $f = g$ pois π é um morfismo injetor.

Portanto $\widehat{S} * \eta_0 = \eta_{A\otimes H} \circ \varepsilon_H = \eta_0 * \widehat{S}$, onde $\eta_{A\otimes H}$ é a unidade em $A \otimes H$. Logo, aplicando o Lema 3.6, temos que $I_H : H \to H$ é inversível por convolução, e portanto sua inversa, S, será o que entendemos por antípoda da álgebra de Hopf, o que nos diz que H é uma álgebra de Hopf.

■

Lema 3.6 *Seja C uma k-coálgebra, H uma k-álgebra e um morfismo de k-módulos $f : C \to H$. Se existe uma k-álgebra k-fielmente plana A*

tal que

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}: & C & \to & A \otimes H \\ & c & \mapsto & 1_A \otimes f(c). \end{array}$$

é inversível por convolução, então f também é inversível por convolução.

Demonstração: A idéia da demonstração é encontrarmos um morfismo $g : C \to H$ tal que $f * g = \eta_H \circ \varepsilon_C = g * f$.

Para tanto, como H pode ser visto como um k-módulo, usaremos o Lema 2.8 que nos diz que

$$0 \to H \overset{\eta_0}{\to} A \otimes H \underset{\eta_2}{\overset{\eta_1}{\rightrightarrows}} A \otimes A \otimes H$$

é exata. Ou seja, H é um equalizador de η_1 e η_2, onde $\eta_0(h) = 1_A \otimes h$, $\eta_1(a \otimes h) = a \otimes 1_A \otimes h$ e $\eta_2(a \otimes h) = 1_A \otimes a \otimes h$.

Sendo $\widehat{g}$ a inversa por convolução de $\widehat{f}$, notamos que $\eta_1 \circ \widehat{g}$ é inversa de $\eta_1 \circ \widehat{f}$ e que $\eta_2 \circ \widehat{g}$ é inversa de $\eta_2 \circ \widehat{f}$ pelo Lema **??**, e que $\eta_1 \circ \widehat{f} = \eta_2 \circ \widehat{f}$ o que implica $\eta_1 \circ \widehat{g} = \eta_2 \circ \widehat{g}$ pela unicidade da inversa.

Daí, pela propriedade universal do equalizador, existe único $g : C \to H$ tal que $\widehat{g} = \eta_0 \circ g$. Mostremos que g é inversa por convolução de f. Notamos primeiro que

$$\begin{aligned} \varepsilon(c) 1_A \otimes 1_H &= \widehat{g} * \widehat{f}(c) \\ &= \mu\left(\sum \widehat{g}(c_{(1)}) \otimes \widehat{f}(c_{(2)})\right) \\ &= \sum \mu((1_A \otimes g(c_{(1)})) \otimes (1_A \otimes f(c_{(2)}))) \\ &= \sum 1_A \otimes g(c_{(1)}) f(c_{(2)}). \end{aligned}$$

O que implica em $\eta_0(\varepsilon(c) 1_H) = \eta_0\left(\sum g(c_{(1)}) f(c_{(2)})\right)$ e como η_0 é injetivo, segue que g é inversa por convolução à esquerda de f.

Analogamente, obtemos o resultado à direita e portanto, g é inverso por convolução de f.

$\blacksquare$

Capítulo 4

O grupo quântico $A(SL_{e^{2\pi i/3}}(2))$

Neste capítulo introduzimos o grupo quântico $A(SL_q(2))$. Mostramos sua estrutura de álgebra de Hopf e construímos as condições necessárias para que $A(SL_q(2))$ seja uma extensão de Hopf-Galois fielmente plana. Ainda, se considerarmos o subgrupo quântico (das matrizes triangulares superiores) de Borel de $A(SL_q(2))$, vemos que o quociente $A(SL_q(2))/\langle T_{21}\rangle$, em que T_{21} é um dos elementos geradores do grupo quântico $A(SL_q(2))$, é uma extensão de Hopf-Galois fendida, e assim, conseguimos calcular explicitamente o cociclo e a coação determinando uma estrutura de produto cruzado sobre $A(SL_q(2))/\langle T_{21}\rangle$.

Ao longo deste capítulo, todos os espaços vetoriais considerados serão sobre o corpo de base $\mathbb{C}$.

4.1 Cálculo Quântico

Consideremos a seguinte expressão:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando x se aproxima de x_0, o limite, se existe, é o que conhecemos usualmente por derivada. Porém, se definirmos $x = qx_0$ (q-cálculo) ou $x = x_0 + h$ (h-cálculo), onde $q \neq 1$ e $h \neq 0$, e não tomarmos o limite, entramos no estudo do cálculo quântico.

Para o nosso trabalho, consideramos a teoria do q-cálculo, uma vez que os grupos quânticos e suas representações estão diretamente relacionados com essa teoria.

Nos restringiremos a abordar apenas os resultados necessários ao Capítulo 4, coeficientes q-binomiais e a definição de q-determinante, porém, ressaltamos que a teoria do q-cálculo é ampla, se extendendo desde q-diferenciação e q-integração até q-polinômios ortogonais. Indicamos [16], [17] e [18] como referências.

Estabelecemos primeiramente o que é um q-número e um q-fatorial, respectivamente,

$$(k)_q := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k+1} = \frac{q^k - 1}{q - 1},\ k \in \mathbb{Z},\ k > 0;$$

$$(k)_q! := (1)_q (2)_q \cdots (k)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^k-1)}{(q-1)^k},\ (0)_q! := 1.$$

Assim, definimos o que é um coeficiente q-binomial pela fórmula

$$\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}_q := \frac{(k)_q!}{(k-i)_q!(i)_q!},\ 0 \leqslant i \leqslant k.$$

A idéia de coeficientes q-binomiais são uma espécie de generalização da teoria de coeficientes binomiais. Assim, a primeira pergunta que surge é se podemos estender a idéia do binômio de Newton para esse novo conceito, ou seja, é válido que

$$(u+v)^k = \sum_{l=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right)_q u^l v^{k-l}.$$

A resposta para a questão é sim, desde que $vu = quv$, mas para mostrarmos, precisamos ver antes um outro resultado que também pode ser generalizado,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)_q + q^k \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right)_q .$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)_q + q^k \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right)_q &= \frac{(n-1)_q!}{(k-1)_q!(n-k)_q!} + q^k \frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k-1)_q!} \\
&= \frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} \cdot ((k)_q + q^k (n-k)_q) \\
&= \frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} \left(\frac{q^k-1}{q-1} + q^k \frac{q^{n-k}-1}{q-1} \right) \\
&= \frac{(n-1)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} \left(\frac{q^n-1}{q-1} \right) \\
&= \frac{(n-1)_q!(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!} = \frac{(n)_q!}{(n)_q!(n-k)_q!} \\
&= \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q .
\end{aligned}$$

A partir disso, provamos que $(u+v)^k = \sum_{l=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right)_q u^l v^{k-l}$

por indução.

Claramente o resultado vale para $k = 1$. Supomos válido para k. Daí,

$$\begin{aligned}
(u+v)^{k+1} &= (u+v)(u+v)^k \\
&= (u+v)\left(\sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_q u^l v^{k-l}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_q u^{l+1} v^{k-l} + \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_q q^l u^l v^{k+1-l} \\
&= u^{k+1} + \sum_{l=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l-1 \end{pmatrix}_q u^l v^{k+1-l} + \sum_{l=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_q q^l u^l v^{k+1-l} + v^{k+1} \\
&= u^{k+1} + \sum_{l=1}^{k} \left(\begin{pmatrix} k \\ l-1 \end{pmatrix}_q + q^l \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_q\right) u^l v^{k+1-l} + v^{k+1} \\
&= u^{k+1} + \sum_{l=1}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ l \end{pmatrix}_q u^l v^{k-l} + v^{k+1} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ l \end{pmatrix}_q u^l v^{k+1-l},
\end{aligned}$$

em que $(*)$ é válido pois $vu = quv$.

Por fim, definimos o conceito de q-determinante de uma matriz, a saber,

$$qdet \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = T_{11}T_{22} - qT_{12}T_{21}.$$

4.2 $A(SL_q(2))$ como álgebra de Hopf

Nesta seção, introduzimos a estrutura de álgebra de Hopf sobre $A(SL_q(2))$. Como álgebra, $A(SL_q(2))$ é dado pelo quociente da álgebra livre $\mathbb{C}\{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ por um ideal I, em que I é o ideal gerado pelas relações:

$$T_{11}T_{12} = qT_{12}T_{11},\ T_{11}T_{21} = qT_{21}T_{11},\ T_{12}T_{22} = qT_{22}T_{12},$$

$$T_{12}T_{21} = T_{21}T_{12},\ T_{21}T_{22} = qT_{22}T_{21}, \tag{4.1}$$

e

$$T_{11}T_{22} - T_{22}T_{11} = (q - q^{-1})T_{12}T_{21},$$

$$T_{11}T_{22} - qT_{12}T_{21} = T_{22}T_{11} - q^{-1}T_{12}T_{21} = 1, \tag{4.2}$$

em que $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Na próxima seção, veremos que as relações 4.1 e 4.2 não surgem do nada, na verdade, as mesmas aparecem se pensarmos nas matrizes quânticas $M_2^q(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\{T_{ij}\}$ como tranformações lineares do plano quântico $\mathbb{C}_q[x, y] = \mathbb{C}\{x, y\}/\langle xy - qyx\rangle$.

Vejamos que existe uma estrutura de álgebra de Hopf sobre $A(SL_q(2))$. De fato, definimos um morfismo sobre $\{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ por:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\Delta}: & \{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\} & \rightarrow & A(SL_q(2)) \otimes A(SL_q(2)) \\ & T_{ij} & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{2} T_{ik} \otimes T_{kj}. \end{array}$$

Pela propriedade universal da álgebra livre, temos

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\Delta}: & \mathbb{C}\{T_{ij}\} & \rightarrow & A(SL_q(2)) \otimes A(SL_q(2)) \\ & T_{ij} & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{2} T_{ik} \otimes T_{kj}, \end{array}$$

morfismo de álgebras. Provemos que $\widehat{\Delta}$ satisfaz as relações (4.1) e (4.2).

De fato, vejamos que $\widehat{\Delta}(T_{11}T_{12}) = \widehat{(}\Delta)(qT_{12}T_{11})$, as outras relações são análogas.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(T_{11}T_{12}) &= \widehat{\Delta}(T_{11})\widehat{\Delta}(T_{12}) \\
&= (\sum_{k=1}^{2} T_{1k} \otimes T_{k1})(\sum_{k=1}^{2} T_{1k} \otimes T_{k2}) \\
&= (T_{11} \otimes T_{11} + T_{12} \otimes T_{21})(T_{11} \otimes T_{12} + T_{12} \otimes T_{22}) \\
&= T_{11}T_{11} \otimes T_{11}T_{12} + T_{11}T_{12} \otimes T_{11}T_{22} + T_{12}T_{11} \otimes T_{21}T_{12} + \\
&\qquad + T_{12}T_{12} \otimes T_{21}T_{22}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(qT_{12}T_{11}) &= q\widehat{\Delta}(T_{12})\widehat{\Delta}(T_{11}) \\
&= q(T_{11} \otimes T_{12} + T_{12} \otimes T_{22})(T_{11} \otimes T_{11} + T_{12} \otimes T_{21}) \\
&= qT_{11}T_{11} \otimes T_{12}T_{11} + qT_{11}T_{12} \otimes T_{12}T_{21} + qT_{12}T_{11} \otimes T_{22}T_{11} + \\
&\qquad + qT_{12}T_{12} \otimes T_{22}T_{21}.
\end{aligned}
$$

O que implica em $\widehat{\Delta}(T_{11}T_{12}) = \widehat{(}\Delta)(qT_{12}T_{11})$.

E portanto, existe

$$
\begin{aligned}
\Delta: \quad A(SL_q(2)) &\to A(SL_q(2)) \otimes A(SL_q(2)) \\
T_{ij} &\mapsto \sum_{k=1}^{2} T_{ik} \otimes T_{kj}.
\end{aligned}
$$

Mostremos que esta estrutura satisfaz o diagrama da comultiplicação dado na Definição A.22. Seja $T_{ij} \in A(SL_q(2))$ e I a identidade em $A(SL_q(2))$, daí

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I) \circ \Delta(T_{ij}) &= \Delta \otimes I(\sum_{l=1}^{2} T_{il} \otimes T_{lj}) \\
&= \sum_{l=1}^{2} (\sum_{k=1}^{2} T_{ik} \otimes T_{kl}) \otimes T_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} T_{ik} \otimes T_{kl} \otimes T_{lj}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta) \circ \Delta(T_{ij}) &= I \otimes \Delta(\sum_{l=1}^{2} T_{il} \otimes T_{lj}) \\
&= \sum_{l=1}^{2} T_{il} \otimes (\sum_{k=1}^{2} T_{lk} \otimes T_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} T_{il} \otimes T_{lk} \otimes T_{kj}.
\end{aligned}$$

E portanto, $\Delta \otimes I) \circ \Delta(T_{ij}) = (I \otimes \Delta) \circ \Delta(T_{ij})$ como queríamos.

Do mesmo modo, definimos a counidade sobre $\{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ por:

$$\begin{array}{cccc}
\widetilde{\varepsilon}: & \{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\} & \rightarrow & k \\
 & T_{ij} & \mapsto & \delta_{i,j}.
\end{array}$$

Pela propriedade universal da álgebra livre, temos

$$\begin{array}{cccc}
\widehat{\varepsilon}: & \mathbb{C}\{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\} & \rightarrow & k \\
 & T_{ij} & \mapsto & \delta_{i,j},
\end{array}$$

morfismo de álgebras. Provemos que $\widehat{\varepsilon}$ satisfaz as relações (4.1) e (4.2). De fato, vejamos que $\widehat{\varepsilon}(T_{11}T_{12}) = \widehat{(\varepsilon)}(qT_{12}T_{11})$, as outras relações são análogas.

$$\widehat{\varepsilon}(T_{11}T_{12}) = \widehat{\varepsilon}(T_{11})\widehat{\varepsilon}(T_{12}) = 0 = \widehat{\varepsilon}(T_{12})\widehat{\varepsilon}(T_{11}) = \widehat{(\varepsilon)}(qT_{12}T_{11})$$

E portanto, existe

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon: & A(SL_q(2)) & \rightarrow & k \\ & T_{ij} & \mapsto & \delta_{i,j}. \end{array}$$

Mostremos que o mesmo satisfaz a comutatividade do diagrama da counidade, conforme Definição A.22. Seja $T_{ij} \in A(SL_q(2))$ e I a identidade em $A(SL_q(2))$, daí

$$\begin{array}{rcl} (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(T_{ij}) & = & \varepsilon \otimes I(\sum\limits_{l=1}^{2} T_{il} \otimes T_{lj}) \\ & = & \sum\limits_{l=1}^{2} \varepsilon(T_{il}) \otimes T_{lj} \\ & = & \delta_{il} \otimes T_{lj} = T_{ij}, \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcl} (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(T_{ij}) & = & I \otimes \varepsilon(\sum\limits_{l=1}^{2} T_{il} \otimes T_{lj}) \\ & = & \sum\limits_{l=1}^{2} T_{il} \otimes \varepsilon(T_{lj}) \\ & = & T_{il} \otimes \delta_{lj} = T_{ij}, \end{array}$$

ou seja, $(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.

Portanto, $A(SL_q(2))$ possui uma estrutura de biálgebra. E sobre $A(SL_q(2))$ damos uma estrutura de álgebra de Hopf definindo a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} S: & A(SL_q(2)) & \rightarrow & A(SL_q(2)) \\ & T_{11} & \mapsto & T_{22} \\ & T_{12} & \mapsto & -q^{-1}T_{12} \\ & T_{21} & \mapsto & -qT_{21} \\ & T_{22} & \mapsto & T_{11}. \end{array}$$

É fácil vermos que o mesmo preserva as relações 4.1 e 4.2, e portanto está bem definido. Vejamos que é o inverso por produto de convolução do morfirmo identidade $I_{A(SL_q(2))} : A(SL_q(2)) \to A(SL_q(2))$.

Seja $(T_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$ a matriz dos geradores de $A(SL_q(2))$. Vimos que $\Delta((T_{ij})) = (T_{ij}) \otimes (T_{ij})$, assim,

$$
\begin{aligned}
S * I_{A(SL_q(2))}((T_{ij})) &= \mu(S \otimes I_{A(SL_q(2))})((T_{ij}) \otimes (T_{ij})) \\
&= \mu[S((T_{ij})) \otimes (T_{ij})] \\
&= \mu\left[\begin{pmatrix} T_{22} & -q^{-1}T_{12} \\ -qT_{21} & T_{11} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} T_{22}T_{11} - q^{-1}T_{12}T_{21} & T_{22}T_{12} - q^{-1}T_{12}T_{22} \\ -qT_{21}T_{11} + T_{11}T_{21} & -qT_{21}T_{12} + T_{11}T_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon((T_{ij}))1_{A(SL_q(2))}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $I_{A(SL_q(2))} * S((T_{ij})) = \varepsilon((T_{ij}))1_{A(SL_q(2))}$. Portanto, S satisfaz o axioma da antípoda, e assim, é um anti-homomorfismo de álgebras.

Finalizamos essa seção abordando o grupo quântico $A(SL_q(2))$ quando $q = 1$. Neste caso, temos

$$A(SL_q(2)) \underset{q\to 1}{\longrightarrow} A(SL(2,\mathbb{C})),$$

em que $A(SL(2,\mathbb{C})) = \mathbb{C}[T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}]/\langle T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} - 1\rangle$ é a álgebra de funções coordenadas do grupo de Lie $SL(2,\mathbb{C})$. A estrutura de biálgebra sobre $A(SL(2,\mathbb{C}))$ é a mesma dada sobre $A(SL_q(2))$ e a antípoda é dada pelo morfismo

$$\begin{array}{rccc} S: & A(SL_q(2)) & \to & A(SL_q(2)) \\ & T_{11} & \mapsto & T_{22} \\ & T_{12} & \mapsto & -T_{12} \\ & T_{21} & \mapsto & -T_{21} \\ & T_{22} & \mapsto & T_{11}. \end{array}$$

4.3 Uma abordagem geométrica de $A(SL_q(2))$

Antes de iniciarmos o estudo das extensões sobre o grupo quântico $A(SL_q(2))$, abrimos um parênteses para vermos que as relações definidoras de $A(SL_q(2))$ não surgem do nada, na verdade, sabemos que matrizes com entradas complexas agem como tranformações lineares sobre espaços complexos. Assim, se pensarmos nas matrizes quânticas em $\mathbb{C}\{T_{ij}\}$ como transformações lineares do plano quântico $\mathbb{C}_q[x,y]$, devemos ver que as relações 4.1 e 4.2 surgem naturalmente.

De fato, definimos o plano quântico $\mathbb{C}_q[x,y]$, pelo quociente da álgebra livre $\mathbb{C}\{x,y\}$ pelo ideal $\langle xy - qyx\rangle$, em que $q \in \mathbb{C}$. Queremos definir uma coação da álgebra livre $\mathbb{C}\{T_{ij}\}$, com $\widehat{\Delta}$ e $\widehat{\varepsilon}$ definidas anteriormente. De fato, definimos

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\delta}_L: & \{x,y\} & \to & \mathbb{C}\{T_{ij}\} \otimes \mathbb{C}_q[x,y] \\ & x & \mapsto & T_{11} \otimes x + T_{12} \otimes y \\ & y & \mapsto & T_{21} \otimes x + T_{22} \otimes y. \end{array}$$

Assim, pela propriedade universal da álgebra livre, definimos

$$
\begin{array}{rccl}
\widehat{\delta}_L : & \mathbb{C}\{x,y\} & \to & \mathbb{C}\{T_{ij}\} \otimes \mathbb{C}_q[x,y] \\
& x & \mapsto & T_{11} \otimes x + T_{12} \otimes y \\
& y & \mapsto & T_{21} \otimes x + T_{22} \otimes y.
\end{array}
$$

Vamos reduzir $\widehat{\delta}_L$ a uma coação de um quociente de $\mathbb{C}\{T_{ij}\}$ sobre $\mathbb{C}_q[x,y]$, forçando que $\widehat{\delta}_L$ satisfaça à relação

$$
\widehat{\delta}_L(x)\widehat{\delta}_L(y) = q\widehat{\delta}_L(y)\widehat{\delta}_L(x). \tag{4.3}
$$

Para que isto ocorra, teremos na verdade que reduzir também o contradomínio, obtendo uma aplicação

$$
\delta_L : \mathbb{C}_q[x,y] \to A(SL_q(2)) \otimes \mathbb{C}_q[x,y],
$$

isto é, uma coação de $A(SL_q(2))$ sobre $\mathbb{C}_q[x,y]$.

Analogamente, definimos uma coação à direita de $A(SL_q(2))$ sobre $\mathbb{C}_q[x,y]$

$$
\begin{array}{rccl}
\delta_R : & \mathbb{C}_q[x,y] & \to & \mathbb{C}_q[x,y] \otimes A(SL_q(2)) \\
& x & \mapsto & x \otimes T_{11} + y \otimes T_{12} \\
& y & \mapsto & x \otimes T_{21} + y \otimes T_{22},
\end{array}
$$

que satisfazendo a igualdade

$$
\delta_R(x)\delta_R(y) = q\delta_R(y)\delta_R(x), \tag{4.4}
$$

Vejamos que o contradomínio de fato precisa ser restrito, na definição de δ_L e δ_R dados acima. Da equação 4.3 temos que

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta}_L(x)\widehat{\delta}_L(y) = q\widehat{\delta}_L(y)\widehat{\delta}_L(x) \\
&\Rightarrow (T_{11} \otimes x + T_{12} \otimes y)(T_{21} \otimes x + T_{22} \otimes y) = \\
&= q(T_{21} \otimes x + T_{22} \otimes y)(T_{11} \otimes x + T_{12} \otimes y) \\
&\Rightarrow T_{11}T_{21} \otimes x^2 + T_{11}T_{22} \otimes xy + T_{12}T_{21} \otimes yx + T_{12}T_{22} \otimes y^2 = \\
&= qT_{21}T_{11} \otimes x^2 + qT_{21}T_{12} \otimes xy + qT_{22}T_{12} \otimes yx + qT_{22}T_{11} \otimes y^2 \\
&\Rightarrow T_{11}T_{21} \otimes x^2 + T_{11}T_{22} \otimes xy + q^{-1}T_{12}T_{21} \otimes xy + T_{12}T_{22} \otimes y^2 = \\
&= qT_{21}T_{11} \otimes x^2 + qT_{21}T_{12} \otimes xy + T_{22}T_{11} \otimes xy + qT_{22}T_{12} \otimes y^2.
\end{aligned}
$$

E portanto, temos que

$$
\begin{cases}
T_{11}T_{21} = qT_{21}T_{11}; \\
T_{12}T_{22} = qT_{22}T_{12}; \\
T_{11}T_{22} + q^{-1}T_{12}T_{21} = T_{22}T_{11} + qT_{21}T_{12}. \qquad \text{(ii)}
\end{cases}
$$

Em que a última equação implica em

$$T_{11}T_{22} - T_{22}T_{11} = qT_{21}T_{12} - q^{-1}T_{12}T_{21}.$$

E da equação 4.4 temos que

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta}_R(x)\widehat{\delta}_R(y) = q\widehat{\delta}_R(y)\widehat{\delta}_R(x) \\
&\Rightarrow (x \otimes T_{11} + y \otimes T_{21})(x \otimes T_{12} + y \otimes T_{22}) = \\
&= q(x \otimes T_{12} + y \otimes T_{22})(x \otimes T_{11} + y \otimes T_{21}) \\
&\Rightarrow x^2 \otimes T_{11}T_{12} + yx \otimes T_{21}T_{12} + xy \otimes T_{11}T_{22} + y^2 \otimes T_{21}T_{22} = \\
&= qx^2 \otimes T_{12}T_{11} + qxy \otimes T_{12}T_{21} + qyx \otimes T_{22}T_{11} + qy^2 \otimes T_{22}T_{21} \\
&\Rightarrow x^2 \otimes T_{11}T_{12} + q^{-1}xy \otimes T_{21}T_{12} + xy \otimes T_{11}T_{22} + y^2 \otimes T_{21}T_{22} = \\
&= x^2 \otimes qT_{12}T_{11} + qxy \otimes T_{12}T_{21} + xy \otimes T_{22}T_{11} + y^2 \otimes qT_{22}T_{21}.
\end{aligned}
$$

E portanto, temos que

$$\begin{cases} T_{11}T_{12} = qT_{12}T_{11}; \\ T_{21}T_{22} = qT_{22}T_{21}; \\ T_{11}T_{22} + q^{-1}T_{21}T_{12} = T_{22}T_{11} + qT_{12}T_{21}. \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

Em que a última equação implica em

$$T_{11}T_{22} - T_{22}T_{11} = qT_{12}T_{21} - q^{-1}T_{21}T_{12}.$$

Por fim, de (i) e (ii),

$$\begin{array}{rccc} & qT_{21}T_{12} - q^{-1}T_{12}T_{21} & = & qT_{12}T_{21} - q^{-1}T_{21}T_{12} \\ \Rightarrow & (q+q^{-1})T_{21}T_{12} & = & (q+q^{-1})T_{12}T_{21} \\ \Rightarrow & T_{21}T_{12} & = & T_{12}T_{21}. \end{array}$$

Logo, dadas as coações de $\mathbb{C}\{T_{ij}\}$ em $\mathbb{C}_q[x,y]$, vemos que as relações 4.1 e 4.2 são satisfeitas. Seja $\mathfrak{F}$ o ideal gerado pelas relações de $\widehat{\delta}_L$ e $\widehat{\delta}_R$, definimos a álgebra de Hopf $A(SL_q(2))$ pelo quociente $\mathbb{C}\{T_{ij}\}/\mathfrak{F}$.

4.4 $A(SL_q(2))$ como extensão de Hopf-Galois fielmente plana

Iniciamos esta seção vendo algumas propriedades algébricas do grupo quântico $A(SL_q(2))$.

Com base no que foi desenvolvido na Seção 4.1, vemos que

$$
\begin{aligned}
\Delta(T_{ij}^k) &= (\Delta(T_{ij}))^k \\
&= \left(\sum_{n=1}^{2} T_{in} \otimes T_{nj}\right)^k \\
&= \sum_{l=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array}\right)_{q^{-2}} T_{i1}^l T_{i2}^{k-l} \otimes T_{1j}^l T_{2j}^{k-l}.
\end{aligned}
$$

O seguinte resultado será frequentemente usado no decorrer do trabalho. O mesmo estabelece uma base para o grupo quântico $A(SL_q(2))$.

Lema 4.1 *O conjunto* $\{T_{11}^n T_{12}^m T_{21}^r, T_{12}^m T_{21}^r T_{22}^s : m, r, s \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\}$ *é uma base para o espaço vetorial* $A(SL_q(2))$.

Demonstração: Usaremos o Lema do Diamante dado no Apêndice C. Defina $\mathcal{X} = \{T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ e coloquemos as relações definidoras de $A(SL_q(2))$ no sistema de reduções

$$S = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_5,\ \sigma_6,\ \sigma_7\},$$

em que $\sigma_1 = (T_{12}T_{11},\ q^{-1}T_{11}T_{12})$, $\sigma_2 = (T_{12}T_{21},\ q^{-1}(T_{11}T_{22} - 1_{A(SL_q(2))}))$, $\sigma_3 = (T_{21}T_{11},\ q^{-1}T_{11}T_{21})$, $\sigma_4 = (T_{21}T_{12},\ T_{12}T_{21})$, $\sigma_5 = (T_{22}T_{21},\ q^{-1}T_{21}T_{22})$, $\sigma_6 = (T_{22}T_{11},\ q^{-1}T_{12}T_{21} + 1_{A(SL_q(2))})$ e $\sigma_7 = (T_{22}T_{12},\ q^{-1}T_{12}T_{22})$, de forma que a álgebra $\mathcal{X}$ coincida com a álgebra $A(SL_q(2))$.

Notamos que $\beta = \{T_{11}^i T_{12}^j T_{21}^k T_{22}^l\}$, com $i = 0$ ou $l = 0$, é o conjunto dos polinômios irredutíveis sobre S e portanto, uma base para $\mathbb{C}\langle\mathcal{X}\rangle_{Irr}$. Ainda, sobre $\mathcal{X}$ definimos uma ordem dada por

$$T_{11} \preccurlyeq T_{12} \preccurlyeq T_{21} \preccurlyeq T_{22}$$

e para monômios $A,\ B \in \langle \mathcal{X} \rangle$, dizemos que $A < B$ se o comprimento de A é menor que o de B ($l(A) < l(B)$), e no caso em que $l(A) = l(B)$, usamos a ordem lexográfica em $\mathcal{X}^{l(A)}$.

Essa ordem é uma ordem total de semigrupos, compatível com S e satisfazendo a condição de cadeia descendente.

Resta mostrarmos que todas as ambiguidades de S dadas abaixo são resolúveis:

1) $(\sigma_2, \sigma_3, T_{12}, T_{21}, T_{11})$	2) $(\sigma_2, \sigma_4, T_{12}, T_{21}, T_{12})$
3) $(\sigma_4, \sigma_1, T_{21}, T_{12}, T_{11})$	4) $(\sigma_4, \sigma_2, T_{21}, T_{12}, T_{21})$
5) $(\sigma_5, \sigma_3, T_{22}, T_{21}, T_{11})$	6) $(\sigma_5, \sigma_4, T_{22}, T_{21}, T_{12})$
7) $(\sigma_7, \sigma_1, T_{22}, T_{12}, T_{11})$	8) $(\sigma_7, \sigma_2, T_{22}, T_{12}, T_{11})$

Resolvamos a ambiguidade 1), ou seja, devemos ver quem são $r_1,\ r_1'$ tais que

$$r_1((q^{-1}(T_{11}T_{22} - 1_{A(SL_q(2))}))T_{11}) = r_1'(q^{-1}T_{12}T_{11}T_{21}).$$

De fato, basta tomarmos $r_1 = r_{T_{11}\sigma_6 1_{A(SL_q(2))}}$ e $r_1' = r_{1_{A(SL_q(2))}\sigma_1 T_{21}}$ que a igualdade será verificada. De modo análogo, vemos que as demais ambiguidades também são resolvíveis. Então, pelo Lema do Diamante, temos que β é uma base para $A(SL_q(2))$.

$\blacksquare$

Deste momento e até o fim do trabalho, especificaremos nosso grupo quântico tomando $q = e^{2\pi i/3}$, raiz cúbica da unidade.

Daí, aplicando este fato ao Lema 4.1, a $\Delta(T_{ij}^k)$ e a $(u+v)^k$, dado na Seção 4.1, temos, respectivamente, os seguintes resultados:

1. A comultiplicação Δ nos elementos da base de $A(SL_q(2))$ é dada através das seguintes fórmulas:

$$\bullet\ \Delta(T_{11}^pT_{12}^rT_{21}^s) = \sum_{\lambda,\mu,\nu=0}^{p,r,s} \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} r \\ \mu \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} s \\ \nu \end{pmatrix}_q T_{11}^{p-\lambda}T_{12}^{\lambda}T_{11}^{\mu}T_{12}^{r-\mu}T_{21}^{s-\nu}T_{22}^{\nu}\otimes$$

$$T_{11}^{p-\lambda}T_{21}^{\lambda}T_{12}^{\mu}T_{22}^{r-\mu}T_{11}^{s-\nu}T_{21}^{\nu};$$

$$\bullet\ \Delta(T_{12}^kT_{21}^lT_{22}^m) = \sum_{\lambda,\mu,\nu=0}^{k,l,m} \begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} l \\ \mu \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} m \\ \nu \end{pmatrix}_q T_{11}^{\lambda}T_{12}^{k-\lambda}T_{21}^{l-\mu}T_{22}^{\mu}T_{21}^{\nu}T_{22}^{m-\nu}\otimes$$

$$T_{12}^{\lambda}T_{22}^{k-\lambda}T_{11}^{l-\mu}T_{21}^{\mu}T_{12}^{\nu}T_{22}^{m-\nu},$$

em que $m \in \mathbb{Z}_+^*$, $p, r, s, k, l \in \mathbb{Z}_+$, $q^{-2} = q$ e notamos que as relações de comutatividade do grupo quântico $A(SL_q(2))$ não são utilizadas por ao invés de facilitarem, acabarem dificultando os cálculos aos quais dependemos dessas equações.

2. $\Delta(T_{ij}^k) = \sum_{n=1}^{2} T_{in}^k \otimes T_{nj}^k$, para todo $k \in 3\mathbb{Z}$, uma vez que $q^3 = 1$.

3. $(u + v)^k = u^k + v^k$, para todo $k \in 3\mathbb{Z}$, uma vez que $q^3 = 1$.

A partir de agora construiremos as ferramentas necessárias para vermos $A(SL_q(2))$ como uma extensão de Hopf-Galois fielmente plana. Iniciamos vendo as seguintes definições

Definição 4.2 *Uma sequência de álgebras de Hopf (e morfismos de álgebras de Hopf)*

$$B \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\pi} H$$

é chamada exata se, e somente se, j é injetivo e π é a sobrejeção canônica sobre $H = P/Pj(B^+)P$, em que $B^+ = B \bigcap \ker(\varepsilon)$.

Definição 4.3 *Uma sequência exata de álgebras de Hopf*

$$B \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\pi} H$$

é chamada estritamente exata se, e somente se, P é fielmente plano à *direita sobre $j(B)$ e $j(B)$ é uma subálgebra de Hopf normal de P, ou seja, $Pj(B)^+ = j(B)^+P$.*

Nossa idéia é construirmos uma sequência exata de álgebras de Hopf, em que P é o grupo quântico $A(SL_q(2))$, $B = A(SL(2,\mathbb{C}))$ e H é dado pelo quociente $A(SL_q(2))/\langle T_{ij}^3 - \delta_{ij}\rangle$. Para tanto, consideremos o morfismo de Frobenius

$$\begin{array}{rccc} Fr: & A(SL(2,\mathbb{C})) & \to & A(SL_q(2)) \\ & \overline{T_{ij}} & \mapsto & T_{ij}^3 \end{array}, \ i,j \in \{1,2\}.$$

Notemos que o morfismo Fr é injetivo. Seja $x \in \ker(Fr)$, então, $x \in A(SL(2,\mathbb{C}))$ e pelo Lema 4.1,

$$x = \sum \alpha_{m,n,p} T_{11}^m T_{12}^n T_{21}^p + \sum \beta_{q,r,s} T_{12}^q T_{21}^r T_{22}^s,$$

daí,

$$\begin{array}{rcl} Fr(x) & = & Fr(\sum \alpha_{m,n,p} T_{11}^m T_{12}^n T_{21}^p + \sum \beta_{q,r,s} T_{12}^q T_{21}^r T_{22}^s) \\ & = & \sum \alpha_{m,n,p} T_{11}^{3m} T_{12}^{3n} T_{21}^{3p} + \sum \beta_{q,r,s} T_{12}^{3q} T_{21}^{3r} T_{22}^{3s} \\ \Rightarrow 0 & = & \sum \alpha_{m,n,p} T_{11}^{3m} T_{12}^{3n} T_{21}^{3p} + \sum \beta_{q,r,s} T_{12}^{3q} T_{21}^{3r} T_{22}^{3s}. \end{array}$$

E como $\sum \alpha_{m,n,p} T_{11}^m T_{12}^n T_{21}^p$ e $\sum \beta_{q,r,s} T_{12}^q T_{21}^r T_{22}^s$ pertencem a base de $A(SL_q(2))$, segue que são L.I. e portanto, $\alpha_{m,n,p} = \beta_{q,r,s} = 0$, para todo $m,n,p,q,r,s \in \mathbb{N}$, o que implica em $x = 0$.

Ainda, não é difícil vermos que $T_{ij}^3 \in Z(A(SL_q(2)))$, que $\Delta(T_{ij}^3) = \sum_{n=1}^{2} T_{in}^3 \otimes T_{nj}^3$ e que $(qdet(T_{ij}))^3 = det(T_{ij}^3)$. Com isso, pelo Teorema 5.1 de [22], a sequência

$$A(SL(2,\mathbb{C})) \xrightarrow{Fr} A(SL_q(2)) \xrightarrow{\pi_F} A(F) \tag{4.5}$$

é uma sequência exata de álgebras de Hopf, em que $A(F)$ representa o quociente $A(SL_q(2))/\langle T_{ij}^3 - \delta_{ij}\rangle$.

Visto isso, a idéia é provarmos que $A(SL_q(2))$ é uma $A(F)$-extensão de Hopf Galois fielmente plana de $Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))$. Faremos isto de forma direta, porém, este mesmo resultado pode ser obtido utilizando a dualidade entre funções sobre grupos e as álgebras envolventes universais, para a demonstração desse fato, indicamos ([1], Proposição 3.4.5), ([17], Teorema IV.4.1, Proposição I.8.2), [19], [25], ([33], Observação 1.2(1)), ([34], Teorema 3.3, Observação 1.6(1)) e ([35], Teorema 1.3).

Iniciamos este processo, estabelecendo uma base para $A(F)$ à partir da base estalecida para $A(SL_q(2))$ no Lema 4.1.

Proposição 4.4 *O conjunto* $\{\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r \widetilde{T}_{21}^s\}_{p,r,s\in\{0,1,2\}}$ *é uma base para* $A(F)$*, em que* $\widetilde{T}_{11} = \pi_F(T_{11})$*,* $\widetilde{T}_{12} = \pi_F(T_{12})$*,* $\widetilde{T}_{21} = \pi_F(T_{21})$ *e ainda,* $\widetilde{T}_{22} = \pi_F(T_{22})$*.*

Demonstração: Das relações definidoras do grupo quântico $A(SL_q(2))$, vimos que $T_{11}T_{22} - qT_{12}T_{21} = 1$, onde 1 é a unidade em $A(SL_q(2))$. Daí, aplicando o morfismo π_F temos que $\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{22} - \widetilde{T}_{12}\widetilde{T}_{21} = \widetilde{1}$ o que implica em $\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{22} = \widetilde{1} + \widetilde{T}_{12}\widetilde{T}_{21}$, e como $\widetilde{T}_{11}^3 = \widetilde{1}$, segue que

$$\widetilde{T}_{22} = \widetilde{T}_{11}^2(\widetilde{1} + \widetilde{T}_{12}\widetilde{T}_{21}).$$

Assim, como $\{(T_{11}^p T_{12}^r T_{21}^s, T_{12}^l T_{21}^k T_{22}^m)\}$ gera $A(SL_q(2))$ pelo Lema 4.1, ao projetarmos, é fácil vermos que $\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r \widetilde{T}_{21}^s$, para todo $p, r, s \in \{0, 1, 2\}$, gera $A(F)$.

Mostremos que o conjunto $\{\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r \widetilde{T}_{21}^s\}_{p,r,s\in\{0,1,2\}}$ é linearmente independente.

De fato, considerando a ação de $A(F)$ sobre ele mesmo, definimos a representação

$$\chi : A(F) \to End(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3)$$

dada por

$$\begin{aligned} \chi(\widetilde{T}_{11}) &= J \otimes Id_3 \otimes Id_3, \\ \chi(\widetilde{T}_{12}) &= Q \otimes N \otimes Id_3, \\ \chi(\widetilde{T}_{21}) &= Q \otimes Id_3 \otimes N, \end{aligned}$$

em que $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
e Id_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Seja $\sum\limits_{p,r,s} \alpha_{prs}\widetilde{T}_{11}^p\widetilde{T}_{12}^r\widetilde{T}_{21}^s = 0$. Aplicando a representação χ, temos que

$$0 = \sum_{p,r,s} \alpha_{prs} J^p Q^{r+s} \otimes N^r \otimes N^s, \tag{4.6}$$

pois

$$\begin{aligned} 0 &= \chi\Big(\sum_{p,r,s} \alpha_{prs}\widetilde{T}_{11}^p\widetilde{T}_{12}^r\widetilde{T}_{21}^s\Big) \\ &= \sum_{p,r,s} \alpha_{prs}\chi(\widetilde{T}_{11}^p)\chi(\widetilde{T}_{12}^r)\chi(\widetilde{T}_{21}^s) \\ &= \sum_{p,r,s} \alpha_{prs}\chi(\widetilde{T}_{11})^p\chi(\widetilde{T}_{12})^r\chi(\widetilde{T}_{21})^s \\ &= \sum_{p,r,s} \alpha_{prs}(J \otimes Id_3 \otimes Id_3)^p(Q \otimes N \otimes Id_3)^r(Q \otimes Id_3 \otimes N)^s \\ &= \sum_{p,r,s} \alpha_{prs}(J^p \otimes Id_3^p \otimes Id_3^p)(Q^r \otimes N^r \otimes Id_3^r)(Q^s \otimes Id_3^s \otimes N^s) \\ &= \sum_{p,r,s} \alpha_{prs} J^p Q^{r+s} \otimes N^r \otimes N^s. \end{aligned}$$

Por outro lado, se considerarmos funcionais lineares

$$h^{klm} : M_3(\mathbb{C}) \otimes M_3(\mathbb{C}) \otimes M_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

tais que $h^{klm}(A \otimes B \otimes C) := A_{k0}B_{l0}C_{m0}$, em que as linhas e colunas das matrizes são numeradas por 0, 1 e 2 ao invés da numeração tradicional 1, 2, 3, para todo $k, l, m \in \{0, 1, 2\}$. E aplicarmos h^{klm} na equação 4.6, temos que

$$0 = h^{klm}\left(\sum_{p,r,s} \alpha_{prs} J^p Q^{r+s} \otimes N^r \otimes N^s\right) = \sum_{p,r,s} \alpha_{prs} h^{klm}(J^p Q^{r+s} \otimes N^r \otimes N^s).$$

O que implica em $\alpha_{prs} = 0$ para todo $p, r, s \in \{0, 1, 2\}$, uma vez que $h^{klm}(J^p Q^{r+s} \otimes N^r \otimes N^s) = \delta_{pk}\delta_{rl}\delta_{ms}$.

Portanto $\{\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r \widetilde{T}_{21}^s\}$ é um conjunto linearmente independente como queríamos e segue que $\{\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r \widetilde{T}_{21}^s\}_{p,r,s \in \{0,1,2\}}$ é uma base para $A(F)$.

■

Usando as mesmas técnicas da demonstração anterior, de construir os funcionais lineares h^{klm}, podemos deduzir também o resultado abaixo:

Proposição 4.5 *A representação* $\chi : A(F) \to End(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3)$ *definida acima é fiel.*

Definida a base para $A(F)$, temos condições suficientes para mostrarmos que $A(SL_q(2))$ é uma $A(F)$-extensão de Hopf-Galois de $Fr(A(SL(2, \mathbb{C})))$, onde a coação à direita de $A(F)$ sobre $A(SL_q(2))$ é dada pelo morfismo $\rho : A(SL_q(2)) \to A(SL_q(2)) \otimes A(F)$ definida por $\rho(T_{ij}) := (I_{A(SL_q(2))} \otimes \pi) \circ \Delta(T_{ij})$.

Proposição 4.6 *A álgebra $A(SL(2,\mathbb{C}))$ das funções polinomiais sobre $SL(2,\mathbb{C})$ é isomorfa (via morfismo de Frobenius) a subálgebra dos elementos coinvariantes à direita $A(SL_q(2))^{coA(F)}$.*

Demonstração: Para demonstrarmos o resultado, criaremos as condições necessárias para aplicarmos o Lema 2.17. Afim de facilitarmos nossa notação, denotaremos $Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))$ por C e $A(SL_q(2))$ por A.

Verifiquemos primeiramente que C é uma subálgebra de $A^{coA(F)}$. Seja $T_{ij}^3 \in C$, $i,j \in \{1,2\}$, daí

$$\begin{aligned}
\rho(T_{ij}^3) &= (I_A \otimes \pi) \circ \Delta(T_{ij}^3) \\
&= (I_A \otimes \pi)(\sum_{n=1}^{2} T_{in}^3 \otimes T_{nj}^3) \\
&= \sum_{n=1}^{2} T_{in}^3 \otimes \pi(T_{nj}^3) \\
&= \sum_{n=1}^{2} T_{in}^3 \otimes \delta_{nj} = T_{ij}^3 \otimes 1_{A(F)}.
\end{aligned}$$

Assim, $Fr(A(SL(2,\mathbb{C}))) = C \subseteq A^{coA(F)}$. E portanto, é uma subálgebra da álgebra dos coinvariantes a direita, pois vimos que $\Delta(T_{ij}^3) = \sum_{k=1}^{2} T_{ik}^3 \otimes T_{kj}^3$, o que implica em $\Delta(C) \subset C \otimes C$ que por sua vez, está contido em $A \otimes C$.

Pelo Lema 2.28, existe um morfismo bijetivo

$$\begin{array}{rccl}
\overline{can}: & A \otimes_C A & \to & A \otimes A(F) \\
& T_{ij} \otimes T_{kl} & \mapsto & (T_{ij} \otimes 1_{A(F)})\rho(T_{kl})
\end{array}, \text{ para todo } i,j,k,l \in \{1,2\}.$$

Por fim, vejamos que existe um morfismo de C-módulos à direita tal que $s(1_A) = 1_C$, C-linear à direita, $s : A \to C$.

De fato, definimos o morfismo $s : A \to C$ na base de A da seguinte forma:

$$s(T_{11}^{p}T_{12}^{r}T_{21}^{s}) = \begin{cases} T_{11}^{p}T_{12}^{r}T_{21}^{s} & , \text{ se } p,r,s \in 3\mathbb{Z}; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$s(T_{12}^{k}T_{21}^{l}T_{22}^{m}) = \begin{cases} T_{12}^{k}T_{21}^{l}T_{22}^{m} & , \text{ se } k,l,m \in 3\mathbb{Z}; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $p, r, s, k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$.

Claramente, s é um morfismo unital, uma vez que 0 é múltiplo de 3. Ainda, como $C \subseteq Z(A)$, segue que as estruturas de C-módulo à esquerda e à direita de A coincidem, assim, provarmos que s é C-linear à direita tem o mesmo significado que provarmos que s é C-linear à esquerda.

Sejam $f \in C$ e $w \in A$, se mostrarmos que $s(fw) = fs(w)$ teremos nosso resultado satisfeito.

Como ambos f e $w \in A$, podemos decompô-los na base de A, obtendo $f = f^1 + f^2$, $w = w^1 + w^2$, em que

$$f^1 = \sum_{p,r,s} f^1_{prs} T_{11}^{3p}T_{12}^{3r}T_{21}^{3s}, \;\; f^2 = \sum_{\substack{k,l,m \\ m>0}} f^2_{klm} T_{12}^{3k}T_{21}^{3l}T_{22}^{3m},$$

$$w^1 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha}T_{12}^{\beta}T_{21}^{\gamma} \;\; \text{e } w^2 = \sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu \\ \nu>0}} w^2_{\lambda\mu\nu} T_{12}^{\lambda}T_{21}^{\mu}T_{22}^{\nu}.$$

Assim, mostrarmos que $s(fw) = fs(w)$ é o mesmo que provarmos as seguintes igualdades:

1) $s(f^1w^1) = f^1s(w^1)$ 2) $s(f^1w^2) = f^1s(w^2)$

3) $s(f^2w^1) = f^2s(w^1)$ 4) $s(f^2w^2) = f^2s(w^2)$

Lembrando que $q^3 = q^{-3} = 1$, vejamos 1).

$$
\begin{aligned}
s(f^1w^1) &= s\left(\left(\sum_{p,r,s} f^1_{prs} T_{11}^{3p} T_{12}^{3r} T_{21}^{3s}\right) \cdot \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha} T_{12}^{\beta} T_{21}^{\gamma}\right)\right) \\
&= s\left(\sum_{p,r,s}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^1_{prs} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{3p+\alpha} T_{12}^{3r+\beta} T_{21}^{3s+\gamma}\right) \\
&= \sum_{p,r,s}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^1_{prs} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{3p+\alpha} T_{12}^{3r+\beta} T_{21}^{3s+\gamma}, \text{ se } \alpha,\beta,\gamma \in 3\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

ou igual a 0 caso contrário.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
f^1s(w^1) &= \sum_{p,r,s} f^1_{prs} T_{11}^{3p} T_{12}^{3r} T_{21}^{3s}\, s\left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha} T_{12}^{\beta} T_{21}^{\gamma}\right) \\
&= \sum_{p,r,s} f^1_{prs} T_{11}^{3p} T_{12}^{3r} T_{21}^{3s} \cdot \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha} T_{12}^{\beta} T_{21}^{\gamma}\right) \\
&= \sum_{p,r,s}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^1_{prs} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{3p+\alpha} T_{12}^{3r+\beta} T_{21}^{3s+\gamma}, \text{ se } \alpha,\beta,\gamma \in 3\mathbb{Z},
\end{aligned}
$$

ou igual a 0 caso contrário.

Portanto, $s(f^1w^1) = f^1s(w^1)$ como queríamos. Por raciocínio análogo, podemos ver que $s(f^2w^2) = f^2s(w^2)$.

Provemos agora 3). Para tanto, calculemos f^2w^1.

$$
\begin{aligned}
f^2w^1 &= \sum_{\substack{k,l,m \\ m>0}} f^2_{klm} T_{12}^{3k} T_{21}^{3l} T_{22}^{3m} \cdot \sum_{\alpha,\beta,\gamma} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha} T_{12}^{\beta} T_{21}^{\gamma} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m \\ m>0}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{22}^{3m} \cdot T_{11}^{\alpha} T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k,l,m\\3m>\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{22}^{3m-\alpha} T_{22}^{\alpha} T_{11}^{\alpha} T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma} \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<3m\leqslant\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{22}^{3m} T_{11}^{3m} T_{11}^{\alpha-3m} T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m\\3m>\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{22}^{3m-\alpha} p_\alpha(T_{12},T_{21}) T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma} \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<3m\leqslant\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha,\beta,\gamma} T_{11}^{\alpha-3m} p_m(T_{12}^3,T_{21}^3) T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma},
\end{aligned}
$$

em que $T_{22}^{\alpha}T_{11}^{\alpha} := p_\alpha(T_{12},T_{21})$ e $T_{22}^{3m}T_{11}^{3m} := p_m(T_{12}^3,T_{21}^3)$ representam polinômios em T_{12},T_{21} e T_{12}^3,T_{21}^3 respectivamente, e que podem ser definidos por causa da equação $T_{22}T_{11} = 1_A - q^1T_{12}T_{21}$. Aplicando s em f^2w^1 temos que

$$
\begin{aligned}
s(f^2w^1) &= \sum_{\substack{k,l,m\\3m>\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha\beta\gamma} s(T_{22}^{3m-\alpha} p_\alpha(T_{12},T_{21}) T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma}) \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<3m\leqslant\alpha}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{\alpha\beta\gamma} s(T_{11}^{\alpha-3m} p_m(T_{12}^3,T_{21}^3) T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma}) \\
&= \sum_{\substack{k,l,m\\m>\lambda}} \sum_{3\lambda,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{3\lambda\beta\gamma} s(T_{22}^{3(m-\lambda)} p_{3\lambda}(T_{12},T_{21}) T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma}) \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<m\leqslant\lambda}} \sum_{3\lambda,3\mu,3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda3\mu3\nu} T_{11}^{3(\lambda-m)} p_m(T_{12}^3,T_{21}^3) T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m\\m>\lambda}} \sum_{3\lambda,\beta,\gamma} f^2_{klm} w^1_{3\lambda\beta\gamma} s(T_{22}^{3\lambda} T_{11}^{3\lambda} T_{12}^{3k+\beta} T_{21}^{3l+\gamma} T_{22}^{3(m-\lambda)}) \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<m\leqslant\lambda}} \sum_{3\lambda3\mu3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda3\mu3\nu} T_{11}^{3(\lambda-m)} p_m(T_{12}^3,T_{21}^3) T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m\\m>\lambda}} \sum_{3\lambda,3\mu,3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda3\mu3\nu} T_{22}^{3\lambda} T_{11}^{3\lambda} T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)} T_{22}^{3(m-\lambda)} \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m\\0<m\leqslant\lambda}} \sum_{3\lambda3\mu3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda3\mu3\nu} T_{11}^{3(\lambda-m)} T_{22}^{3m} T_{11}^{3m} T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)},
\end{aligned}
$$

pois s só está definida para potências múltiplas de 3, caso contrário, o morfismo s, aplicado nos elementos $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$ vale zero.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
f^2 s(w^1) &= \sum_{\substack{k,l,m \\ m>0}} f^2_{klm} T_{12}^{3k} T_{21}^{3l} T_{22}^{3m} \sum_{3\lambda,3\mu,3\nu} w^1_{3\lambda,3\mu,3\nu} T_{11}^{3\lambda} T_{12}^{3\mu} T_{21}^{3\nu} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m \\ m>0}} f^2_{klm} \sum_{3\lambda,3\mu,3\nu} w^1_{3\lambda,3\mu,3\nu} T_{22}^{3m} T_{11}^{3\lambda} T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)} \\
&= \sum_{\substack{k,l,m \\ m>\lambda}} \sum_{3\lambda,3\mu,3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda 3\mu 3\nu} T_{22}^{3(m-\lambda)} T_{22}^{3\lambda} T_{11}^{3\lambda} T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)} \\
&\quad + \sum_{\substack{k,l,m \\ 0<m\leqslant\lambda}} \sum_{3\lambda 3\mu 3\nu} f^2_{klm} w^1_{3\lambda 3\mu 3\nu} T_{22}^{3m} T_{11}^{3m} T_{11}^{3(\lambda-m)} T_{12}^{3(k+\mu)} T_{21}^{3(l+\nu)}.
\end{aligned}
$$

Então $s(f^2 w^1) = f^2 s(w^1)$ como queríamos. A demonstração da igualdade 2) é feita de modo análogo a 3).

Dada s, observamos que todas as condições do Lema 2.17 são satisfeitas e assim, concluímos que $C = A^{coA(F)}$.

■

Pela proposição anterior, vemos que $A(SL_q(2))$ é uma $A(F)$-extensão de Hopf-Galois. Ainda, com base na Proposição B.15 dada no Apêndice B temos o seguinte resultado:

Proposição 4.7 *$A(SL_q(2))$ é uma $A(F)$-extensão de Hopf-Galois fielmente plana de $Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))$.*

Demonstração: Mostraremos que $A(SL_q(2))$ atende as hipóteses da Proposição B.15. De fato, vemos que $A(SL_q(2))$ é $A(SL(2,\mathbb{C}))$-bimódulo, uma vez que

$$T_{11}^m T_{12}^n T_{21}^p = (T_{11}^{3i} T_{12}^{3j} T_{21} 3k) T_{11}^{\overline{m}} T_{12}^{\overline{n}} T_{21}^{\overline{p}},$$

em que $m = i + \overline{m}$, $n = i + \overline{n}$ e $p = i + \overline{p}$.

É finitamente gerado, pois

$$dim_{A(SL(2,\mathbb{C}))}(A(SL_q(2))) = dim_{\mathbb{C}}(A(F)) = 27.$$

E a projetividade segue do fato de que

$$\{T_{11}^m T_{12}^n T_{21}^p\}_{m,n,p\in\{0,1,2\}} \subseteq \{T_{11}^n T_{12}^m T_{21}^r, T_{12}^m T_{21}^r T_{22}^s : m,r,s \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\}$$

e portanto, é L.I.

Notemos que aqui, estamos considerando $R = A(SL(2,\mathbb{C}))$ e $P = A(SL_q(2))$.

$\blacksquare$

Por fim, vemos que a sequência exata dada em 4.5 satisfaz as condições da Definição 4.3

Corolário 4.8 *A sequência*

$$A(SL(2,\mathbb{C})) \xrightarrow{Fr} A(SL_q(2)) \xrightarrow{\pi} A(F)$$

é uma sequência estritamente exata de álgebras de Hopf.

Demonstração: Como $Fr(A(SL(2,\mathbb{C}))) \subseteq Z(A(SL_q(2)))$, segue que $\sum p_{(1)} Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))S(p_{(2)}) \bigcup S(p_{(1)})Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))p_{(2)}$ está contido em $Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))$, para todo $p \in A(SL_q(2))$.

Logo, $Fr(A(SL(2,\mathbb{C})))$ é uma subálgebra normal de $A(SL_q(2))$ e portanto a sequência de álgebras de Hopf 4.5 é estritamente exata.

$\blacksquare$

4.5 O Quociente de $A(SL_q(2))$ como Extensão de Hopf-Galois Fendida

Nesta seção, provamos que o quociente $A(SL_q(2))/\langle T_{21}\rangle$, ao qual denotamos por A_+, de $A(SL_q(2))$, pode ser visto como uma extensão de Hopf-Galois fendida. O foco principal será determinar explicitamente o morfismo fenda e consequentemente, conseguimos determinar uma estrutura de produto cruzado sobre A_+, exibindo explicitamente o cociclo e a ação do cociclo.

As relações definidoras de A_+ são dadas por:

$$T_{11}T_{12} = qT_{12}T_{11},\ T_{12}T_{22} = qT_{22}T_{12},\ T_{11}T_{22} = T_{22}T_{11} = 1_{A_+}. \quad (4.7)$$

Iniciamos vendo alguns resultados da seção anterior que continuam sendo válidos quando quocientamos o grupo quântico $A(SL_q(2))$ por $\langle T_{21}\rangle$.

Primeiramente, podemos definir uma base sobre A_+, a saber:

Proposição 4.9 *O conjunto* $\{T_{11}^p T_{12}^r, T_{22}^k T_{12}^l\}_{k,l,p,r\in\mathbb{Z},l,r\geqslant 0}$ *é uma base de* A_+.

Demonstração: Assim como no Lema 4.1, usaremos o Lema do Diamante dado no Apêndice C. Defina $\mathcal{X} = \{T_{11}, T_{12}, T_{22}\}$ e coloquemos as relações definidoras de A_+ no sistema de reduções

$$S = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\},$$

em que $\sigma_1 = (T_{11}T_{22}, 1_{A_+})$, $\sigma_2 = (T_{22}T_{11}, 1_{A_+})$, $\sigma_3 = (T_{12}T_{11}, q^{-1}T_{11}T_{12})$ e $\sigma_4 = (T_{12}T_{22}, qT_{22}T_{12})$. Fazendo com que a álgebra A_+ coincida com a álgebra R dada no respectivo lema.

Notamos que $\beta = \{T_{11}^p T_{12}^r, T_{22}^k T_{12}^l\}$ é o conjunto dos polinômios irredutíveis sobre S e portanto, uma base para $\mathbb{C}\langle\mathcal{X}\rangle_{Irr}$. Ainda, sobre $\mathcal{X}$ definimos uma ordem dada por

$$T_{11} \preccurlyeq T_{22} \preccurlyeq T_{12}$$

e para monômios $A,\ B \in \ \langle\mathcal{X}\rangle$, dizemos que $A < B$ se o comprimento de A é menor que o de B $(l(A) < l(B))$, e no caso em que $l(A) = l(B)$, usamos a ordem lexográfica em $\mathcal{X}^{l(A)}$.

Essa ordem é uma ordem total de semigrupos, compatível com S e satisfazendo a condição de cadeia descendente.

Resta mostrarmos que todas as ambiguidades de S dadas abaixo são resolvíveis:

$$1)\ \ (\sigma_3, \sigma_1, T_{12}, T_{11}, T_{22}) \qquad\qquad 2)\ \ (\sigma_4, \sigma_2, T_{12}, T_{22}, T_{11})$$

Para tanto, temos de ver se existem $r_1,\ r_1',\ r_2,\ r_2'$ tais que

$$r_1(q^{-1}T_{11}T_{12}T_{22}) = r_1'(T_{12}1_{A_+}) \qquad r_2(qT_{22}T_{12}T_{11}) = r_2'(T_{12}1_{A_+})$$

De fato, tomando $r_1 = r_{T_{11}\sigma_4 1_{A_+}}$, r_1' o morfismo identidade, $r_2 = r_{T_{22}\sigma_3 1_{A_+}}$ e r_2' novamente o morfismo identidade, vemos que as ambiguidades dadas acima são resolvíveis. E então, pelo Lema do Diamante, temos que β é uma base para A_+.

$\blacksquare$

Com isso, vemos que a comultiplicação Δ nos elementos da base de A_+ é menos complicada do que em $A(SL_q(2))$ e dada através das seguintes fórmulas:

- $\Delta(T_{11}^pT_{12}^r) = \sum_{\mu=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ \mu \end{pmatrix} T_{11}^{p+\mu}T_{12}^{r-\mu} \otimes T_{11}^{p}T_{12}^{\mu}T_{22}^{r-\mu}$;

- $\Delta(T_{22}^kT_{12}^l) = \sum_{\mu=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ \mu \end{pmatrix} q^{\mu(l-\mu)}T_{22}^{k}T_{11}^{\mu}T_{12}^{l-\mu} \otimes T_{22}^{k+l-\mu}T_{12}^{\mu}$.

  Em que $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $p, r, l \in \mathbb{Z}_+$ e novamente adotamos a não simplificação das fórmulas a fim de facilitar nossos cálculos futuros com essas expressões.

Assim como antes, queremos construir uma sequência exata de álgebras de Hopf, porém, $P = A_+ = \langle T_{21}\rangle$, $B = B_+ := A(SL(2,\mathbb{C}))/\langle \overline{T}_{12}\rangle$ e $H = H_+ := A_+/\langle T_{ij} - \delta_{ij}\rangle_{i=1,j\in\{1,2\}} = A(F)/\langle \widetilde{T}_{21}\rangle$. Para tanto, consideramos novamente a idéia do morfismo de Frobenius, definindo,

$$\begin{array}{rccc} Fr_+ : & B_+ & \to & A_+ \\ & \overline{T}_{ij} & \mapsto & T_{ij}^3 \end{array}.$$

Notamos que as propriedades vistas na Seção 4.4 para o morfismo de Frobenius continuam válidas, logo, a sequência

$$B_+ \xrightarrow{Fr_+} A(SL_q(2)) \xrightarrow{\pi_+} H_+.$$

é uma sequência exata de álgebras de Hopf.

Analogamente ao que foi demonstrado na Proposição 4.4, podemos definir uma base para H_+ à partir da base definida para A_+.

Salientamos que o conjunto $\{\widetilde{T}_{22}^k\widetilde{T}_{12}^l\}$ pode ser reescrito como $\{\widetilde{T}_{11}^{2k}\widetilde{T}_{12}^l\}$ uma vez que $\widetilde{T}_{22} = \widetilde{T}_{11}^2$, pela Proposição 4.4. Na verdade, a proposição nos diz que $\widetilde{T}_{22} = \widetilde{T}_{11}^2(1_{A(F)} + \widetilde{T}_{12}\widetilde{T}_{21})$ e assim, tomando o quociente por $\widetilde{T}_{21}$, temos de fato o proposto acima. Assim,

Proposição 4.10 *O conjunto* $\{\widetilde{T}_{11}^p, \widetilde{T}_{12}^r\}_{p,r\in\{0,1,2\}}$ *é uma base de* H_+.

A demonstração deste fato segue tal e qual a demonstração da Proposição 4.4 e portanto, a omitiremos.

Vemos ainda que a coação de H_+ em A_+ é dada de modo usual pelo morfismo

$$\begin{array}{rccc} \rho: & A_+ & \to & A_+ \otimes H_+ \\ & T_{ij} & \mapsto & (I_{A_+} \otimes \pi_+)\Delta(T_{ij}) \end{array}$$

e é definida na base pelas seguintes fórmulas.

- $\rho(T_{11}^p T_{12}^r) = \sum\limits_{\mu=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ \mu \end{pmatrix} q^{-\mu(2r-2\mu)} T_{11}^{p+\mu} T_{12}^{r-\mu} \otimes \widetilde{T}_{11}^{2r+p-2\mu} \widetilde{T}_{12}^{\mu}$;

- $\rho(T_{22}^k T_{12}^l) = \sum\limits_{\mu=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ \mu \end{pmatrix} q^{\mu(l-\mu)} T_{22}^k T_{11}^{\mu} T_{12}^{l-\mu} \otimes \widetilde{T}_{11}^{2(k+l-\mu)} \widetilde{T}_{12}^{\mu}$.

  Em que $k \in \mathbb{Z}_+^*$ e $p, r, l \in \mathbb{Z}_+$.

Proposição 4.11 *A_+ é uma H_+-extensão de Hopf-Galois de $FR_+(B_+)$.*

Demonstração: Assim como na Proposição 4.10, a demonstração deste fato tem seu análogo, Proposição 4.6, na Seção 4.4. Porém, por ser um resultado importante, indicaremos o caminho a seguir sem apresentarmos os pormenores de cálculos.

Primeiro, vemos que $Fr_+(B_+)$ é uma subálgebra de $A_+^{coH_+}$. Então, podemos definir o morfismo

$$\begin{array}{rccc} \overline{can}: & A_+ \otimes_{Fr_+(B_+)} A_+ & \to & A_+ \otimes H_+ \\ & T_{ij} \otimes T_{kl} & \mapsto & (T_{ij} \otimes 1_{H_+})\rho(T_{kl}) \end{array}, \text{ para todo } i, j, k, l \in \{1, 2\}.$$

Por fim, vemos que existe um morfismo unital, C-linear à direita, $s : A \to C$ dado por

$$s(T_{11}^pT_{12}^r) = \begin{cases} T_{11}^pT_{12}^r & , \text{ se } p, r \in 3\mathbb{Z}; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$s(T_{22}^kT_{12}^l) = \begin{cases} T_{22}^kT_{12}^l & , \text{ se } k, l \in 3\mathbb{Z}; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $p, r, k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > 0$.

Assim, $Fr_+(B_+) = A_+^{coH_+}$ e portanto, o morfismo $\overline{can}$ dado acima é o morfismo que buscamos da definição de extensões de Hopf-Galois.

■

Proposição 4.12 *A_+ é uma H_+-extensão de Hopf-Galois fendida de $Fr_+(B_+)$.*

Demonstração: A idéia da demonstração é construir um morfismo fenda, ou seja, um morfismo de H_+ para A_+ inversível por produto de convolução. Para tanto, faremos uso de alguns resultados dados na Seção 2.3.

Definimos a família de morfismos

$$\begin{array}{rccl} \psi_v : & A_+ & \to & Fr_+(B_+) \\ & T_{11}^pT_{12}^r & \mapsto & T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}\delta_{0\tilde{r}}T_{11}^{3v(\tilde{p})} \\ & T_{22}^kT_{12}^l & \mapsto & T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}\delta_{0\tilde{l}}T_{22}^{3v(\tilde{k})} \end{array},$$

em que $v : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{Z}$ é uma função qualquer, com $v(0) = 0$, $p = 3i + \tilde{p}$, $r = 3j + \tilde{r}$, $k = 3s + \tilde{k}$ e $l = 3t + \tilde{l}$.

Claramente, ψ_v é um morfismo unital, pois

$$\psi_v(1_{A_+}) = \delta_{00} T_{11}^{3v(0)} = 1_{Fr_+(B_+)}.$$

E também é $Fr_+(B_+)$-linear à esquerda pela própria definição.

Resta vermos que é inversível por produto de convolução. De fato, definimos

$$\begin{array}{cccc} \overline{\psi}_v & A_+ & \to & Fr_+(B_+) \\ & T_{11}^p T_{12}^r & \mapsto & \delta_{0\tilde{\tilde{r}}} T_{11}^{-3v(\tilde{p})} S(T_{11}^{3i} T_{12}^{3j}) \\ & T_{22}^k T_{12}^l & \mapsto & \delta_{0\tilde{l}} T_{22}^{-3v(\tilde{k})} S(T_{22}^{3s} T_{12}^{3t}) \end{array},$$

onde v, p, r, k e l são definidos como acima.

Os detalhes da demonstração de que $\overline{\psi}_v * \psi_v = \eta \circ \varepsilon = \psi_v * \overline{\psi}_v$ são dados no Apêndice D.

Então, pelo Corolário 2.37, existe uma família de morfismos fenda $\gamma_v : H_+ \to A_+$. A saber,

$$\gamma_v(\widetilde{T}_{11}^p \widetilde{T}_{12}^r) := \overline{\psi}(T_{11}^{p+r}) T_{11}^p T_{12}^r = T_{11}^{-3([p+r]_1 + v([p+r]_2)) + p} T_{12}^r,$$

em que $3[p+r]_1 + [p+r]_2 = p + r$, $0 \leqslant [p+r]_2 < 3$.

■

Como A_+ é uma H_+-extensão de Hopf-Galois fendida de $Fr_+(B_+)$, podemos pensar na estrutura de produto cruzado existente, ou seja, $A_+ \simeq Fr_+(B_+) \#_{\sigma_\gamma} H_+$, onde o cociclo σ_γ é dado pela aplicação do Lema 2.23. Calculemos explicitamente o morfismo σ_γ.

Primeiramente, tomemos uma função $v : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as condições do teorema anterior e tal que $v(1) = 0$ e $v(2) = 1$. Assim, o morfismo fenda, calculado em $\{T_{11}^p T_{12}^r\}_{p,r \in \{0,1,2\}}$, que é uma

$FR_+(B_+)$-base de A_+, é dado por

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\gamma(1_{H_+}) & = & 1_{A_+} & \gamma(\widetilde{T}_{12}) & = & T_{12} & \gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}) & = & T_{11}^{-1}T_{12} \\
\gamma(\widetilde{T}_{11}) & = & T_{11} & \gamma(\widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-3}T_{12}^2 & \gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-2}T_{12}^2 \\
\gamma(\widetilde{T}_{11}^2) & = & T_{11}^{-1} & \gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}) & = & T_{11}^{-2}T_{12} & \gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-1}T_{12}^2
\end{array}$$

Assim, pelo Lema 2.23, definimos o cociclo

$$\sigma_\gamma : H_+ \otimes H_+ \to Fr_+(B_+), \text{ em que:}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^p\widetilde{T}_{12}^r \otimes \widetilde{T}_{11}^k\widetilde{T}_{12}^l) := {} & T_{11}^{-3([p+r]_1+[k+l]_1+v([p+r]_2)+v([k+l]_2))+p+k} \\ & T_{12}^{r+l}\overline{\gamma}(\tilde{T_{11}}^{p+k})q^{(3([r+l]_1+v([r+l]_2))-k)r},\end{aligned}$$

se $r+l=0$ ou $r+l=3$ e

$$\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^p\widetilde{T}_{12}^r \otimes \widetilde{T}_{11}^k\widetilde{T}_{12}^l) := (\varepsilon\otimes\varepsilon)(\widetilde{T}_{11}^p\widetilde{T}_{12}^r \otimes \widetilde{T}_{11}^k\widetilde{T}_{12}^l),$$

se $r+l \neq 0$ e 3.

Ou ainda, de forma mais explícita,

$$\begin{array}{rclrcl}
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}\otimes\widetilde{T}_{11}) & = & T_{11}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2\otimes\widetilde{T}_{11}^2) & = & T_{11}^{-3} \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2) & = & qT_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}) & = & qT_{11}^{-6}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2) & = & qT_{11}^{-3}T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2) & = & qT_{11}^{-3}T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}) & = & qT_{11}^{-3}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}\widetilde{T}_{12}) & = & qT_{11}^{-3}T_{12}^3 & \sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}^2\otimes\widetilde{T}_{11}^2\widetilde{T}_{12}) & = & q^2T_{11}^{-3}T_{12}^3.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12} \otimes \widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-3} T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{12}^2 \otimes \widetilde{T}_{12}) & = & T_{11}^{-3} T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11} \widetilde{T}_{12} \otimes \widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-6} T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2 \widetilde{T}_{12} \otimes \widetilde{T}_{12}^2) & = & T_{11}^{-3} T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11} \widetilde{T}_{12}^2 \otimes \widetilde{T}_{12}) & = & T_{11}^{-3} T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma(\widetilde{T}_{11}^2 \widetilde{T}_{12}^2 \otimes \widetilde{T}_{12}) & = & T_{12}^3 \\
\sigma_\gamma|_{\text{outros elementos da base}} & = & \varepsilon \otimes \varepsilon.
\end{array}
$$

A ação do cociclo é a trivial, uma vez que $Fr_+(B_+)$ está contida no centro de A_+. Portanto, vemos que vale a seguinte proposição.

Proposição 4.13 *A_+ é isomorfo, como comódulo álgebra, ao produto cruzado de $Fr_+(B_+)$ com H_+, ou seja, $A_+ \simeq Fr_+(B_+)\#_{\sigma_\gamma} H_+$, em que σ_γ é o cociclo.*

Mais explicitamente, podemos dizer que a estrutura de álgebra sobre $Fr_+(B_+) \otimes H_+$ coincide com a estrutura de álgebra de A_+ e pode ser dada pela fórmula

$$(x \otimes h) \cdot (y \otimes l) = xy\sigma_\gamma(\tilde{h}_{(1)} \otimes \tilde{l}_{(1)}) \otimes h_{(2)} l_{(2)}.$$

Considerações Finais

Quando estudamos uma teoria dentro da Álgebra, nossa ideia, além de aprendermos sobre ela, é buscar associações pertinentes com outros campos de estudo. Ou ainda, sabermos se ao definirmos certas propriedades sobre uma estrutura, podemos obter resultados equivalentes para um caso mais geral.

Porém, vemos que o Capítulo 3 vai no contrafluxo desta idéia, uma vez que definimos os conceitos de extensão para um caso mais geral (biálgebras), mas acabamos caindo novamente no conceito de álgebras de Hopf, desde que as condições do Teorema 3.5 sejam satisfeitas, o que torna este capítulo deveras interessante.

Um outro fator interessante a ser comentado é a escolha do grupo quântico $A(SL_q(2))$. Salientamos que geralmente, quando se trata do estudo de extensões, principalmente extensões de Hopf-Galois, os exemplos que usualmente aparecem são os de demonstração trivial, assim, tomar a estrutura de $A(SL_q(2))$ como álgebra de Hopf, e a partir daí tentar construir todas as relações de extensões que podemos obter, sem contar na construção explícita da estrutura de produto cruzado. Cabe salientarmos que, embora não tenha sido feito no trabalho, sobre o grupo quântico $A(SL_q(2))$ podemos definir uma estrutura de biproduto cruzado e também, dado um quociente pertinente, podemos calcular integrais sobre $A(F)$.

Por fim, fica a proposta de estudos futuros, uma vez que, tanto podemos generalizar os resultados para k um anel comutativo com unidade ao invés de corpo. Ou ainda, podemos pensar no uso de estruturas diferentes da álgebra de Hopf.

Apêndice A

Álgebras e Coálgebras

A.1 Álgebras

Seja k um corpo. Assumindo conhecidos os resultados básicos sobre produto tensorial, iniciamos este capítulo definindo a noção clássica e a noção por diagramas de álgebra e vemos que as definições são equivalentes.

Definição A.1 *Uma k-álgebra unital A é um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e para todo $\alpha \in k$ e todo $a, b \in A$ temos:*

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b)$$

em que ab representa a multiplicação no anel A dos elementos a e b.

Antes de darmos proseguimento ao trabalho, lembramos que $\phi : k \to A$ definida por $\phi(\alpha) = \alpha \cdot 1_A$ é um monomorfismo de anéis e é k-linear.

Definição A.2 *Uma k-álgebra é uma tripla $(A,\ \mu,\ \eta)$, em que A é um k-espaço vetorial, $\mu : A \otimes A \to A$ e $\eta : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes I_A"] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes \eta"'] \\
 & A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
$$

em que I_A é a identidade em A e os isomorfismos do segundo diagrama são os isomorfismos canônicos dados por:

$$
\begin{aligned}
\psi : A &\longrightarrow A \otimes k \\
a &\longmapsto a \otimes 1_k
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\varphi : A &\longrightarrow k \otimes A \\
a &\longmapsto 1_k \otimes a
\end{aligned}
$$

Chamamos μ de multiplicação e η de unidade. O primeiro diagrama representa a associatividade da álgebra e é a mesma coisa que:

$$\mu \circ (I_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes I_A) \tag{A.1}$$

Já o segundo diagrama nos fornece

$$\mu \circ (\eta \otimes I_A) \circ \psi = I_A \quad e \quad \mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \varphi = I_A. \tag{A.2}$$

Vejamos que as definições de álgebra dadas acima são equivalentes.

Seja A uma álgebra como na Definição $A.1$. Claramente, $M : A \times A \to A$ dada por $M(a, b) = ab$ é uma aplicação bilinear.

Portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única $\mu : A \otimes A \to A$ k-linear tal que $\mu(a \otimes b) = M(a, b) = ab$. Definamos $\eta = \phi$, em que ϕ é a aplicação k-linear dada abaixo da Definição A.1. Verifiquemos que os diagramas da Definição A.2 comutam. Sejam $a,\ b,\ c \in A$, logo:

$$(\mu \circ (I_A \otimes \mu))(a \otimes b \otimes c) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c)) = \mu(a \otimes bc) = a(bc).$$

Do mesmo modo,

$$(\mu \circ (\mu \otimes I_A))(a \otimes b \otimes c) = \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu(ab \otimes c) = (ab)c.$$

Portanto, $\mu \circ (\mu \otimes I_A) = \mu \circ (I_A \otimes \mu)$, pois $a(bc) = (ab)c$, pela associatividade do anel. Ainda, para todo $a \in A$,

$$(\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \psi)(a) = \mu(a \otimes \eta(1_k)) = a\eta(1_k) = a.$$

Analagomente, mostramos que $(\mu \circ (\eta \otimes I_A) \circ \varphi) = I_A$. Assim, os diagramas comutam, e segue que (A, μ, η) é uma álgebra pela Definição $A.2$.

Por outro lado, seja (A, μ, η) uma álgebra pela Definição A.2. Então A é um k-espaço vetorial. Precisamos definir uma estrutura de anel em A. De fato, sejam $a,\ b \in A$, definimos a multiplicação $ab = \mu(a \otimes b)$. Como $\mu \circ (\mu \circ I_A) = \mu(I_A \circ \mu)$, temos que a multiplicação definida acima é associativa, e sendo μ linear, para todo $a,\ b,\ c \in A$ temos:

$$(a+b)c = \mu((a+b) \otimes c) = \mu(a \otimes c + b \otimes c) = \mu(a \otimes c) + \mu(b \otimes c) = ab + bc$$

Do mesmo modo, vemos que $a(b+c) = ab+ac$. Ainda, como μ é k-linear e o produto tensorial é sobre k, é fácil vermos que para todo $\alpha \in k$,

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b).$$

Por fim, como $\mu \circ (I_A \otimes \eta) \circ \varphi = I_A$, segue que $\eta(1_k) = 1_A$ e portanto A é uma álgebra pela Definição A.1.

Este resultado nos garante que é indiferente tratarmos uma álgebra pela Definição A.1 ou pela Definição A.2.

Assim, quando nos referimos a uma k-álgebra (A, μ, η), diremos somente a álgebra A.

Exemplo A.3 *Todo corpo k é uma álgebra sobre si mesmo.*

Exemplo A.4 (Álgebra de Funções) *Sejam k um corpo e $X \neq \emptyset$ um conjunto. Defina $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to k : f \text{ é função}\}$. Então $\mathcal{F}(X)$ é uma álgebra com o produto, multiplicação por escalar e soma ponto a ponto.*

Exemplo A.5 (Álgebra Produto Tensorial) *Sejam A e B k-álgebras e $\sigma_{AB} : A \otimes B \to B \otimes A$ o isomorfismo denominado flip, definido por $\sigma_{AB}(a \otimes b) = b \otimes a$. Notemos que o índice do morfismo flip denota as álgebras que estão sendo reposicionadas no produto tensorial. Isto fica mais evidente no exemplo abaixo:*

$$\begin{aligned} \sigma_{24} : A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4 \quad &\longrightarrow \quad A_1 \otimes A_4 \otimes A_3 \otimes A_2 \\ a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 \quad &\longmapsto \quad a_1 \otimes a_4 \otimes a_3 \otimes a_2, \end{aligned}$$

em que A_1, A_2, A_3 e A_4 são espaços vetoriais sobre k. Assim, podemos definir uma estrutura de álgebra ao k-espaço vetorial $A \otimes B$ tomando

$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ \sigma_{23}$ *e unidade* $\eta_{A\otimes B}(\lambda) = \lambda(1_A \otimes 1_B)$*. Esta álgebra é chamada álgebra produto tensorial.*

Exemplo A.6 (Álgebra de grupo) *Seja G um grupo com operação $*$. A álgebra de grupo kG é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de G com coeficientes em k, ou seja, seus elementos são somas finitas da forma*

$$\sum_{g\in G} a_g g,$$

onde assumimos que $a_g = 0$ a menos de um número finito de $g \in G$. Então é fácil ver que kG é uma álgebra sobre k com respeito a operação $+$ dada por

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g,$$

produto por escalar dado por

$$a \sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} (a a_g) g,$$

e multiplicação dada por

$$(a_g g) * (b_g h) = (a_g b_h) gh.$$

Segue desta definição que a unidade da álgebra kG é o elemento neutro do grupo.

Exemplo A.7 (Álgebra oposta A^{op}) *Seja A uma álgebra. Definimos a função $\mu^{op} = \mu \circ \sigma$, em que σ é o morfismo definido no exemplo A.5. Claramente, (A, μ^{op}, η) é uma álgebra.*

Assim como a associatividade, podemos estabelecer a noção de comutatividade para uma álgebra via diagramas, a saber:

Definição A.8 *Uma álgebra* (A, μ, η) *é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\mu \circ \sigma = \mu$, *em que* $\sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ *é função flip.*

Definição A.9 *Seja* A *uma álgebra. Um subespaço vetorial* $B \subseteq A$ *é dito uma subálgebra se* $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.

Definição A.10 *Seja* A *uma álgebra. Um subespaço vetorial* $I \subseteq A$ *é chamado:*

(i) Um ideal à esquerda (à direita) se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ (respectivamente $\mu(I \otimes A) \subseteq I$);

(ii) Um ideal se $\mu(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I$.

Definição A.11 *Sejam* (A, μ_A, η_A) *e* (B, μ_B, η_B) *álgebras. Dizemos que* $f : A \to B$ *é um morfismo de álgebras se* f *é um morfismo de anéis e de espaços vetoriais tal que* $f(1_A) = 1_B$. *Ou , utilizando diagramas, dizemos que uma função* k*-linear* $f : A \to B$ *é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& k \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Antes de continuarmos a estruturar o conceito de álgebras, fazemos menção a um lema que aparece na teoria de produto tensorial para espaços vetoriais, e que utilizamos para demonstrar alguns resultados. Ao leitor interessado em sua demonstração, indicamos [9].

Lema A.12 *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma função linear. Então $ker(T \otimes T) = ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$.*

Observamos que se $f : A \to B$ um morfismo de álgebras, então $Im(f)$ é uma subálgebra de B e $\ker(f)$ é um ideal de A.

De fato, como $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$, temos:

$$\begin{aligned}
\mu_B(Im(f) \otimes Im(f)) &= \mu_B(f(A) \otimes f(A)) \\
&= (\mu_B \circ (f \otimes f))(A \otimes A) \\
&= (f \circ \mu_A)(A \otimes A) \\
&= f(\mu_A(A \otimes A)) \subseteq f(A) = Im(f),
\end{aligned}$$

o que nos mostra que $Im(f)$ é uma subálgebra de B.

Para mostrarmos que $\ker(f)$ é um ideal de A, notemos que $(\mu_B \circ (f \otimes f))(\ker(f \otimes f)) = \{0\}$. e como f é um morfismo de álgebras, temos que $(f \circ \mu_A)(\ker(f \otimes f)) = \{0\}$. Portanto, $\mu_A(\ker(f \otimes f)) \subseteq \ker(f)$ e segue pelo Lema A.12 que $\mu_A(\ker(f) \otimes A + A \otimes \ker(f)) \subseteq \ker(f)$. Concluindo que $\ker(f)$ é um ideal de A.

Proposição A.13 *Sejam A uma álgebra, I um ideal de A e $\pi : A \to A/I$ a aplicação canônica de espaços vetoriais. Então:*

(i) Existe uma única estrutura de álgebra em A/I tal que π é um morfismo de álgebras;

(ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras tal que $I \subseteq$

$\ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras $\bar{f} : A/I \to B$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$.

Demonstração: (i) Como $\ker(\pi) = I$ e I é ideal de A, pelo Lema A.12, temos que $\ker(\pi \otimes \pi) \subset \ker(\pi \circ \mu)$ e, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única aplicação linear $\overline{\mu} : A/I \otimes A/I \to A/I$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\pi\circ\mu"] & A/I \otimes A/I \arrow[d, "\overline{\mu}"] \\
A \arrow[r, "\pi"'] & A/I
\end{tikzcd} \tag{A.3}$$

Ou seja, $\overline{\mu}$ é tal que $\overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{b}) = \pi(\mu(a \otimes b)) = \overline{ab}$, para todo $\overline{a}, \overline{b} \in A/I \otimes A/I$. Notamos que $\overline{a} = a + I = \pi(a)$, para todo $a \in A$. Vejamos que vale a comutatividade dos diagramas que definem uma álgebra. Sejam $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in A/I$.

$$\begin{aligned}
(\overline{\mu} \circ (id \otimes \overline{\mu}))(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}) &= \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{(bc)}) \\
&= \overline{a(bc)} \\
&= \overline{(ab)c} \\
&= \overline{\mu}(\overline{(ab)} \otimes \overline{c}) \\
&= (\overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes id))(\overline{a} \otimes \overline{b} \otimes \overline{c}).
\end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema do Homomorfismo, existe uma única função linear $\overline{\eta} : k \to A/I$ tal que $\pi \circ \eta = \overline{\eta}$. Então, para todo $\overline{a} \in A/I$, temos:

$$
\begin{aligned}
(\overline{\mu} \circ (id \otimes \overline{\eta}) \circ \psi)(\overline{a}) &= \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{\eta}(1_k)) = \overline{\mu}(\overline{a} \otimes \overline{\eta(1_k)}) \\
&= \pi(\mu(a \otimes \eta(1_k))) = \pi(a) = \overline{a}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, vemos que $(\overline{\mu} \circ (\overline{\eta} \otimes id) \circ \varphi)(\overline{a}) = \overline{a}$. Portanto, $(A/I, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ satisfaz a Definição A.2 e é uma álgebra. Pelo diagrama A.4, vemos que π é um morfismo de álgebras.

(ii) Como $I \subseteq \ker(f)$, novamente pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única aplicação linear $\overline{f} : A/I \to B$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Vejamos que f é morfismo de álgebras. Sejam $\overline{a}, \overline{b} \in A/I$, logo:

$$
\begin{aligned}
(\overline{f} \circ \overline{\mu})(\overline{a} \otimes \overline{b}) &= \overline{f}(\pi(\mu(a \otimes b)) &&= f(\mu_A(a \otimes b)) \\
&= (f \circ \mu_A)(a \otimes b) &&= (\mu_B \circ (f \otimes f))(a \otimes b) \\
&= \mu_B(f(a) \otimes f(b)) &&= \mu_B(\overline{f}(\overline{a}) \otimes \overline{f}(\overline{b})) \\
&= (\mu_B \circ (\overline{f} \otimes \overline{f})(\overline{a} \otimes \overline{b}),
\end{aligned}
$$

e, para todo $\alpha \in k$ temos

$$(\overline{f} \circ \overline{\eta})(\alpha) = \overline{f}(\pi(\eta_A(\alpha))) = f(\eta_A(\alpha)) = \eta_B(\alpha).$$

Portanto, $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras.

■

Corolário A.14 *Sejam A e B álgebras e $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Então $\overline{f} : A/\ker(f) \to Im(f)$ é um isomorfismo.*

Definição A.15 *Seja X um conjunto. Uma álgebra livre é um par $(\mathfrak{L}, \iota)$ em que $\mathfrak{L}$ é uma álgebra e $\iota : X \to \mathfrak{L}$ uma função tal que para* *qualquer álgebra A e toda função $f : X \to A$, existe uma única função $\bar{f} : \mathfrak{L} \to A$ que é morfismo de álgebras tal que $\bar{f} \circ \iota = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{L} \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Teorema A.16 *Existe uma álgebra como na Definição A.15 e ela é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Seja X um conjunto qualquer. Definimos uma palavra de tamanho n em X como sendo uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$.

Para facilitarmos nossa escrita, denotamos uma palavra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $x_1x_2x_3 \ldots x_n$.

Uma concatenação (denotada por $\cdot$) de duas palavras $x_1x_2 \ldots x_n$ e $y_1y_2 \ldots y_m$ é dada por uma nova palavra $x_1x_2 \ldots x_ny_1y_2 \ldots y_m$ de tamanho $n+m$, ou seja, $(x_1x_2 \ldots x_n) \cdot (y_1y_2 \ldots y_m) = x_1x_2 \ldots x_ny_1y_2 \ldots y_m$.

Ainda, definimos que se $n = 0$, então nossa palavra será a palavra vazia e a denotamos por $\bar{\emptyset}$. A concatenação da palavra vazia por uma palavra qualquer é dada por

$$(x_1x_2 \ldots x_n) \cdot \bar{\emptyset} = \bar{\emptyset} \cdot (x_1x_2 \ldots x_n) = x_1x_2 \ldots x_n.$$

Denotamos por $k\{X\}$ o espaço vetorial gerado por todas as palavras de tamanho arbitrário. Para cada palavra $x_1 \ldots x_n$ podemos definir uma transformação linear $\mu_{x_1 \ldots x_n} : k\{X\} \to k\{X\}$ que nos elementos da base é dada exatamente pela concatenação, ou seja, $\mu_{x_1 \ldots x_n}(y_1 \ldots y_m) = (x_1 \ldots x_n) \cdot (y_1 \ldots y_m) = x_1x_2 \ldots x_ny_1y_2 \ldots y_m$.

Consideremos

$$\begin{array}{rccl} \bar{\mu}: & k\{X\} & \rightarrow & \mathcal{L}(k\{X\}, k\{X\}) \\ & (x_1 \dots x_n) & \mapsto & \mu_{x_1 \dots x_n}, \end{array}$$

em que $\mathcal{L}(k\{X\}, k\{X\}) = \{T : k\{X\} \rightarrow k\{X\} : T$ é transformação linear$\}$.

Assim, definimos a multiplicação em $k\{X\}$ como sendo

$$\begin{array}{rccl} \mu: & k\{X\} \times k\{X\} & \rightarrow & k\{X\} \\ & (x, y) & \mapsto & \bar{\mu}(x)(y), \end{array}$$

para cada $x, y \in k\{X\}$.

Notamos que a multiplicação é bilinear e associativa por construção, uma vez que a concatenação é associativa, e, além disso, temos que a palavra vazia representa a unidade relativa a esta multiplicação. Temos também $i : X \rightarrow k\{X\}$ inclusão canônica, em que cada elemento de X é visto como uma palavra de uma única letra em $k\{X\}$.

Mostremos que $(k\{X\}, i)$ satisfaz a Definição A.15 e é única a menos de isomorfismo.

De fato, sejam A uma álgebra e $f : X \rightarrow A$ uma função. Definimos $\bar{f} : k\{X\} \rightarrow A$ sobre as palavras por $\bar{f}(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$, onde no lado direito da igualdade estamos considerando o produto na álgebra A. Definimos ainda $\bar{f}(\bar{\emptyset}) = 1_A$. Para finalizarmos, estendemos linearmente $\bar{f}$ à $k\{X\}$ e claramente, $\bar{f} \circ i = f$.

Vejamos que $\bar{f}$ é única. Suponhamos que exista o morfismo de álgebras $g : k\{X\} \rightarrow A$ tal que $g \circ i = f$. Então, para todo elemento

$p = \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, temos:

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}\right) &= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_n}) \\
&= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} (g \circ i)(x_{i_1}) \ldots (g \circ i)(x_{i_n}) \\
&= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_n}).
\end{aligned}
$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\bar{f}\left(\sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}\right) &= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} \overline{f}(x_{i_1}) \cdots \overline{f} x_{i_n} \\
&= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} (\bar{f} \circ i)(x_{i_1}) \ldots (\bar{f} \circ i)(x_{i_n}) \\
&= \sum_i \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_n}).
\end{aligned}
$$

Logo, $\bar{f} = g$. Portanto, $(k\{X\}, i)$ é uma álgebra livre.

Para mostrarmos a unicidade da álgebra livre, seja $(\mathcal{M}, h)$ como na definição A.15.

Então por um lado temos $\overline{i} \circ h = i$, ou seja,

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[d, dashed, "\overline{i}"] \\
X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "i"'] & k\{X\}
\end{tikzcd}
$$

Por outro lado temos $\overline{h} \circ i = h$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & k\{X\} \arrow[d, dashed, "\overline{h}"] \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "h"'] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

Portanto, $(\bar{h} \circ \bar{i}) \circ h = h$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[d, dashed, "\bar{h}\circ\bar{i}"] \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "h"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Porém, este diagrama também comuta com a função identidade $I_{\mathcal{M}}$. Logo pela unicidade das funções, $\bar{h} \circ \bar{i} = I_{\mathcal{M}}$. Analogamente mostra-se que $\bar{i} \circ \bar{h} = I_{k\{X\}}$.

$\blacksquare$

Teorema A.17 *Seja A uma álgebra. Então A é o quociente de uma álgebra livre.*

Demonstração: Seja X um conjunto de geradores para a álgebra A. Então existe um único $f : k\{X\} \to A$ morfismo de álgebras tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & k\{X\} \arrow[d, dashed, "f"] \\ X \arrow[ur, "i'"] \arrow[r, "i"'] & A \end{tikzcd}$$

ou seja, $f(x) = x$ para qualquer $x \in X$.

Vejamos que f é sobrejetora.

Seja $a \in A$, logo $a = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in X$ para todo j. Portanto, tomando $y = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in k\{X\}$ temos que

$$f(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} f(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1 \cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} = a.$$

Sendo f um morfismo de álgebras, vimos que $\ker(f)$ é um ideal de $k\{X\}$. Assim, pela Proposição A.13 segue que $k\{X\}/\ker(f) \cong Im(f) = A$.

$\blacksquare$

Exemplo A.18 (Álgebra Tensorial) *Seja V um espaço vetorial, definimos a álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, em que $V^{\otimes 0} = k$, $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ vezes}}$, para todo $n \geq 1$. Ainda, se $x = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ e $y = v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r \in V^{\otimes r}$, definimos o produto xy por:*

$$xy = (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes v'_1 \otimes \ldots \otimes v'_r \in V^{\otimes(n+r)}$$

sendo $1_k \in k$ a unidade da álgebra $T(V)$.

Definição A.19 *Um par $(\mathfrak{g}, [,])$, em que $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial e $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma aplicação bilinear chamada comutador ou colchete de Lie, é dito uma álgebra de Lie se $[,]$ satisfaz:*

(i) $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ (anti-simetria);

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (identidade de Jacobi).

Ainda, se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, então uma aplicação linear $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é dita ser um homomorfismo de álgebras de Lie se $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ para todo $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo A.20 *Se A é uma álgebra então o comutador dado por $[x, y] = xy - yx$ dá uma estrutura de álgebra de Lie para A.*

Exemplo A.21 (Álgebra envolvente universal) *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, construiremos uma álgebra na qual $\mathfrak{g}$ está imersa e cujo comutador de $\mathfrak{g}$ é dado pelo comutador da álgebra. Seja $T(\mathfrak{g})$ a álgebra* *tensorial relativa ao espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *e considere o ideal* $I(\mathfrak{g}) \subseteq T(\mathfrak{g})$ *gerado por expressões do tipo* $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ *para* $x, y \in \mathfrak{g}$. *A álgebra quociente* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ *(vide Proposição A.13), denominada álgebra envolvente de* $\mathfrak{g}$.

Para vermos que existe uma injeção de $\mathfrak{g}$ *em* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *mostremos que*

$$I(\mathfrak{g}) = \ker(\pi : T(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})) \bigcap \mathfrak{g} = \{0\}.$$

De fato, seja $\{e_i\}_{i\in\Omega}$ *uma base de* $\mathfrak{g}$ *em que* Ω *é um conjunto de índices totalmente ordenados. Daí, um elemento* $c \in I(\mathfrak{g})$ *pode ser escrito como uma soma finita da forma*

$$c = \sum_{i<j\in\Omega} a_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j - [e_j, e_i]) \otimes b_{ij},$$

em que $a_{ij},\ b_{ij} \in T(\mathfrak{g})$. *Como* $\{e_i\}_{i\in\Omega}$ *é uma base para* $\mathfrak{g}$, *temos que* $c = \sum_{i<j\in\Omega} a_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j) \otimes b_{ij} = 0$ *se, e somente se,* $a_{ij} = 0$ *ou* $b_{ij} = 0$ *para todo par* (i, j).

O que implica em $c = 0$. *Assim, se supormos* $c \neq 0$, *temos que* c *sempre possui um somando da forma* $x_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j)$ *ou* $(e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j) \otimes y_{ij}$, *e portanto* $c \notin \mathfrak{g}$.

A.2 Coálgebras

Uma das importâncias da Definição A.2 é que em sua natureza categórica, esta definição pode ser dualizada, nos dando uma estrutura conhecida por coálgebras, o que será o nosso próximo campo de estudos.

Definição A.22 *Uma* k*-coálgebra é uma tripla* (C, Δ, ε), *em que* C *é* *um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k \otimes C \arrow[ur, "\varphi^{-1}"] & & C \otimes k \arrow[ul, "\psi^{-1}"'] \\
 & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

As aplicações Δ e ε são chamadas comultiplicação e counidade da coálgebra C, respectivamente. Os isomorfismos canônicos φ^{-1} e ψ^{-1} são dados por $\varphi^{-1}(\alpha \otimes c) = \alpha c$ e $\psi^{-1}(c \otimes \alpha) = c\alpha$. A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada coassociatividade e nos fornece

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{A.4}$$

Já a comutatividade do segundo diagrama é chamada axioma da counidade e nos fornece

$$\varphi^{-1} \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = \psi^{-1} \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta \tag{A.5}$$

A partir deste ponto, sempre que nos referirmos a uma k-coálgebra (C, Δ, ε) omitiremos o corpo k e as aplicações estruturais Δ e ε. Simplesmente diremos a coálgebra C.

Exemplo A.23 *Sejam X um conjunto não-vazio e kX o k-espaço vetorial com base X. Então kX é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas, respectivamente, por $\Delta(x) = x \otimes x$ e $\varepsilon(x) = 1$, para qualquer $x \in X$ e estendidas por linearidade.*

Exemplo A.24 (Coálgebra da potência dividida) *Seja C um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então C é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}$ e $\varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$, em que $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker. Mostremos que C é uma coálgebra.*

Notemos primeiramente que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i = \sum_{i+j=m} c_i \otimes c_j, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\Delta(c_m) &= (\Delta \otimes I)\Big(\sum_{i+j=m} c_i \otimes c_j\Big) \\
&= \sum_{i+j=m} \Delta(c_i) \otimes c_j \qquad \text{(A.6)} \\
&= \sum_{i+j=m} \sum_{k+l=i} c_k \otimes c_l \otimes c_j \qquad \text{(A.7)} \\
&= \sum_{k+l+j=m} c_k \otimes c_l \otimes c_j \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta(c_m) &= (I \otimes \Delta)\Big(\sum_{k+h=m} c_k \otimes c_h\Big) \\
&= \sum_{k+h=m} c_k \otimes \Delta(c_h) \qquad \text{(A.9)} \\
&= \sum_{k+h=m} \sum_{l+j=h} c_k \otimes c_l \otimes c_j \qquad \text{(A.10)} \\
&= \sum_{k+l+j=m} c_k \otimes c_l \otimes c_j. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$. Vejamos a comutatividade *do segundo diagrama. Para $m \in \mathbb{N}$, temos:*

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varepsilon \otimes I)\Delta(c_m) &= \varphi^{-1}(\varepsilon \otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) \\
&= \varphi^{-1}(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i) \otimes c_{m-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \varepsilon(c_i) c_{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \delta_{0,i}\, c_{m-i} = c_m.
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se a outra igualdade. Logo, C é uma coálgebra. Esta coálgebra é chamada coálgebra da potência dividida.

Exemplo A.25 *No exemplo A.6 vimos que kG é uma álgebra, daremos agora uma estrutura de coálgebra em kG. É fácil vermos que $\{g\}_{g\in G} \subset kG$ é uma base para kG. Assim, definimos:*

$$\begin{aligned}
\Delta : kG &\longrightarrow kG \otimes kG \\
g &\longmapsto g \otimes g
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon : kG &\longrightarrow k \\
g &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

Claramente, $(kG, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Exemplo A.26 *Sejam $n \geq 1$ inteiro, $M^c(n,k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2 e $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$ e definimos em $M^c(n,k)$ uma comultiplicação $\Delta(e_{ij}) = \sum\limits_{p=1}^{n} e_{ip} \otimes e_{pj}$ e uma counidade*

$\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$. Desta maneira, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra, chamada coálgebra de matrizes. De fato, temos que

$$\begin{aligned}((I\otimes\Delta)\circ\Delta)(e_{ij}) &= (I\otimes\Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\Delta(e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\sum_{q=1}^{n} e_{pq}\otimes e_{qj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes I)\Delta(e_{ij}) &= (\Delta\otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} \Delta(e_{ip})\otimes e_{pj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{iq}\otimes e_{qp}\otimes e_{pj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Mostremos que $\varphi^{-1}\circ(\varepsilon\otimes I)\circ\Delta = I_{M^c(n,k)}$. De fato,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)\Delta(e_{ij}) &= \varphi^{-1}(\varepsilon\otimes I)(\textstyle\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj})\\ &= \varphi^{-1}(\textstyle\sum_{p=1}^{n}\varepsilon(e_{ip})\otimes e_{pj})\\ &= \textstyle\sum_{p=1}^{n}\varepsilon(e_{ip})e_{pj}\\ &= \textstyle\sum_{p=1}^{n}\delta_{i,p}\, e_{pj} = e_{ij}.\end{aligned}$$

Logo, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra.

Veremos agora uma notação para serve para reescrevermos $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{(i1)} \otimes c_{(i2)}$, $c \in C$ uma coálgebra. A esta nova notação chamamos de Notação de Sweedler e denotamos, para todo $c \in C$, o elemento $\Delta(c) = \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. A notação de Sweedler omite o índice i, facilitando assim muitas manipulações algébricas envolvendo a expansão no Δ.

Assim, pela notação de Sweedler temos que:

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes I) \left(\textstyle\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \textstyle\sum_c \sum_{c_{(1)}} c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= (I \otimes \Delta) \left(\textstyle\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \textstyle\sum_c \sum_{c_{(2)}} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}. \end{aligned}$$

Usando a equação A.4 temos:

$$\sum_{c} \sum_{c_{(1)}} c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = \sum_{c} \sum_{c_{(2)}} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \tag{A.12}$$

Este elemento é denotado por

$$\Delta_2(c) = \sum_{c} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}. \tag{A.13}$$

Agora, seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Definimos a sequência de transformações $(\Delta_n)_{n \geq 1}$, da seguinte maneira

$$\Delta_1 = \Delta, \quad \Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \ldots \otimes C}_{n+1 \text{vezes}}$$

onde

$$\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1} \text{ , para qualquer } n \geq 2.$$

Aqui, I^n denota a função identidade em $\underbrace{C \otimes \ldots \otimes C}_{n \text{ vezes}}$.

Analogamente, para qualquer $n \geq 2$, podemos escrever $\Delta_n(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n+1)}$, conforme podemos ver em [9].

Ainda, usando a equação A.5 na notação de Sweedler, obtemos

$$\sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = \sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) \tag{A.14}$$

Mostremos agora que a counidade de uma coálgebra é única.

Proposição A.27 *Seja (C, Δ) um espaço vetorial munido de uma comultiplicação e sejam as counidades $\varepsilon_1 : C \to k$ e $\varepsilon_2 : C \to k$ tais que $(C, \Delta, \varepsilon_1)$ e $(C, \Delta, \varepsilon_2)$ tem estrutura de coálgebra. Então $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.*

Demonstração: Seja $c \in C$. Como ε_1 e ε_2 são counidades para a coágebra C, usando a equação A.14 temos que $c = \sum_c c_{(1)}\varepsilon_1(c_{(2)})$ e também $c = \sum_c \varepsilon_2(c_{(1)})c_{(2)}$. Então, aplicando ε_1 em c, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(c) &= \varepsilon_1\left(\sum_c \varepsilon_2(c_{(1)})c_{(2)}\right) = \sum_c \varepsilon_2(c_{(1)})\varepsilon_1(c_{(2)}) \\ &= \varepsilon_2\left(\sum_c c_{(1)}\varepsilon_1(c_{(2)})\right) = \varepsilon_2(c). \end{aligned}$$

E portanto, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

$\blacksquare$

Proposição A.28 *Seja C uma coálgebra. Então para todo $c \in C$, valem:*

(i) $\sum_c \varepsilon(c_{(2)})\Delta(c_{(1)}) = \Delta(c)$;

(ii) $\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}\varepsilon(c_{(3)}) = \Delta(c)$;

(iii) $\sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) \otimes c_{(3)} = \Delta(c)$;

(iv) $\sum_c \varepsilon(c_{(1)}c_{(3)}) \otimes c_{(2)} = (\sigma \circ \Delta)(c)$;

(v) $\sum_c \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)} = c$.

Demonstração: Seja $c \in C$. Então

(i) Pela equação A.14 temos que $c = \sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})$, e aplicando Δ em ambos os lados dessa igualdade, obtemos:

$$\Delta(c) = \Delta\left(\sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})\right) = \sum_c \varepsilon(c_{(2)})\Delta(c_{(1)}).$$

(ii) Temos que $\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Mas como $c_{(2)}$ é um elemento de C, pela equação A.14, $c_{(2)} = \sum_{c_{(2)}} c_{(2)(1)}\varepsilon(c_{(2)(2)})$ e portanto

$$\begin{aligned}
\Delta(c) &= \sum_c c_{(1)} \otimes \sum_{c_{(2)}} c_{(2)(1)}\varepsilon(c_{(2)(2)}) \\
&= \sum_c \sum_{c_{(2)}} c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)}\varepsilon(c_{(2)(2)}) \\
&= \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes \varepsilon(c_{(3)})c_{(2)}$.

(iii) A demonstração é análoga a (ii), porém utilizamos a equação A.14 para $c_{(1)} \in C$.

(iv) Pela equação A.14, sabemos que $c = \sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}$ e isto implica em

$$\Delta(c) = \sum_c \sum_{c_{(2)}} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = \sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} \otimes c_{(3)}.$$

Portanto,

$$(\sigma \circ \Delta)(c) = \sigma\left(\sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} \otimes c_{(3)}\right) = \sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(3)} \otimes c_{(2)}.$$

(v) Pela equação A.14,

$$c = \sum_c \sum_{c_{(2)}} \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)(1)})c_{(2)(2)} = \sum_c \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)}.$$

■

Assim como na álgebra, onde definimos as noções de comutatividade, morfismo de álgebras, subálgebra e ideal, podemos fazê-lo para as coálgebras, definindo respectivamente a cocomutatividade, morfismo de coálgebras, subcoálgebra e coideal, como seguem.

Definição A.29 *Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[rr, "\sigma"'] & & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, para todo $c \in C$,

$$\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} = (\sigma \circ \Delta)(c) = \sum_c c_{(2)} \otimes c_{(1)}.$$

Definição A.30 *Sejam* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *duas coálgebras. Uma função k-linear* $f : C \to D$ *é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& k. &
\end{tikzcd}
$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser reescrita como:

$$\Delta_D(f(c)) = \sum_{f(c)} f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = \sum_{c} f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = (f \otimes f)(\Delta_C(c)), \tag{A.15}$$

para todo $c \in C$.

Já a comutatividade do segundo diagrama pode ser reescrita como:

$$(\varepsilon_D \circ f)(c) = \varepsilon_C(c), \tag{A.16}$$

para todo $c \in C$.

Definição A.31 *Seja* C *uma coálgebra. Um k-subespaço* $D \subseteq C$ *é dito uma subcoálgebra se* $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Claramente, se D é uma subcoálgebra, então $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ é uma coálgebra.

Exemplo A.32 *Seja* $\{C_i\}_{i \in I}$ *uma família de subcoálgebras de uma coálgebra* C*, então* $\sum_{i \in I} C_i$ *é uma subcoálgebra de* C.

De fato, pois

$$\Delta\left(\sum_{i\in I} C_i\right) = \sum_{i\in I}\Delta(C_i) \subseteq \sum_{i\in I}(C_i\otimes C_i) \subseteq \sum_{i\in I} C_i \otimes \sum_{i\in I} C_i.$$

Definição A.33 *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra e I um k-subespaço vetorial de C. Dizemos que I:*

(i) é um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (respectivamente $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$);

(ii) é um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$.

Notamos que todo coideal à esquerda e à direita é um coideal, mas, diferentemente do que ocorre com ideais em uma álgebra, se I for um coideal de uma coálgebra C, não necessariamente I será um coideal à esquerda e à direita. O próximo exemplo ilustra esta situação.

Exemplo A.34 *Considerando o anel de polinômios $k[X]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por:*

$$\Delta(X^n) = (X\otimes 1 + 1\otimes X)^n, \quad \varepsilon(X^n) = 0 \ \textit{para} \ n \geq 1$$
$$\Delta(1) = 1_{\otimes}1 \quad e \quad \varepsilon(1) = 1,$$

em que $1 = 1_k = 1_{k[X]}$.

Seja $I = kX$ o k-subespaço de $k[X]$ gerado por X. Temos que $\Delta(I) = I \otimes 1 + 1 \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$ e isto nos diz que I é um coideal, mas I não é coideal à direita e nem à esquerda.

Observamos que se C uma coálgebra, então todo coideal à esquerda e à direita é uma subcoálgebra.

De fato, seja I um coideal à esquerda e à direita de C, então

$$\Delta(I) \subseteq (C\otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I,$$

em que a última igualdade segue de ([9], Lema 1.4.5). Reciprocamente, toda subcoálgebra é coideal à esquerda e à direita.

Proposição A.35 *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então:*

(i) $\mathrm{Im}(f)$ é uma subcoálgebra de D;

(ii) $\ker(f)$ é um coideal de C.

Demonstração: (i) Como f é morfismo de coálgebras, então $(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$, ou seja, temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D. \end{tikzcd}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_D(Im(f)) &= \Delta_D(f(C)) \\ &= (\Delta_D \circ f)(C) \\ &= ((f \otimes f) \circ \Delta_C)(C) \subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) \\ &= f(C) \otimes f(C) \\ &= Im(f) \otimes Im(f), \end{aligned}$$

ou seja, $\Delta_D(Im(f)) \subseteq Im(f) \otimes Im(f)$. Assim, $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D.

(ii) Mostremos agora que $\ker(f)$ é um coideal de C. É claro que $(\Delta_D \circ f)(\ker(f)) = 0$. E como f é um morfismo de coálgebras, $((f \otimes f) \circ \Delta_C)(\ker(f)) = 0$, logo:

$$\Delta_C(\ker(f)) \subseteq \ker(f \otimes f) = \ker(f) \otimes C + C \otimes \ker(f),$$

em que a última igualdade vem do Lema A.12, e segue que $\varepsilon_C(\ker(f)) = (\varepsilon_D \circ f)(\ker(f)) = 0$, pois $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$. Portanto, $\ker(f)$ é um coideal de C.

■

Podemos também definir uma estrutura de coálgebra quociente.

Teorema A.36 *Sejam C uma coálgebra, I um coideal e $\pi : C \to C/I$ a aplicação canônica de espaços vetoriais. Então*

(i) Existe uma única estrutura de coálgebra em C/I tal que π é um morfismo de coálgebras;

(ii) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras com $I \subseteq Ker(f)$ então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$.

Demonstração: (i) Como I é um coideal,

$$((\pi \otimes \pi) \circ \Delta)(I) \subseteq (\pi \otimes \pi)(I \otimes C + C \otimes I) = 0.$$

Lembrando que $C/I \otimes C/I \simeq C \otimes C/(I \otimes C + C \otimes I)$, temos, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, que existe uma única função k-linear $\bar{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que $\bar{\Delta} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta$, ou seja,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] & C/I \arrow[d, dashed, "\bar{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\pi \otimes \pi"'] & C/I \otimes C/I \end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo. Temos que $\bar{\Delta}(\bar{c}) = \displaystyle\sum_c \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)}$, em que $\bar{c} = \pi(c)$. É fácil vermos que

$$((\bar{\Delta} \otimes I) \circ \bar{\Delta})(\bar{c}) = ((I \otimes \bar{\Delta}) \circ \bar{\Delta})(\bar{c}) = \sum_c \overline{c}_{(1)} \otimes \overline{c}_{(2)} \otimes \overline{c}_{(3)}.$$

Portanto, $\bar{\Delta}$ é coassociativa. Além disso, como $\varepsilon(I) = 0$, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{\varepsilon} : C/I \to k$ tal que $\bar{\varepsilon} \circ \pi = \varepsilon$, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & C/I \arrow[dl, dashed, "\bar{\varepsilon}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$, para todo $c \in C$. E com isso, vemos que:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_c \bar{\varepsilon}(\overline{c}_{(1)})\overline{c}_{(2)} &= \textstyle\sum_c \varepsilon(c_{(1)})\overline{c}_{(2)} &&= \textstyle\sum_c \varepsilon(c_{(1)})\pi(c_{(2)}) \\ &= \pi\left(\textstyle\sum_c \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}\right) &&= \pi(c) = \bar{c}. \end{aligned}$$

Analogamente, $\sum \overline{c}_{(1)}\bar{\varepsilon}(\overline{c}_{(2)}) = \bar{c}$. Portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra. A comutatividade dos diagramas acima mostram também que $\pi : C \to C/I$ é um morfismo de coálgebras.

(ii) Seja $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras tal que $I \subseteq \ker f$. Então, pelo Teorema do Homorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$, ou seja, $\bar{f}(\bar{c}) = f(c)$, para qualquer $c \in C$. Assim,

$$
\begin{array}{rcl}
(\Delta_D \circ \bar{f})(\bar{c}) & = & \Delta_D(\bar{f}(\bar{c})) = \Delta_D(f(c)) \\
& = & (\Delta_D \circ f)(c) \\
& \overset{(*)}{=} & ((f \otimes f) \circ \Delta_C)(c) \\
& = & (f \otimes f)\left(\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}\right) \\
& = & \sum_c f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) \\
& = & \sum_c \bar{f}(\bar{c}_{(1)}) \otimes \bar{f}(\bar{c}_{(2)}) \\
& = & (\bar{f} \otimes \bar{f})\left(\sum_c \bar{c}_{(1)} \otimes \bar{c}_{(2)}\right) \\
& = & (\bar{f} \otimes \bar{f})(\bar{\Delta}(\bar{c})),
\end{array}
$$

e,

$$\varepsilon_D \bar{f}(\bar{c}) = \varepsilon_D(f(c)) \overset{(**)}{=} \varepsilon_C(c) = \bar{\varepsilon}(\bar{c}),$$

em que as igualdades $(*)$ e $(**)$ seguem do fato de que f é morfismo de coálgebras. Logo, $\bar{f}$ é morfismo de coálgebras.

■

A.3 A Álgebra e a Coálgebra Dual

A construção do espaço dual de um espaço vetorial nos permite construir álgebras induzidas por coálgebras e vice-versa.

Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra, considere o k-espaço vetorial $Hom_k(C, A)$ de todas as transformações lineares de C para A. Nosso objetivo agora é fornecer uma estrutura de álgebra para $Hom_k(C, A)$.

Proposição A.37 *Sendo C e A como acima, $Hom_k(C, A)$ é uma ál-*

gebra com o produto de convolução definido por

$$(f * g)(c) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \tag{A.17}$$

para todo $f,\ g \in Hom_k(C, A)$ *e* $c \in C$ *e com unidade dada* $\eta \circ \varepsilon$.

Demonstração: É claro que $f * g \in Hom_k(C, A)$, pois é a composição de funções lineares com contradomínio em A. Mostremos que o produto de convolução é associativo, sejam $c \in C$ e $f, g, h \in Hom_k(C, A)$, então

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \textstyle\sum_c (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= \textstyle\sum_c \left(\sum_{c_{(1)}} f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)})\right) h(c_{(2)}) \\
&= \textstyle\sum_c (f(c_{(1)})g(c_{(2)}))h(c_{(3)}) \\
&= \textstyle\sum_c f(c_{(1)})(g(c_{(2)})h(c_{(3)})) \\
&= \textstyle\sum_c f(c_{(1)}) \left(\sum_{c_{(2)}} g(c_{(2)(1)})h(c_{(2)(1)})\right) \\
&= \textstyle\sum_c f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\
&= (f * (g * h))(c).
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
(f * (\eta \circ \varepsilon))(c) &= \textstyle\sum_c f(c_{(1)})\eta(\varepsilon(c_{(2)})) \\
&= \textstyle\sum_c \sum_c f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})\eta(1_k) \\
&= \textstyle\sum_c f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}))1_A \\
&= f\left(\sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})\right) 1_A \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Analogamente temos que $((\eta \circ \varepsilon) * f)(c) = f(c)$. Com isso, $Hom_k(C, A)$ se torna um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial. A relação de compatibilidade entre a estrutura de espaço vetorial e o produto de convolução é facilmente verificada.

Logo, $Hom_k(C, A)$ satisfaz a Definição A.1 e portanto é uma álgebra.

■

Quando $A = k$, obtemos o espaço dual de C que será denotado por $C^* = Hom_k(C, k)$. Sendo k uma álgebra, temos o seguinte corolário.

Corolário A.38 *O espaço dual C^* de uma coálgebra C é uma álgebra com a multiplicação dada por A.17.*

Dado um k-espaço vetorial V, denotamos $V^* = Hom(V, k)$ o espaço dual de V. É conhecido que os espaços V e V^* determinam uma forma bilinear não degenerada $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to k$ dada por $\langle f, v\rangle = f(v)$.

Sejam V e W k-espaços vetoriais e $\phi : V \to W$ uma aplicação k-linear. Então a *transposta* de ϕ ou a transformação dual induzida é a aplicação linear $\phi^* : W^* \to V^*$ definida por $\langle \phi^*(f), v\rangle = \langle f, \phi(v)\rangle = f(\phi(v))$, para todo $f \in W^*$ e todo $v \in V$.

Sabemos que como k-espaços vetoriais, $k \cong k^*$ via o isomorfismo $\xi : k \to k^*$ dado por

$$\langle \xi(\alpha), \beta\rangle = \alpha\beta, \tag{A.18}$$

para todo $\alpha, \beta \in k$. E sua inversa $\xi^{-1} : k^* \to k$ é dada por

$$\xi^{-1}(f) = \langle f, 1\rangle. \tag{A.19}$$

Ainda, podemos considerar $V^* \otimes V^*$ como um subespaço de $(V \otimes V)^*$ via o seguinte lema, que será enunciado abaixo. Ao leitor interessado, indicamos a demonstração em ([9], p. 16 e 17).

Lema A.39 *Seja V um k-espaço vetorial. Então o morfismo $\iota : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$ dada por $(\iota(f \otimes g))(v \otimes w) = f(v)g(w)$ para todo*

$f,\ g \in V^*$ e todo $v,\ w \in V$ é uma aplicação injetora. Além do mais, se V possuir dimensão finita então ι é um isomorfismo se V possuir dimensão finita.

Como corolário deste lema, temos:

Corolário A.40 *Sejam $M_1, \ldots, M_n$ k-espaços vetoriais. Então a aplicação $\theta : M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)^*$ definida por $(\theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n))(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f_1(m_1) \ldots f_n(m_n)$ é injetora. Além disso, se todos os espaços M_i são de dimensão finita, então θ é um isomorfismo.*

Portanto, com estas notações, a multiplicação na coálgebra dual C^* torna-se $\Delta^* \circ \iota$ e a unidade torna-se $\varepsilon^* \circ \xi$.

Exemplo A.41 Consideremos C a coálgebra vista no Exemplo A.24. A álgebra dual C^* tem multiplicação definida por $(f*g)(c_n) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i})$ e unidade $\eta : k \to C^*$, dada por $\eta(\alpha)(c_n) = \alpha\delta_{0,n}$, para todo $f,\ g \in C^*, \alpha \in k$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que

$$
\begin{array}{rccl}
\phi : & C^* & \to & k[[X]] \\
& f & \mapsto & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f(c_n) X^n,
\end{array}
$$

é um isomorfismo de álgebras, em que $k[[X]]$ é a álgebra das séries de potência formais.

Claramente, ϕ é bijetora e k-linear. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\phi(f*g) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (f*g)(c_n)X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i=0}^{n} f(c_i)g(c_{n-i})X^n) \\
&= (\sum_{n\in\mathbb{N}} f(c_n)X^n)(\sum_{m\in\mathbb{N}} g(c_n)X^m) \\
&= \phi(f)\phi(g),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\phi(\eta(1)) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(1)(c_n)X^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{0,n}X^n = 1.
\end{aligned}
$$

Logo, ϕ é um isomorfismo de k-álgebras.

Pelo que fizemos acima, a toda coálgebra podemos associar uma álgebra dual. Surge, naturalmente, a pergunta inversa: dada uma álgebra A podemos associar uma estrutura de coálgebra a A^* usando as transformações duais μ^* e η^*?

No caso anterior, a definição da multiplicação vinha de Δ e a função ι:

$$
\mu = (\Delta^* \circ \iota) : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\iota} (C\otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*
$$

Poderíamos tentar definir uma comultiplicação de forma análoga:

$$
\Delta = (\iota^{-1} \circ \mu^*) : A^* \xrightarrow{\mu^*} (A\otimes A)^* \xrightarrow{\iota^{-1}} A^* \otimes A^*
$$

A dificuldade em fazer isto é que ι não é necessariamente invertível, apenas se A possuir dimensão finita.

Assim, seja A uma álgebra de dimensão finita. Definimos $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ por $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$ e $\varepsilon : A^* \to k$ por $\varepsilon = \xi^{-1} \circ \eta^*$, em que $xi^{-1} : k^* \to k$ é dada pela equação A.19. Com isso, temos o seguinte resultado:

Lema A.42 *Se $f \in A^*$ e $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$ para todo $g_i,\ h_i \in A^*$ e todo $a,\ b \in A$. Além disso, se $f(ab) = \sum_j g'_j(a)h'_j(b)$, então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g'_j \otimes h'_j$.*

Demonstração: Temos que $\iota(\Delta(f))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$. E como $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$, logo,

$$f(ab) = f(\mu(a \otimes b)) = \mu^*(f)(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b).$$

E mais, se $\sum_j g'_j(a)h'_j(b) = f(ab)$, então para todo $a,\ b \in A$, temos:

$$\iota\left(\sum_j g'_j \otimes h'_j\right)(a \otimes b) = \iota\left(\sum_i g_j \otimes h_i\right)(a \otimes b).$$

E, pela injetividade de ι segue que $\sum_j g'_j \otimes h'_j = \sum_i g_i \otimes h_i$.

■

Proposição A.43 *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então A^* é uma coálgebra com comultiplicação $\Delta = \iota^{-1} \circ \mu^*$ e com counidade $\varepsilon = \xi^{-1} \circ \eta^*$, em que ξ^{-1} é dada pela equação A.19.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$, então escrevemos $\Delta(f) = \sum_i h_i \otimes g_i$, para alguns $h_i, g_i \in A^*$, $\Delta(g_i) = \sum_j g'_{ij} \otimes g''_{ij}$ para alguns $g'_{ij}, g''_{ij} \in A^*$

e $\Delta(h_i) = \sum_k h'_{ik} \otimes h''_{ik}$ para alguns $h'_{ik}, h''_{ik} \in A^*$, logo:

$$((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f) = (\Delta \otimes I)\left(\sum_i h_i \otimes g_i\right) = \sum_{i,k} h'_{ik} \otimes h''_{ik} \otimes g_i.$$

Por outro lado,

$$((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f) = (I \otimes \Delta)\left(\sum_i h_i \otimes g_i\right) = \sum_{i,j} h_i \otimes g'_{ij} \otimes g''_{ij}.$$

Consideremos agora $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$ definido por $(\theta(u \otimes v \otimes w))(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$. Pelo Lema A.39, θ é injetora. Portanto, pelo, Lema A.42,

$$\begin{aligned}
((\theta \circ (\Delta \otimes I) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c) &= \left(\theta\left(\sum_{i,k} h'_{ik} \otimes h''_{ik} \otimes g_i\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,k} h'_{ik}(a)h''_{ik}(b)g_i(c) \\
&= \sum_i h_i(ab)g_i(c) \\
&= f((ab)c).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
((\theta \circ (I \otimes \Delta) \circ \Delta)(f))(a \otimes b \otimes c) &= \left(\theta\left(\sum_{i,j} h_i \otimes g'_{ij} \otimes g''_{ij}\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,j} h_i(a)g'_{ij}(b)g''_{ij}(c) \\
&= \sum_i h_i(a)g_i(bc) \\
&= f(a(bc)).
\end{aligned}$$

Como $a, b, c \in A$ e $f \in A^*$ são escolhidos arbitrariamente e A é uma álgebra associativa, pela injetividade de θ, temos a coassociatividade.

Além disso, como $\varepsilon(f) = (\xi^{-1} \circ \eta^*)(f) = f(1_A)$, pelo Lema A.42 temos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_i h_i \varepsilon(g_i)\right)(a) &= \sum_i h_i(a) g_i(1_A) \\ &= f(a1_A) = f(a),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\sum_i \varepsilon(h_i) g_i\right)(a) &= \sum_i h_i(1_A) g_i(a) \\ &= f(1_A a) = f(a)\end{aligned}$$

Logo, $\sum_i h_i \varepsilon(g_i) = f = \sum_i \varepsilon(h_i) g_i$. Portanto A^* é uma coálgebra. ■

Proposição A.44 *Sejam C e D coálgebras e A e B álgebras de dimensão finita. Então*

(i) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras então seu dual $f^* : D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras;

(ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras então seu dual $f^* : B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração: (i) Sejam $g,\ h \in D^*$ e $c \in C$. Como f é morfismo de coálgebras, temos

$$\begin{aligned}
(f^* \circ (g * h))(c) &= (g * h)(f(c)) \\
&= \sum_c g(f(c)_{(1)})h(f(c)_{(2)}) \\
&= \sum_c g(f(c_{(1)}))h(f(c_{(2)})) \\
&= \sum_c (f^*(g))(c_{(1)})(f^*(h))(c_{(2)}) \\
&= ((f^*(g)) * (f^*(h)))(c).
\end{aligned}$$

Logo, $f^*(g * h) = (f^*(g)) * (f^*(h))$. Além disso, temos que $f^*(\varepsilon_D) = \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$, pois f é morfismo de coálgebras. Portanto, f^* é morfismo de álgebras.

(ii) Conforme a Definição A.30, precisamos mostrar que os seguintes diagramas são comutativos

$$\text{(I)} \quad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "f^* \otimes f^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \qquad \text{(II)} \quad \begin{tikzcd} B^* \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\varepsilon_{B^*}"'] & & A^* \arrow[dl, "\varepsilon_{A^*}"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Mostremos (I). Seja $u \in B^*$. Então

$$(\Delta_{A^*} \circ f^*)(u) = \Delta_{A^*}(u \circ f) = \sum_i g_i \otimes h_i,$$

para alguns $g_i, h_i \in A^*$.

Sejam também $\Delta_{B^*}(u) = \sum_j p_j \otimes q_j$, para alguns $p_j, q_j \in B^*$ e ι como no Lema A.39. Ainda, sejam $a \in A$ e $b \in B$. Pelo Lema A.42

temos que:

$$(\iota((\Delta_{A^*} \circ f^*)(u)))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b) = (u \circ f)(ab).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\iota(((f^* \otimes f^*) \circ \Delta_{B^*})(u))(a \otimes b) &= \left(\iota\left(\sum_j (p_j \circ f) \otimes (q_j \circ f)\right)\right)(a \otimes b) \\
&= \sum_j (p_j \circ f)(a)(q_j \circ f)(b) \\
&= \sum_j p_j(f(a))q_j(f(b)) \\
&= u(f(a)f(b)) \\
&= (u \circ f)(ab),
\end{aligned}$$

em que a última igualdade segue do fato de f ser morfismo de álgebras. Como ι é injetiva, o primeiro diagrama comuta.

Além disso, como f é morfismo de álgebras, temos

$$(\varepsilon_{A^*} \circ f^*)(u) = \varepsilon_{A^*}(u \circ f) = u(f(1_A)) = u(1_B) = \varepsilon_B^*(u).$$

Portanto, (II) comuta, e segue que f^* é morfismo de coálgebras.

■

A.4 O Dual Finito de uma Álgebra

Na seção anterior construímos um álgebra dual C^* a partir de uma coálgebra C e obtivemos a dualização de uma álgebra A para uma coálgebra dual A^* no caso em que A tem dimensão finita. Vamos mostrar que podemos associar uma estrutura de coálgebra a um subespaço $A^\circ \subseteq A^*$ tal que $\Delta_{A^*}|_{A^\circ} = \mu^*|_{A^\circ} : A^\circ \to (A^\circ \otimes A^\circ)$ define uma comultiplicação, que é chamado dual finito de A.

Definição A.45 *Sejam A uma álgebra e $I \subseteq A$ um ideal de A, dizemos que I tem codimensão finita se $dim\,(A/I) < +\infty$.*

Lema A.46 *Sejam V um espaço vetorial e $X, Y \subseteq V$ subespaços. Se X e Y possuem codimensão finita, então $X \cap Y$ também possui codimensão finita.*

Demonstração: Seja $\gamma : V \to V/X \times V/Y$ a transformação linear dada por $\gamma(v) = (v + X, v + Y)$. É fácil ver que $ker(\gamma) = X \cap Y$. Então, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, temos que:

$$V/ker(\gamma) \cong Im(\gamma) \subseteq V/X \times V/Y.$$

Como $dim(V/X) < \infty$ e $dim(V/Y) < \infty$, segue que $dim(V/(X \cap Y)) = dim(V/ker(\gamma)) < \infty$.

■

O próximo resultado nos fornece uma caracterização para os elementos do subespaço ao qual estamos querendo construir, mas antes, lembramos o seguinte fato da álgebra linear:

Lema A.47 *Se um conjunto de funcionais lineares $\{f_i\}_{i=1}^n$ de um espaço vetorial V é linearmente independente então existem $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Teorema A.48 *Sejam A uma álgebra, $f \in A^*$ e ι como no Lema A.39. Então são equivalentes:*

(i) Existem $f_i, g_i \in A^*$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que $f(ab) = \sum_i f_i(a)g_i(b)$, para todo $a,\ b \in A$;

(ii) $\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$, em que $\Delta(f) = \mu^*(f)$;

(iii) Existe $I \subseteq \ker(f)$ um ideal à esquerda de A com codimensão finita;

(iv) Existe $J \subseteq \ker(f)$ um ideal à direita de A com codimensão finita;

(v) Existe $K \subseteq \ker(f)$ um ideal de A com codimensão finita.

Demonstração: A sequência lógica de nossa demonstração será (i) $\Leftrightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), (iii) $\Rightarrow$ (v), (iv) $\Rightarrow$ (v) e (v) $\Rightarrow$ (ii).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Sejam $a, b \in A$, então $\Delta(f)(a \otimes b) = f(\mu(a \otimes b)) = f(ab)$. Logo, se existirem $f_i, g_i \in A^*$ tais que $f(ab) = \sum_i f_i(a)g_i(b)$, temos que:

$$\Delta(f)(a \otimes b) = \left(\iota\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)\right)(a \otimes b),$$

o que implica em $\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$.

Reciprocamente, se $f \in A^*$ é tal que $\Delta(f) \in \iota(A^* \otimes A^*)$, então existem $f_i, g_i \in A^*$ tais que $\Delta(f) = \iota\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)$. Logo, para todo $a,\ b \in A$ temos que $f(ab) = \Delta(f)(a \otimes b) = \sum_i f_i(a)g_i(b)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Seja $\Delta(f) = \iota\left(\sum_i g_i \otimes h_i\right)$. Por propriedades do produto tensorial, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\{g_i\}_{i=1}^n$ são linearmente independentes e $\{h_i\}_{i=1}^n$ não nulos.

Seja $I = \bigcap_i \ker(h_i)$. Vejamos que I é um ideal à esquerda de A com codimensão finita e contido em $\ker(f)$.

Provemos primeiramente que I é um ideal à esquerda de A.

Claramente, I é um subespaço de A. Sejam $b \in A$ e $c \in I$, então

$$0 = \sum_i g_i(ab)h_i(c) = f(abc) = \sum_i g_i(a)h_i(bc),$$

para todo $a \in A$,. E pela independência linear dos g_i, existem $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ tais que $g_i(v_j) = \delta_{ij}$, disto, temos que $h_i(bc) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo $bc \in I$.

Mostremos que I tem codimensão finita.

De fato, como $dim(A/\ker(h_i)) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pelo Lema A.46 segue que $\bigcap\limits_i \ker(h_i) = I$ tem codimensão finita.

Por fim, vejamos que $I \subseteq \ker(f)$.

Seja $a \in I$, então

$$f(a) = f(1_A a) = \sum_i g_i(1_A)h_i(a) = 0.$$

Portanto, $I \subseteq \ker(f)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

A demonstração é análoga a demonstração feita em ((ii) $\Rightarrow$ (iii)).

(iii) $\Rightarrow$ (v)

Seja $I \subseteq A$ um ideal à esquerda de codimensão finita que está contido em $\ker(f)$. Definimos $\pi : A \to Hom_k(A/I)$ por $\pi(a)(b + I) = ab + I$, para todo $a,\ b \in A$.

Mostremos que π é um homomorfismo de álgebras.

Sejam $a,\ b,\ c \in A$, temos que π está bem definida, pois se $a = b$ então $\pi(a)(c + I) = ac + I = bc + I = \pi(b)(c + I)$. E também,

$$\pi(ab)(c + I) = (ab)c + I = a(bc) + I = \pi(a)(\pi(b)(c + I)),$$

o que implica em $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. Ainda, é fácil vermos que $\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$ e que $\pi(\alpha a) = \alpha\pi(a)$, para todo $\alpha \in k$. E com isso, conluímos que π é homomorfismo de álgebras.

Seja $K = \ker(\pi)$. Pelo que mostramos acima, temos que K é um ideal de A. Como $dim(Hom_k(A/I)) = (dim(A/I))^2 < \infty$ e π é um homomorfismo de álgebras, pelo Corolário A.14,

$$A/K = A/ker(\pi) \cong Im(\pi) \subseteq Hom_k(A/I).$$

Portanto K é um ideal de A com codimensão finita.

Resta mostrarmos que $K \subseteq \ker(f)$. Para tanto, seja $x \in K$. Então $0+I = \pi(x)(a+I) = xa+I$, ou seja, $xa \in I$ para todo $a \in A$. Em particular, para $a = 1_A$. Logo, $x \in I \subseteq \ker(f)$, e segue que $K \subseteq \ker(f)$.

((iv) $\Rightarrow$ (v))

Novamente, a demonstração é análoga à demonstração feita em ((iii) $\Rightarrow$ (v)).

(v) $\Rightarrow$ (ii)

Sejam K um ideal de A como em (v) e $\rho : A \to A/K$ a projeção canônica e $\rho^* : (A/K)^* \to A^*$ a transformação dual induzida. Consideremos também

$$\rho^* \otimes \rho^* : (A/K)^* \otimes (A/K)^* \to A^* \otimes A^*.$$

Mostremos que $\Delta(f) \in Im(\iota \circ (\rho^* \otimes \rho^*))$. Já sabemos que $\Delta(f) \in (A \otimes A)^*$. Notemos que $\Delta(f)|_{A\otimes K+K\otimes A} = 0$, pois como K é um ideal de A, temos que $\mu(A \otimes K + K \otimes A) \subseteq K$ e portanto

$$\begin{aligned} \Delta(f)(A \otimes K + K \otimes A) &= \Delta(f)(A \otimes K) + \Delta(f)(K \otimes A) \\ &= f(AK) + f(KA) = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única transformação linear $\widehat{\Delta}(f) : (A \otimes A)/(A \otimes K + K \otimes A) \longrightarrow k$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Delta(f)"] \arrow[d, "P"'] & k \\ (A \otimes A)/(A \otimes K + K \otimes A) \arrow[ur, "\widehat{\Delta}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

em que P é a projeção canônica.

Notamos ainda que $\rho \otimes \rho : A \otimes A \to A/K \otimes A/K$ é sobrejetora (pois ρ é sobrejetora) e que, pelo Lema A.12,

$$\ker(\rho \otimes \rho) = A \otimes \ker(\rho) + \ker(\rho) \otimes A = A \otimes K + K \otimes A,$$

segue pelo Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, temos que

$$(A \otimes A)/(A \otimes K + K \otimes A) = (A \otimes A)/\ker(\rho \otimes \rho) \cong Im(\rho \otimes \rho) = A/K \otimes A/K.$$

E ainda, que $\widehat{\Delta}(f) \in ((A \otimes A)/(A \otimes K + K \otimes A))^*$. Assim, como K tem codimensão finita, segue que $A/K \otimes A/K$ tem dimensão finita e consequentemente,

$$((A\otimes A)/(A\otimes K+K\otimes A))^{*}\cong (A/K\otimes A/K)^{*}.$$

Denominamos por

$$\nu : (A\otimes A)/(A\otimes K+K\otimes A))^{*}\longrightarrow (A/K\otimes A/K)^{*}$$

este isomorfismo. Então:

$$\nu(\widehat{\Delta}(f))\in (A/K\otimes A/K)^{*}\cong (A/K)^{*}\otimes (A/K)^{*},$$

pois $dim(A/K)<\infty$. E por $\omega : (A/K\otimes A/K)^{*}\to (A/K)^{*}\otimes (A/K)^{*}$ este último isomorfismo.

Temos então o seguinte diagrama, onde as flechas horizontais são isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
\left(\dfrac{A\otimes A}{K\otimes A+A\otimes K}\right)^{*} \arrow[r, "\omega\circ\nu"] \arrow[d, "p^{*}"'] & \left(\dfrac{A}{K}\right)^{*}\otimes\left(\dfrac{A}{K}\right)^{*} \arrow[d, "p^{*}\otimes p^{*}"] \\
(A\otimes A)^{*} & (A\otimes A)^{*} \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

ou seja, $p^{*}=i\circ(p^{*}\otimes p^{*})\circ\omega\circ\nu$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \widehat{\Delta}(f)\circ p \\
&= p^{*}(\widehat{\Delta}(f)) \\
&= i\circ(p^{*}\otimes p^{*})\circ\omega\circ\nu(\widehat{(f)}),
\end{aligned}$$

portanto, $\Delta(f)\in Im(i\circ(p^{*}\otimes p^{*}))$.

$\blacksquare$

Definição A.49 *Seja A uma álgebra. Definimos o dual finito de A como sendo o conjunto A° das funções $f \in A^*$ tal que f satisfaz qualquer um dos itens do teorema A.48.*

Lema A.50 *A° é um subespaço vetorial de A^*.*

Demonstração: Para mostrarmos que A° é subespaço vetorial de A^*, devemos ver que $0 \in A^\circ$, e para todo $f,\ g \in A^\circ$ e todo $\alpha \in k$, $f+g \in A^\circ$ e $\alpha f \in A^\circ$.

Claramente $0 \in A^\circ$ pois $\ker(0) = A$, e disso obtemos que $dim(A/\ker(0)) < \infty$, ou seja, $\ker(0)$ tem codimensão finita.

Sejam $f,\ g \in A^\circ$. Então existem ideais I, J de A, $I \subseteq \ker(f)$ e $J \subseteq \ker(g)$, tais que $dim(A/I) < \infty$ e $dim(A/J) < \infty$. Claramente, $I \cap J$ é um ideal de A e $I \cap J \subseteq \ker(f) \cap \ker(g) \subseteq \ker(f+g)$. Pelo Lema A.46, $dim(A/(I \cap J)) < \infty$ e portanto $f + g \in A^\circ$.

Por fim, para todo $\alpha \in k$, como $f \in A^\circ$, existe $K \subseteq \ker(f)$ ideal de A tal que $dim(A/K) < \infty$. Mas $\ker(f) \subseteq \ker(\alpha f)$, e portanto, $\alpha f \in A^\circ$.

■

Finalizamos esta seção mostrando que A° é de fato uma coálgebra.

Proposição A.51 *$(A^\circ, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Em que $\Delta(f) = \mu^*(f)$ e $\varepsilon(f) = f(1_A)$.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $\Delta(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$. Seja $f \in A^\circ$, então podemos escrever $\Delta(f) = \sum_i f_i \otimes g_i$ com $f_i, g_i \in A^*$ e $\{f_i\}_{i=1}^n$ um conjunto linearmente independente. Logo, pelo que foi visto acima, existem $a_j \in A$, para $j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $f_i(a_j) = \delta_{ij}$.

Assim, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos:

$$\begin{aligned} g_i(ab) &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} g_j(ab) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j(a_i) g_j(ab) = f(a_i ab) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j(a_i a) g_j(b) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f_j \circ L_{a_i})(a) g_j(b) \end{aligned}$$

em que L_{a_i} é a multiplicação à esquerda por a_i. Portanto, pelo item (i) do Teorema A.48, segue que $g_i \in A^\circ$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$. Com isso, concluímos que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A^*$. Com raciocínio análogo mostra-se que $\Delta(f) \in A^* \otimes A^\circ$. Como A° é subespaço de A^* temos que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A^* \bigcap A^* \otimes A^\circ = A^\circ \otimes A^\circ$.

A demonstração da coassociatividade e da counidade e análoga à demonstração feita na Proposição A.40. Portanto A° é uma coálgebra.

■

A.5 Módulos e Comódulos

Nesta seção, veremos o conceito de módulo sobre uma álgebra e que o mesmo pode ser dualizado, dando origem à noção de comódulo sobre uma coálgebra.

Definição A.52 *Seja A uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (X, γ), em que X é um espaço vetorial e $\gamma : A \otimes X \to X$ é um* *morfismo de espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes X \arrow[r, "I_A \otimes \gamma"] \arrow[d, "\mu \otimes I_X"'] & A \otimes X \arrow[d, "\gamma"] \\
A \otimes X \arrow[r, "\gamma"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes X \arrow[dd, "\gamma"] \\
k \otimes X \arrow[ur, "\eta \otimes I_X"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\
 & X.
\end{tikzcd}
$$

A definição de A-módulo à direita é análoga, exceto que o morfismo γ agora é dado por $\gamma : X \otimes A \to X$.

Em geral, escrevemos $a \cdot m$ ao invés de $\gamma(a \otimes m)$.

Na definição de A-módulo, partimos de um espaço vetorial e de uma álgebra e definimos uma operação que relaciona as duas estruturas. Quando pensamos no processo de dualização, essa idéia persiste, porém, utilizamos uma coálgebra ao invés de uma álgebra.

Definição A.53 *Seja C uma coálgebra. Um C-comódulo à direita (ou um comódulo à direita sobre C) é um par (M, ρ), em que M é um espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é um morfismo de espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "I_M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes I_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
 & M \otimes k \\
M \otimes C. \arrow[ur, "I_M \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

A comutatividade do primeiro diagrama acima nos diz que $(I_M \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes I_C) \circ \rho$ e a do segundo, diz que $(I \otimes \varepsilon) \circ \rho$ é o isomorfismo canônico.

Analogamente, definimos um C-comódulo à esquerda (ou um comódulo à esquerda sobre C), considerando o morfismo de k-espaços vetoriais $\rho : M \to C \otimes M$.

Assim como no caso das coálgebras, também temos uma notação de Sweedler para comódulos. Dado $m \in M$, escrevemos $\rho(m) = \sum_m m^{(0)} \otimes m^{(1)}$, em que $m^{(0)} \in M$ e $m^{(1)} \in C$.

Utilizando a notação de Sweedler, a comutatividade dos diagramas acima nos diz que

$$\sum_m m^{(0)} \otimes m^{(1)}_{(1)} \otimes m^{(1)}_{(2)} = \sum_m m^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)} \otimes m^{(1)} = \sum_m m^{(0)} \otimes m^{(1)} \otimes m^{(2)} \tag{A.20}$$

e que

$$\sum_m m^{(0)} \varepsilon(m^{(1)}) = m. \tag{A.21}$$

A partir de agora, dada uma coálgebra C, quando nos referirmos a um C-comódulo à direita (M, ρ), a menos que se diga o contrário, omitiremos o morfismo ρ, ao qual denominamos coação, dizendo apenas um C-comódulo à direita.

Exemplo A.54 *Toda coálgebra (C, Δ, ε) é um C-comódulo à direita e à esquerda, com $\rho = \Delta$.*

Exemplo A.55 *Sejam C uma coálgebra e X um espaço vetorial. Então $X \otimes C$ é um C-comódulo à direita, com a aplicação $\rho : X \otimes C \to X \otimes C \otimes C$ dada por $\rho = I \otimes \Delta$. Verifiquemos que o seguinte diagrama* *comuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta"] \arrow[d, "I_X \otimes \Delta"'] & X \otimes C \otimes C \arrow[d, "I_{X\otimes C} \otimes \Delta"] \\
X \otimes C \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta \otimes I_C"] & X \otimes C \otimes C \otimes C.
\end{tikzcd}$$

De fato, sejam $x \in X$ e $c \in C$. Então:

$$\begin{aligned}
((I_X \otimes \Delta \otimes I_C) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_X \otimes \Delta \otimes I_C)(x \otimes (\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)})) \\
&= \sum_c x \otimes \Delta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} \\
&= \sum_{c, c_{(1)}} x \otimes c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \\
&= \sum_c x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
((I_{X\otimes C} \otimes \Delta) \circ (I_X \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes (\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)})) \\
&= \sum_c (I_{X\otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_c x \otimes c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)}) \\
&= \sum_{c, c_{(2)}} x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} \\
&= \sum_c x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.
\end{aligned}$$

Logo, o primeiro diagrama é comutativo. Resta mostrarmos *a comutatividade do segundo diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[d, "I_X \otimes \Delta"'] \arrow[dr, "\simeq", "I_X \otimes \psi"'] & \\
 & X \otimes C \otimes k \\
X \otimes C \otimes C. \arrow[ur, "I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
((I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon) \circ (I \otimes \Delta))(x \otimes c) &= (I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon)(x \otimes (\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)})) \\
&= (I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon)(\sum_c x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_c (I_{X\otimes C} \otimes \varepsilon)(x \otimes c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\
&= \sum_c x \otimes c_{(1)} \otimes \varepsilon(c_{(2)}) \\
&= \sum_c x \otimes c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) \otimes 1_k \\
&= x \otimes \sum_c c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) \otimes 1_k \\
&= x \otimes c \otimes 1_k \\
&= I_X \otimes \psi(x \otimes c).
\end{aligned}$$

Assim como na álgebra e coálgebra, podemos definir uma estrutura de morfismo entre dois C-comódulos. Para tanto, vejamos primeiro que existe essa estrutura para módulos e então, a dualizaremos.

Definição A.56 *Sejam A uma álgebra, (X, γ) e (Y, κ) dois A-módulos à esquerda. Dizemos que uma transformação linear $f : X \to Y$ é um* *morfismo de A-módulos se o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "I_A \otimes f"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\kappa"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Assim, dualizamos essa noção gerando a seguinte definição:

Definição A.57 *Sejam C uma coálgebra, (M, ρ) e (N, ϕ) dois C-comódulos à direita. Dizemos que uma transformação linear $g : M \to N$ é um morfismo de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g \otimes I_C"'] & N \otimes C. \end{tikzcd}$$

Utilizando a notação de Swedler, temos:

$$\phi(g(m)) = \sum_m g(m^{(0)}) \otimes m^{(1)},$$

para todo $m \in M$.

Ressaltamos que, embora estejamos trabalhando com comódulos à direita, estes resultados são válidos para comódulos à esquerda também.

Definição A.58 *Seja M um C-comódulo à direita. Um subespaço ve-*

torial N de M é dito um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.

Seja C uma coálgebra. Notemos que I é um C-subcomódulo à direita de C se, e somente se, I é um coideal à direita da coálgebra C.

De fato, como (C, Δ) define a estrutura de C-comódulo da coálgebra C e I é um C-subcomódulo à direita de C, então $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$. Logo, I é coideal à direita da coálgebra C. Por outro lado, se I é um coideal à direita de C, então (I, Δ) é um C-subcomódulo à direita de C.

Teorema A.59 (Teorema fundamental de comódulos) *Sejam C uma coálgebra e seja (M, ρ) um C-comódulo à direita. Então todo elemento de M pertence a um subcomódulo de M de dimensão finita.*

Demonstração: Seja $\{c_i\}_{i \in I}$ uma base para C. Assim, para todo $m \in M$, temos que $\rho(m) = \sum_j m_j \otimes c_j$, em que $\{m_j\}$ é uma família quase nula.

Assim, definimos o subespaço $W = span\{m_j\}$ de M. Claramente, W tem dimensão finita, pois é gerado por $\{m_j\}$ e $\{m_j\}$ é uma família quase nula, isto é, existem finitos índices $j \in I$ tais que $m_j \neq 0$

Notemos que, para cada c_i, $\Delta(c_i) = \sum\limits_{j,k} a_{ijk} c_j \otimes c_k$, e portanto,

$$\sum_k \rho(m_k) \otimes c_k = \sum_{i,j,k} m_i \otimes a_{ijk} c_j \otimes c_k.$$

Segue que, $\rho(m_k) = \sum m_i \otimes a_{ijk} c_j$, o que implica em W ser um subcomódulo de dimensão finita.

Ainda, sabemos que $m \otimes 1 = ((I \otimes \varepsilon) \circ \rho)(m)$ e consequentemente, $m = \sum \varepsilon(c_i) m_i \in W$.

■

Corolário A.60 (Teorema fundamental das Coálgebras) *Todo elemento de uma coálgebra C pertence a uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração: Sabemos que (C, Δ) é um C-comódulo à direita. Então, pelo teorema anterior, dado $c \in C$, existe um subcomódulo à direita (isto é, um coideal à direita) de dimensão finita V de C contendo c.

Assim, se $\{v_i\}$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$ é uma base de V, temos que, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\Delta(v_i) = \sum_{j=1}^{r} v_j \otimes c_{ji},$$

em que $c_{ji} \in C$.

Daí, aplicando $\Delta \otimes I_C$ na expressão acima e usando a coassociatividade da coálgebra, temos:

$$\sum_{k,j} v_k \otimes c_{kj} \otimes c_{ji} = \sum_{j} v_j \otimes \Delta(c_{ji}).$$

Logo, $\Delta(c_{ki}) = \sum_{j} c_{kj} \otimes c_{ji}$, e portanto, o subespaço gerado por V e por $\{c_{ji}\}_{i,j=1}^{r}$ é uma subcoálgebra de dimensão finita contendo c.

■

Sejam (M, ρ) um C-comódulo à direita e N um C-subcomódulo de M. Podemos definir o quociente entre M e N através de suas estruturas de espaços vetoriais, em que $\pi : M \to M/N$ é a aplicação canônica, definida por $\pi(m) = \overline{m}$, para todo $m \in M$. Claramente, π é linear.

Proposição A.61 *Sejam (M, ρ) um C-comódulo à direita e N um C-*

subcomódulo. Então existe uma única estrutura de C-comódulo à direita em M/N tal que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.

Demonstração: Como $\pi(N) = 0$, então:

$$(\pi \otimes I_C) \circ \rho(N) \subseteq (\pi \otimes I_C)(N \otimes C) \subseteq \pi(N) \otimes C = 0.$$

Logo, $N \subseteq \ker((\pi \otimes I_C) \circ \rho)$. Portanto, existe um único morfismo $\bar{\rho}$ de k-espaços vetoriais tal que o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, dashed, "\bar{\rho}"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\pi \otimes I_C"] & (M/N) \otimes C
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $\bar{\rho} \circ \pi = (\pi \otimes I_C) \circ \rho$.

Assim, para todo $m \in M$, segue que,

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\overline{m}) &= (\bar{\rho} \circ \pi)(m) \\
&= ((\pi \otimes I_C) \circ \rho)(m) \\
&= (\pi \otimes I_C)(\sum_m m^{(0)} \otimes m^{(1)}) \\
&= \sum_m \pi(m^{(0)}) \otimes m^{(1)} \\
&= \sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\rho}(\overline{m}) = \sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)} \in M/N \otimes C$. Mostremos que $(I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho}$.

De fato, seja $\overline{m} \in M/N$. Então

$$\begin{aligned}((I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho})(\overline{m}) &= (I_{M/N} \otimes \Delta)(\sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)}) \\ &= \sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)}_{(1)} \otimes m^{(1)}_{(2)} \\ &= \sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)} \otimes m^{(2)}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}((\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho})(\overline{m}) &= (\bar{\rho} \otimes I)(\sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)}) \\ &= \sum_m \bar{\rho}(\overline{m}^{(0)}) \otimes m^{(1)} \\ &= \sum_m \overline{m}^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)} \otimes m^{(1)} \\ &= \sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)} \otimes m^{(2)},\end{aligned}$$

Portanto, $(I_{M/N} \otimes \Delta) \circ \bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I_C) \circ \bar{\rho}$, o que nos diz também que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.

■

O comódulo M/N com a estrutura dada acima é chamado *comódulo quociente* de M com respeito ao subcomódulo N.

Proposição A.62 *Sejam M e N dois C-comódulos à direita e $f : M \to N$ um morfismo de comódulos. Então $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N e* $\ker(f)$ *é um C-subcomódulo de M.*

Demonstração: Sejam $\rho_M : M \to M \otimes C$ e $\rho_N : N \to N \otimes C$ os morfismos que definem as estruturas de C-comódulo sobre M e N respectivamente.

Como f é um morfismo de comódulos, temos que

$$((f \otimes I_C) \circ \rho_M)(\ker(f)) = \rho_N(f(\ker(f))) = 0.$$

Portanto,

$$\rho_M(\ker(f)) \subseteq \ker(f \otimes I_C) = \ker(f) \otimes C,$$

em que a última igualdade decorre do Lema A.12.

Assim, $\ker(f)$ é um subcomódulo de M.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho_N(Im(f)) &= \rho_N(f(M)) = (\rho_N \circ f)(M) \\ &= (f \otimes I_C) \circ \rho_M)(M) \subseteq (f \otimes I_C)(M \otimes C) = Im(f) \otimes C \end{aligned}$$

e segue que, $Im(f)$ é um subcomódulo de N.

$\blacksquare$

Teorema A.63 (Teorema do isomorfismo para comódulos) *Sejam $f : M \to N$ um morfismo de C-comódulos à direita, $\pi : M \to M/\ker(f)$ e $i : Im(f) \to N$, a projeção e a inclusão canônicas, respectivamente. Então existe um único isomorfismo de C-comódulos $\bar{f} : M/\ker(f) \to Im(f)$ tal que o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & Im(f). \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração: Pelo Teorema do Isomorfismo de espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{f} : M/\ker(f) \to Im(f)$ tal que $\bar{f}(\overline{m}) = f(m)$, isto é, $(i \circ \bar{f} \circ \pi)(m) = f(m)$, para todo $m \in M$. Claramente, $\bar{f}$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Vejamos que $\bar{f}$ é um morfismo de comódulos.

Sejam $\omega : M/\ker(f) \to (M/\ker(f)) \otimes C$ e $\vartheta : Im(f) \to Im(f) \otimes C$ os morfismos que definem a estrutura de comódulo sobre $M/\ker(f)$ e $Im(f)$ respectivamente. Mostremos que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
M/\ker(f) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\omega"'] & Im(f) \arrow[d, "\vartheta"] \\
(M/\ker(f)) \otimes C \arrow[r, "\bar{f}\otimes I_C"] & Im(f) \otimes C.
\end{tikzcd}$$

Para todo $\overline{m} \in M/\ker(f)$, temos:

$$\begin{aligned}
((\bar{f} \otimes I_C) \circ \omega)(\overline{m}) &= (\bar{f} \otimes I_C)(\sum_m \overline{m}^{(0)} \otimes m^{(1)}) \\
&= \sum_m \bar{f}(\overline{m}^{(0)}) \otimes m^{(1)} \\
&= \sum f(m^{(0)}) \otimes m^{(1)} \\
&\overset{(*)}{=} \sum f(m)^{(0)} \otimes m^{(1)} \\
&= \vartheta(f(m)) = (\vartheta \circ \bar{f})(\overline{m}),
\end{aligned}$$

em que igualdade $(*)$ segue do fato de que f é um morfismo de comódulos. Logo, $(\bar{f} \otimes I_C) \circ \omega = \vartheta \circ \bar{f}$, ou seja, $\bar{f}$ é um morfismo de comódulos à direita. ■

Lema A.64 *Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra. Se (M, ρ) é um C-comódulo à direita então M é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração: Sejam $m \in M$ e $f \in C^*$. Como $\rho(m) = \sum_m m^{(0)} \otimes m^{(1)}$, então M se torna um C^*-módulo à esquerda via ação dada por

$$f \cdot m = \sum_m f(m^{(1)})m^{(0)}.$$

Ainda, seja $\gamma : C^* \otimes M \to M$ a ação de C^* em M, ou seja, $\gamma(f \otimes m) = f \cdot m$. Como ε é a unidade de C^*, temos que:

$$\gamma(1_{C^*} \otimes m) = \sum_m \varepsilon(m^{(0)})m^{(1)} = m,$$

para todo $m \in M$.

Por fim, sejam $f,\ g \in C^*$, então, para todo $m \in M$ temos:

$$\begin{aligned} \gamma(f \otimes \gamma(g \otimes m)) &= \textstyle\sum_m \gamma(f \otimes g(m^{(1)})m^{(0)}) \\ &= \textstyle\sum_m g(m^{(1)})\gamma(f \otimes m^{(0)}) \\ &= \textstyle\sum_{m,m^{(0)}} g(m^{(1)})f(m^{(0)(1)})m^{(0)(0)} \\ &= \textstyle\sum_{m,m^{(0)}} m^{(0)(0)}f(m^{(0)(1)})g(m^{(1)}). \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \gamma((f * g) \otimes m) &= \textstyle\sum_m (f * g)(m^{(1)})m^{(0)} \\ &= \textstyle\sum_{m,m^{(1)}} f(m^{(1)}_{(1)})g(m^{(1)}_{(2)})m^{(0)} \\ &= \textstyle\sum_{m,m^{(1)}} m^{(0)}f(m^{(1)}_{(1)})g(m^{(1)}_{(2)}). \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Porém, como M é um C-comódulo à direita, sabemos que $(\rho \otimes I) \circ \rho = (I \otimes \Delta) \circ \rho$. Logo, (I) e (II) são iguais, e segue que:

$$\gamma((f * g) \otimes m) = \gamma(f \otimes \gamma(g \otimes m)),$$

ou seja, (M, γ) é um C^*-módulo à esquerda.

■

Exemplo A.65 *Seja C uma coálgebra. Pelo Lema A.64, a estrutura de comódulo de C induz uma ação à esquerda de C^* em C dada por*

$$f \rightharpoonup c = \sum_c f(c_{(2)})c_{(1)} \tag{A.22}$$

para $f \in C^*$ e $c \in C$. Do mesmo modo, existe uma ação natural à direita de C^* em C, dada por

$$c \leftharpoonup f = \sum_c f(c_{(1)})c_{(2)}. \tag{A.23}$$

Exemplo A.66 *Seja A uma álgebra. De modo análogo, podemos definir uma ação à esquerda de A em A^*. Para todo $a \in A$ e $f \in A^*$, $a \rightharpoonup f$ é o elemento de A^* tal que, para todo $b \in A$,*

$$(a \rightharpoonup f)(b) = f(ba). \tag{A.24}$$

Do mesmo modo, definimos uma ação à direita $f \leftharpoonup a$ de A em A^*, em que

$$(f \leftharpoonup a)(b) = f(ab). \tag{A.25}$$

Apêndice B

Módulo Plano e Fielmente Plano

Iniciamos este capítulo relembrando as noções de álgebra e de módulo, para então definirmos módulo plano e fielmente plano, e vermos os principais resultados envolvendo essa teoria.

Definição B.1 *Uma k-álgebra unital A é um anel com unidade que possui uma estrutura de k-espaço vetorial e para todo $\alpha \in k$ e todo a, $b \in A$ temos:*

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b)$$

em que ab representa a multiplicação no anel A dos elementos a e b.

Definição B.2 *Seja (A, μ, η) uma k-álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (X, γ), em que X é um k-espaço vetorial e $\gamma : A \otimes X \to X$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo* *comutam*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes X \arrow[r, "I_A \otimes \gamma"] \arrow[d, "\mu \otimes I_X"'] & A \otimes X \arrow[d, "\gamma"] \\
A \otimes X \arrow[r, "\gamma"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes X \arrow[dd, "\gamma"] \\
K \otimes X \arrow[ur, "\eta \otimes I_X"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\
 & X.
\end{tikzcd}$$

Fatos relembrados, passamos ao estudo dos módulos planos e fielmente planos, tais módulos possuem boas propriedades com respeito ao produto tensorial. Por se tratar de resultados auxiliares, demonstramos apenas os que são utilizados diretamente na dissertação. Ao leitor interessado, indicamos ([20], Capítulo 2, Seção 4).

Primeiramente, se temos um R-módulo à direita P, com R um anel fixado, podemos definir, a partir da propriedade universal do produto tensorial sobre R, um funtor covariante da categoria dos R-módulos à esquerda na categoria dos grupos abelianos, a saber, o funtor produto tensorial:

$$\begin{array}{rccc} P \otimes_R (\ \ ): & {}_RMod & \to & Ab \\ & M & \mapsto & P \otimes_R M. \end{array}$$

Mais geralmente, se P é um (S, R)-bimódulo, temos dois funtores, $P \otimes_R (\ \ )$ e $(\ \ ) \otimes_S P$, o primeiro indo da categoria dos (R, T)-bimódulos na categoria dos $(S, T) - bimdulos$, o segundo da categoria dos (T, S)-bimódulos na categoria dos (T, R)-bimódulos.

Um resultado importante sobre o funtor produto tensorial é que ele preserva sequências exatas à esquerda, para uma demonstração desse resultado, veja [20].

Teorema B.3 *Seja P um R-módulo à direita e*

$$0 \to K \to L \to M \to 0$$

uma sequência exata de R-módulos à esquerda, então a sequência abaixo é exata,

$$P \otimes_R K \to P \otimes_R L \to P \otimes_R M \to 0.$$

A injetividade só é preservada para uma classe especial de módulos, os módulos planos.

Definição B.4 *Um R-módulo à direita, P_R, é dito plano se o funtor $P \otimes_R (\ )$ é exato na categoria dos R-módulos à esquerda ${}_R\mathfrak{M}$, ou seja, dada a sequência exata de R-módulos,*

$$0 \longrightarrow {}_RK \xrightarrow{f} {}_RL \xrightarrow{g} {}_RM \longrightarrow 0,$$

então,

$$0 \longrightarrow P \otimes_R K \xrightarrow{I_P \otimes f} P \otimes_R L \xrightarrow{I_P \otimes g} P \otimes_R M \longrightarrow 0,$$

também é uma sequência exata de R-módulos.

A seguir, demonstramos um resultado fundamental que caracteriza os módulos planos a partir de módulos projetivos.

Lema B.5 *Todo módulo projetivo é plano.*

Demonstração: Seja P_R um R-módulo projetivo, queremos mostrar que P_R é plano, ou seja, dada a sequência exata de R-módulos:

$$0 \longrightarrow {}_RK \xrightarrow{f} {}_RL \xrightarrow{g} {}_RM \longrightarrow 0,$$

então,

$$0 \longrightarrow P \otimes_R K \xrightarrow{I_P \otimes f} P \otimes_R L \xrightarrow{I_P \otimes g} P \otimes_R M \longrightarrow 0,$$

também é uma sequência exata de R-módulos.

Para tanto, basta mostrarmos que $I_P \otimes f$ é um morfismo injetivo, uma vez que $I_P \otimes g$ é sobrejetivo e $Im(I_P \otimes f) = \ker(I_P \otimes g)$ saem diretamente de resultados da teoria de produto tensorial.

Assim, seja $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \otimes k_j \in \ker(I \otimes f)$, então $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \otimes f(k_j) = 0$.

Agora, como P_R é projetivo, existem $\pi_\lambda : P \to R$, tal que $\pi_\lambda(p) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de termos, e $\{e_\lambda\}$, em que $\lambda \in \Lambda$ é um conjunto de índices, tais que $\pi_\lambda(e_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$ e,

$$p = \sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \pi_\lambda(p),$$

o que implica em,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \otimes \pi_\lambda(p_j) f(k_j) = 0,$$

e aplicando $\pi_\mu \otimes I$ a esta igualdade e usando a injetividade de f, temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_j \pi_\lambda(p_j) f(k_j) \\ &= f(\textstyle\sum_j \pi_\lambda(p_j) k_j) \\ &\Rightarrow \textstyle\sum_j \pi_\lambda(p_j) k_j = 0. \end{aligned}$$

Com isso, segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes_R \sum_{j=1}^{n} \pi_\lambda(p_j)k_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\pi_\lambda(p_j)\otimes k_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j \otimes k_j. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{j=1}^{n} p_j \otimes k_j = 0$ como queríamos e então temos que $\ker(I_P \otimes f) = \{0\}$, ou seja, $I_P \otimes f$ é injetivo.

■

O teorema a seguir nos mostra uma série de equivalências, as quais são utilizadas para definir módulos fielmente planos, sua demonstração pode ser vista em ([20], Capítulo 2, Seção 4).

Teorema B.6 *Para qualquer módulo à direita P sobre um anel R, são equivalentes:*

(i) A sequência

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

é exata, se, e somente se,

$$P \otimes_R M' \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M''$$

é uma sequência exata;

(ii) P é um módulo plano, e para qualquer R-módulo à esquerda M, $P \otimes_R M = 0$ implica em $M = 0$;

(iii) P é um módulo plano, e o morfismo $\phi : M' \to M''$, na categoria dos R-módulos à esquerda $({}_R\mathfrak{M})$, é nulo se o morfismo induzido $I_P \otimes \overline{\phi} : P \otimes_R M' \to P \otimes_R M''$ é nulo.

Definição B.7 *Se qualquer uma dessas condições é satisfeita, dizemos que P_R é um módulo fielmente plano.*

No que segue, damos alguns resultados da teoria de módulos fielmente planos e finalizamos com um teorema que é de fundamental importância no Capítulo 4. Indicamos ao leitor interessado nas demonstrações ([20], Capítulo 2, Seção 4).

Proposição B.8 *Um R-módulo à direita plano P_R é fielmente plano se, e somente se, $Pm \neq P$, para qualquer ideal maximal à esquerda m de R.*

Para darmos sequência, definamos o que significa dizer que um módulo é fiel. Para tanto, usaremos a noção de anulador de um R-módulo.

Definição B.9 *Seja R um anel e M um R-módulo, definimos por $A_{n_R}(M) := \{r \in R : \ r \cdot m = 0, \text{ para todo } m \in M\}$ o conjunto dos anuladores do módulo M.*

Definição B.10 *Dizemos que M é um R-módulo fiel se, e somente se, $A_{n_R}(M) = \{0\}$.*

Proposição B.11 *Todo módulo fielmente plano é módulo fiel e plano.*

Consideremos agora o morfismo $\xi : R \to S$, onde S é um anel comutativo com unidade. Então S pode ser visto como um R-módulo à direita via ξ. Vejamos quando S_R é um R-módulo fielmente plano.

Teorema B.12 *Seja $\xi : R \to S$ como acima. São equivalentes:*

(i) S_R é fielmente plano;

(ii) S_R é plano e para qualquer ideal à esquerda $U \subseteq R$, $\xi^{-1}(SU) = U$;

(iii) S_R é plano, e para qualquer ideal à esquerda maximal $m \subseteq R$, existe um ideal à esquerda maximal $m' \subseteq S$ tal que $m = \xi^{-1}(m')$;

(iv) O morfismo ξ é injetivo e o R-módulo à direita $(S/\xi(R))_R$ é plano.

E no caso em que R e S são anéis comutativos, também é equivalente:

(v) S_R é plano e para qualquer ideal primo $p \subseteq R$, existe um ideal primo $p' \subseteq S$ tal que $p = \xi^{-1}(p')$.

Definição B.13 *Se o homomorfismo de anéis $\xi : R \to S$ satisfaz as condições do teorema anterior, dizemos que ξ é fielmente plano à direita, ou que S é uma extensão fielmente plana à direita de R.*

Proposição B.14 *Sejam $\xi : R \to S$ fielmente plana à direita e $\xi(R) \subseteq Z(S)$. Então:*

(i) Um R-módulo à esquerda M é finitamente gerado e projetivo se, e somente se, o S-módulo à esquerda $S \otimes_R M$ é finitamente gerado e projetivo;

(ii) Um R-módulo à esquerda M é plano (respectivamente fielmente plano) se, e somente se, o S-módulo à esquerda $S \otimes_R M$ é plano (respectivamente fielmente plano).

Finalizamos este apêndice mostrando que um R-módulo finitamente gerado e projetivo, sob certas condições, é fielmente plano.

Proposição B.15 *Sejam R um anel comutativo com unidade e P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Então P é R-módulo fielmente plano à esquerda e à direita.*

Demonstração: Vamos fazer para à direita. Para a demonstração à esquerda, os resultados são análogos. Tomemos N é R-módulo, vamos mostrar que se $P \otimes_R N = 0$, então N é o módulo nulo, ou seja, $N = \{0\}$.

Primeiramente, como P é projetivo finitamente gerado, existem $\{p_1, \cdots, p_n \in P\}$ e $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in Hom_R(P, R)$ tal que para todo $p \in P$, tenhamos

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_i(p).$$

Com isso, podemos mostrar que a seguinte aplicação é um isomorfismo de R-módulos, para qualquer R-módulo M:

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & Hom_R(P \otimes_R N, M) & \rightarrow & Hom_R(P_R, Hom_R(N, M)) \\ & F & \mapsto & \Phi(F), \end{array}$$

em que

$$\begin{array}{rccccccc} \Phi(F): & P & \rightarrow & Hom_R(N, M) & & & & \\ & p & \mapsto & \Phi(F)(p): & & N & \rightarrow & M \\ & & & & & n & \mapsto & F(p \otimes n). \end{array}$$

A R-linearidade e boa definição de Φ são facilmente verificadas, em que a estrutura de R-módulo em $Hom_R(N, M)$ é dada por

$$(a \cdot f)(m) = af(m).$$

Verifiquemos a injetividade de Φ:

Seja $F \in \ker(\Phi)$, portanto, $F(p) \equiv 0$, para todo $p \in P$, o que implica em $F(p)(n) = 0$, para todo $n \in N$, e consequentemente, $F(p \otimes n) = 0$, para todo $p \in P$ e todo $n \in N$. Como F é aditiva, temos que $F \equiv 0$ em $P \otimes_R N$.

A sobrejetividade vem do fato que P é projetivo finitamente gerado: seja $f \in Hom_R(P, Hom_R(N, P))$, defina:

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f}: & P \times N & \to & M \\ & (p, n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(p) f(p_i)(n). \end{array}$$

É fácil vermos que $\widehat{f}$ é R-bilinear, portanto, pode ser facilmente levantada para

$$\begin{array}{rccl} \overline{f}: & P \otimes_R N & \to & M \\ & p \otimes n & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(p) f(p_i)(n). \end{array}$$

Voltando ao caso estudado, suponhamos $P \otimes_R N = 0$ e seja $\{x_i\}_{i \in I}$ um conjunto de geradores de N, assim, para todo $n \in N$, $n = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda x_\lambda$. Tomemos também $M = \underset{\lambda \in \Lambda}{R x_\lambda}$ o módulo livre gerado pelos geradores de N.

Finalmente, consideremos as aplicações

$$\{\theta_{i,\lambda}\}_{\substack{i=1,\cdots,n \\ \lambda \in \Lambda}} \subseteq Hom_R(P, Hom_R(N, M)),$$

tais que $\theta_{i_0,\lambda_0}(p)(n) = (\varphi_{i_0}(p) n_{\lambda_0} \delta_{\lambda_0 A})_{A \in \Lambda}$.

Pela sobrejetividade de Φ, existe $\overline{\theta}_{i_0,\lambda_0} \in Hom_R(P \otimes_R N, M)$ tal que $\Phi(\overline{\theta}_{i_0,\lambda_0}) = \theta_{i_0,\lambda_0}$.

Por hipótese, $P \otimes_R N = 0$, logo $Hom_R(P \otimes_R N, M) = \{0\}$ e portanto $\theta_{i_0,\lambda_0} \equiv 0$, para todo $i_0 \in 1, \cdots, n$ e todo $\lambda_0 \in \Lambda$.

Assim, para todo $n \in N$ e todo $p \in P$, temos:

$$\theta_{i_0,\lambda_0}(p)(n) = (\varphi_{i_0}(p)n_{\lambda_0}\delta_{\lambda_0\lambda})_{\lambda\in\Lambda} = (0)_{\lambda\in\Lambda}.$$

O que implica em $\varphi_{i_0}(p)n_{\lambda_0} = 0$, para todo $p \in P$, todo $\lambda_0 \in \Lambda$ e todo $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$.

E como podemos variar os $p \in P$ convenientemente, podemos escolher $p \in P$ tal que $\varphi_{i_0}(p) = 1_R$, logo, $n_{\lambda_0} = 0$ para todo $\lambda_0 \in \Lambda$, o que nos diz que $n = 0$, para todo $n \in N$, ou seja, $N = 0$.

$\blacksquare$

Apêndice C

Resultados Importantes de Álgebra

C.1 Lema do Diamante

O Lema do Diamante é um importante resultado para encontrar bases em álgebras cujos elementos são expressos por polinômios não comutativos.

Iniciamos esta seção definindo a notação necessária para o estudo do mesmo. A partir disso, enunciamos os resultados de maior importância para nosso estudo. Ao leitor interessado, indicamos [3] para maiores detalhes e para as demonstrações.

Sejam k um anel comutativo com unidade, X um conjunto, $\langle X \rangle$ o semigrupo livre com unidade gerado por X, e $k\langle X \rangle$ a k-álgebra livre gerada por X.

Ainda, seja S um conjunto de pares da forma $\sigma = (W_\sigma, f_\sigma)$, em que $W_\sigma \in \langle X\rangle$ e $f_\sigma \in k\langle X\rangle$. Para cada $\sigma \in S$ e $A,\ B \in \langle X\rangle$, definimos o k-endomorfismo $r_{A\sigma B} : k\langle X\rangle \to k\langle X\rangle$ tal que $r_{A\sigma B}$ fixa todos os elementos de $\langle X\rangle$ com excessão de $AW_\sigma B$ que é enviado em $Af_\sigma B$. Ao conjunto S nomeamos *sistema de reduções* e aos morfismos $r_{A\sigma B}$ chamamos *reduções*.

Dizemos que uma redução $r_{A\sigma B}$ age trivialmente sobre um elemento $a \in k\langle X\rangle$ se o coeficiente de $AW_\sigma B$ em a é nulo, ou seja, $r_{A\sigma B}(a) = a$. Dizemos que a é irredutível sobre S se toda redução age trivialmente sobre a. O k-submódulo de todos os elementos irredutíveis de $k\langle X\rangle$ será denotado por $k\langle X\rangle_{irr}$. Uma sequência finita de reduções $r_1, \cdots, r_n$ ($r_i = r_{A_i\sigma_i B_i}$) é dita final em a se $(r_n \circ \cdots \circ r_1)(a) \in k\langle X\rangle_{irr}$.

Além disso, dizemos que $a \in k\langle X\rangle$ é de redução finita se para toda sequência infinita de reduções $r_1, r_2, \cdots$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant i_0$, r_i age trivialmente em $(r_{i-1} \circ \cdots \circ r_1)(a)$. Notamos que se a é de redução finita, então toda sequência maximal de reduções $\{r_i\}$ de forma que r_i age não trivialmente em $(r_{i-1} \circ \cdots \circ r_1)(a)$ é finita, e portanto, uma sequência final em a. Segue da própria definição que os elementos de redução finita denotam um k-submódulo de $k\langle X\rangle$.

Por fim, dizemos que um elemento $a \in k\langle X\rangle$ é de redução única se ele é de redução finita e a imagem de a sobre todas suas sequências finais coincidirem. A este valor denotamos $r_S(a)$.

Lema C.1 *No contexto acima são válidas as seguintes afirmações:*

(i) O conjunto dos elementos de redução única formam um k-submódulo de $k\langle X\rangle$ e r_S é uma aplicação k-linear deste submódulo em $k\langle X\rangle_{irr}$.

(ii) Suponhamos que $a,\ b,\ c \in k\langle X\rangle$ são tais que para todos os monômios $A,\ B,\ C$ aparecendo com coeficientes não nulos em

a, b, c, respectivamente, então, o produto ABC é de redução única (em particular, por (i), isto implica que abc é de redução única). E se r é qualquer composição finita de reduções, então $ar(b)c$ é de redução única e $r_S(ar(b)c) = r(abc)$.

Para enunciarmos o Lema do Diamante, precisamos definir o que chamamos de ambiguidade de sobreposição e ambiguidade de inclusão, a saber, uma quíntupla (σ, τ, A, B, C), com $\sigma, \tau \in S$, e elementos $A, B, C \in \langle X\rangle \backslash \{1\}$, tal que $W_\sigma = AB$ e $W_\tau = BC$ é chamada ambiguidade de sobreposição. Tal ambiguidade é resolvível se existem composições de reduções r e r' tais que $r(f_\sigma C) = r'(Af_\tau)$. Esta é uma condição de confluência nos resultados das duas formas indicadas de reduzir ABC (condição do diamante).

Do mesmo modo, uma quíntupla (σ, τ, A, B, C), em que os elementos $\sigma, \tau \in S$, $A, B, C \in \langle X\rangle \backslash \{1\}$, tal que $W_\sigma = B$ e $W_\tau = ABC$ é chamada ambiguidade de inclusão. A mesma será resolvível se $Af_\sigma C$ e f_τ podem ser resolvidas para um elemento comum.

Definimos também uma ordem parcial de semi-grupos em $\langle X\rangle$, a qual entendemos por uma ordem parcial $\leqslant$ tal que $B \leqslant B'$ implica em $ABC \leqslant AB'C$, para A, B, B', $C \in \langle X\rangle$. Dizemos que essa ordem é compatível com S se para todo $\sigma \in A$, f_σ é uma combinação linear de monômios estritamente menores que W_σ.

Finalizamos denotando por I_S o ideal bilateral de $k\langle X\rangle$ gerado por elementos da forma $W_\sigma - f_\sigma$. Ainda, se $\leqslant$ é uma ordem parcial de semi-grupos em $\langle X\rangle$ compatível com o sistema de reduções S, e A é um elemento qualquer de $\langle X\rangle$, I_A denota o submódulo de $k\langle X\rangle$ gerado por todos os elementos $B(W_\sigma - f_\sigma)C$ tal que $BW_\sigma C < A$. Dizemos que uma ambiguidade de sobreposição (respectivamente de inclusão)

(σ, τ, A, B, C) é resolvível em relação a $\leqslant$ se $f_\sigma C - Af_\tau \in I_{ABC}$ (respectivamente, $Af_\sigma C - f_\tau \in I_{ABC}$).

Teorema C.2 (Lema do Diamante) *Sejam S um sistema de reduções para a álgebra livre $k\langle X\rangle$ e $\leqslant$ uma ordem parcial de semi-grupos compatível com S e satisfazendo a condição de cadeias descendentes. Então são equivalentes:*

(i) Todas as ambiguidades de S são resolvíveis;

(i') Todas as ambiguidades de S são resolvíveis relativo à $\leqslant$;

(ii) Todos os elementos de $k\langle X\rangle$ são de redução única sob S;

(iii) Um conjunto de representantes (para cada $b \in R$, existe único $a \in k\langle X\rangle$ tal que $b = [a]$) em $k\langle X\rangle$ para os elementos da álgebra $R = k\langle X\rangle/I_S$ é dado pelo k-submódulo $k\langle X\rangle_{irr}$ gerado pelos monômios irredutíveis de $\langle X\rangle$.

Neste caso, a álgebra R pode ser identificada com o k-submódulo $k\langle X\rangle_{irr}$ que se torna uma álgebra com multiplicação dada por $a \cdot b = r_S(ab)$.

C.2 Lema da Cobra

Lema C.3 (Lema da cobra) *Sejam R uma anel e A, B, C, A', B' e C', R-módulos à esquerda tais que o seguinte diagrama de morfismos de R-módulos à esquerda é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0, \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C &
\end{tikzcd}$$

com linhas exatas.

Então existe um morfismo $\delta : \ker(\gamma) \to coker(\alpha)$ *tal que a seguinte sequência é exata:*

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\overline{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\overline{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} coker(\alpha) \xrightarrow{\overline{f}'} coker(\beta) \xrightarrow{\overline{g}'} coker(\gamma),$$

em que $\overline{f}$ *e* $\overline{g}$ *são as restrições de* f *e* g *respectivamente e* $\overline{f}'$ *e* $\overline{g}'$ *são morfismos induzidos. Ainda, se* f *é injetora e* g' *é sobrejetora então* $\overline{f}$ *é injetora e* $\overline{g}'$ *é sobrejetora respectivamente.*

C.3 Lema de Dedekind

Lema C.4 (Lema de Dedekind) *Sejam* E *um corpo e* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n \in Aut(E)$ *distintos. Então eles são linearmente independentes, isto é, existem* $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in E$ *tais que* $T = \gamma_1\sigma_1 + \cdots + \gamma_n\sigma_n = 0$*, implica em* $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$.

Apêndice D

Demonstração da Proposição 4.12

De acordo com o que vimos na demonstração da Proposição 4.12 no Capítulo 4, mostremos que $\overline{\psi}_v * \psi_v = \eta \circ \varepsilon = \psi_v * \overline{\psi}_v$.

Demonstração: Provaremos o resultado para a base de A_+. De fato, sejam $T_{11}^p T_{12}^r,\ T_{22}^k T_{12}^l$ elementos da base. Consideraremos os casos em que as potências p, r, k, l são múltiplos de $3\mathbb{Z}/\{0\}$ e o caso em que nenhuma delas é uma potência de 3, os casos mistos, onde uma, duas ou três dessas potências são múltiplos de 3 é feito de modo análogo e portanto, omitiremos. Iniciamos com o caso dos múltiplos de 3, assim, $p = 3i,\ r = 3j,\ k = 3s$ e $l = 3t$, logo,

$$
\begin{aligned}
\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) &= \sum_{\mu=0}^{3j} \begin{pmatrix} 3j \\ \mu \end{pmatrix} \psi_v(T_{11}^{3i+\mu}T_{12}^{3j-\mu})\overline{\psi}_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{\mu}T_{22}^{3j-\mu}) \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 3j \\ 0 \end{pmatrix} T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{0}T_{22}^{3j}) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 3j \\ 3j \end{pmatrix} T_{11}^{3(i+j)}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{22}^{0}) \\
&\overset{i\geq j}{\underset{i<j}{=}} \begin{cases} T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{11}^{3(i-j)}T_{12}^{0}) \\ \qquad +T_{11}^{3(i+j)}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0}T_{22}^{0})S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) \\ T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{22}^{3(j-i)}T_{12}^{0}) \\ \qquad +T_{11}^{3(i+j)}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0}T_{22}^{0})S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}S(T_{11}^{3(i-j)}) + T_{11}^{3(i+j)}S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) \\ T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}S(T_{22}^{3(j-i)}) + T_{11}^{3(i+j)}S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{22}^{3(i-j)} - T_{11}^{3(i+j)}T_{12}^{3j}T_{22}^{3i} \\ T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{11}^{3(j-i)} - T_{11}^{3(i+j)}T_{12}^{3j}T_{22}^{3i} \end{cases} \\
&= \begin{cases} T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{22}^{3i}T_{11}^{3j} - T_{11}^{3(i+j)}T_{12}^{3j}T_{22}^{3i} = 0 = \eta\circ\varepsilon(T_{11}^{p}T_{12}^{r}) \\ T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{11}^{3j}T_{22}^{3i} - T_{11}^{3(i+j)}T_{12}^{3j}T_{22}^{3i} = 0 = \eta\circ\varepsilon(T_{11}^{p}T_{12}^{r}) \end{cases},
\end{aligned}
$$

se $r \neq 0$.

Em que $(*)$ é válido, pois ψ_v e $\overline{\psi}_v$ atingem valores iguais a zero para potências de T_{12} diferentes de zero e $3\mathbb{Z}$. E ainda, $T_{11}T_{22} = 1_{A_+}$, o que explica a terceira linha da equação.

Do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}_v * \psi_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}) &= \sum_{\mu=0}^{3j}\begin{pmatrix} 3j \\ \mu \end{pmatrix}\overline{\psi}_v(T_{11}^{3i+\mu}T_{12}^{3j-\mu})\psi_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{\mu}T_{22}^{3j-\mu}) \\
&= \begin{pmatrix} 3j \\ 0 \end{pmatrix}\overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j})\psi_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{0}T_{22}^{3j}) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 3j \\ 3j \end{pmatrix}\overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})S(T_{11}^{3(i+j)})\psi_v(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}T_{22}^{0}) \\
&= \overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j})T_{11}^{3i}T_{22}^{3j}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0}T_{22}^{0}) \\
&\qquad + \overline{\psi}_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0})S(T_{11}^{3(i+j)})T_{11}^{3i}T_{12}^{3j}\psi_v(T_{11}^{0}T_{12}^{0}T_{22}^{0}) \\
&= S(T_{11}^{3i}T_{12}^{3j})T_{11}^{3i}T_{22}^{3j} + S(T_{11}^{3(i+j)})T_{11}^{3i}T_{12}^{3j} \\
&= -T_{12}^{3j}T_{22}^{3i}T_{11}^{3i}T_{22}^{3j} + T_{22}^{3(i+j)}T_{11}^{3i}T_{12}^{3j} = 0 = \eta\circ\varepsilon(T_{11}^{p}T_{12}^{r}),
\end{aligned}
$$

se $r \neq 0$.

Provemos que o mesmo resultado é válido para os elementos da base $T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}$, de fato,

$$
\begin{aligned}
\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}) &= \sum_{\mu=0}^{3t}\begin{pmatrix} 3t \\ \mu \end{pmatrix}\psi_v(q^{\mu(3t-\mu)}T_{22}^{3s}T_{11}^{\mu}T_{12}^{3t-\mu})\overline{\psi}_v(T_{22}^{3s+3t-\mu}T_{12}^{\mu}) \\
&= \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \end{pmatrix}T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}\psi_v(T_{22}^{0}T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{22}^{3(s+t)}T_{12}^{0}) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \end{pmatrix}T_{22}^{3s}T_{11}^{3t}\psi_v(T_{22}^{0}T_{11}^{0}T_{12}^{0})\overline{\psi}_v(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}) \\
&= T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}S(T_{22}^{3(s+t)}) + T_{22}^{3s}T_{11}^{3t}S(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}) \\
&= T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}T_{11}^{3(s+t)} - T_{22}^{3s}T_{11}^{3t}T_{12}^{3t}T_{11}^{3s}) = 0 = \eta\circ\varepsilon(T_{22}^{k}T_{12}^{l}),
\end{aligned}
$$

se $l \neq 0$.

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_v * \psi_v(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}) &= \sum_{\mu=0}^{3t} \begin{pmatrix} 3t \\ \mu \end{pmatrix} \overline{\psi}_v(q^{\mu(3t-\mu)}T_{22}^{3s}T_{11}^{\mu}T_{12}^{3t-\mu})\psi_v(T_{22}^{3s+3t-\mu}T_{12}^{\mu}) \\
&= \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \end{pmatrix} \overline{\psi}_v(T_{22}^{3s}T_{11}^{0}T_{12}^{3t})\psi_v(T_{22}^{3(s+t)}T_{12}^{0}) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \end{pmatrix} \overline{\psi}_v(T_{22}^{3s}T_{11}^{3t}T_{12}^{0})\psi_v(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}) \\
&\underset{s<t}{\overset{s\geq t}{\equiv}} \begin{cases} \overline{\psi}_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0})S(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t})T_{22}^{3(s+t)}\psi_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0}) \\ \qquad +\overline{\psi}_v(T_{22}^{3(s-t)}T_{12}^{0})T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}\psi_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0}) \\ \overline{\psi}_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0})S(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t})T_{22}^{3(s+t)}\psi_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0}) \\ \qquad +\overline{\psi}_v(T_{11}^{3(t-s)}T_{12}^{0})T_{22}^{3s}T_{12}^{3t}\psi_v(T_{22}^{0}T_{12}^{0}) \end{cases} \\
&\underset{s<t}{\overset{s\geq t}{\equiv}} \begin{cases} S(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t})T_{22}^{3(s+t)} + S(T_{22}^{3(s-t)})T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} \\ S(T_{22}^{3s}T_{12}^{3t})T_{22}^{3(s+t)} + S(T_{11}^{3(t-s)})T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} \end{cases} \\
&\underset{s<t}{\overset{s\geq t}{\equiv}} \begin{cases} -T_{12}^{3t}T_{11}^{3s}T_{22}^{3(s+t)} + T_{11}^{3(s-t)}T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} \\ -T_{12}^{3t}T_{22}^{3s}T_{22}^{3(s+t)} + T_{22}^{3(t-s)}T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} \end{cases} \\
&\underset{s<t}{\overset{s\geq t}{\equiv}} \begin{cases} -T_{12}^{3t}T_{11}^{3s}T_{22}^{3(s+t)} + T_{11}^{3s}T_{22}^{3t}T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} = 0 = \eta \circ \varepsilon(T_{22}^{k}T_{12}^{l}) \\ -T_{12}^{3t}T_{22}^{3s}T_{22}^{3(s+t)} + T_{22}^{3t}T_{11}^{3s}T_{22}^{3s}T_{12}^{3t} = 0 = \eta \circ \varepsilon(T_{22}^{k}T_{12}^{l}) \end{cases},
\end{aligned}$$

se $l \neq 0$.

Notamos que se T_{12} tem potência nula, $\Delta(T_{ij}^{p}) = T_{ij}^{p} \otimes T_{ij}^{p}$ para $i = j \in \{1, 2\}$ e claramente,

$$\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{ij}) = \eta \circ \varepsilon(T_{ij}) = \overline{\psi}_v * \psi_v(T_{ij}).$$

Vejamos agora o caso onde as potências não são múltiplas de três, ou seja, $p = 3i + \tilde{p}$, $r = 3j + \tilde{r}$, $k = 3s + \tilde{k}$ e $l = 3t + \tilde{l}$, daí,

$$\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{11}^p T_{12}^r) = \sum_{\mu=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ \mu \end{pmatrix} \psi_v(T_{11}^{p+\mu} T_{12}^{r-\mu}) \overline{\psi}_v(T_{11}^p T_{12}^{\mu} T_{22}^{r-\mu}) = 0,$$

pois ψ_v e $\overline{\psi}_v$ só assumem valores diferentes de zero se T_{12} tem potência igual a zero ou $3\mathbb{Z}$, e neste caso, se avaliarmos ψ_v, vemos que isto só é fato para $\mu = \tilde{r}$ ou $\mu = r$, mas que implica em $\overline{\psi}_v = 0$. Por outro lado, se avaliarmos $\overline{\psi}_v$, μ deve assumir os valores de 0 ou $3j$, que zeram ψ_v. O mesmo argumento serve quando calculamos $\overline{\psi}_v * \psi_v$. Portanto,

$$\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{11}^p T_{12}^r) = \eta \circ \varepsilon(T_{11}^p T_{12}^r) = \overline{\psi}_v * \psi(T_{11}^p T_{12}^r).$$

Do mesmo modo,

$$\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{22}^k T_{12}^l) = \sum_{\mu=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ \mu \end{pmatrix} \psi_v(q^{\mu(l-\mu)} T_{22}^k T_{11}^{\mu} T_{12}^{l-\mu}) \overline{\psi}_v(T_{22}^{k+l-\mu} T_{12}^{\mu}) = 0,$$

por argumento análogo ao anterior. Assim,

$$\psi_v * \overline{\psi}_v(T_{22}^k T_{12}^l) = \eta \circ \varepsilon(T_{22}^k T_{12}^l) = \overline{\psi}_v * \psi(T_{22}^k T_{12}^l).$$

E com isso, fica evidenciado que o morfismo ψ_v dado na Proposição 4.12 é inversível por produto de convolução com inversa dada por $\overline{\psi}_v$.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRUSKIEWITSCH, N.: "Notes on Extensions of Hopf Algebras". Can. J. Math. 48, 3-42 (1996).

[2] ANDRUSKIEWITSCH, N.; DEVOTO, J.: "Extensions of Hopf Algebras". Algebra i Analiz 7 (1), 22-61 (1995).

[3] BERGMAN, G.M.: "The Diamond Lemma for Ring Theory". Adv. Math 29, 178-218, 1978.

[4] BLATTNER, R.; COHEN, M.; MONTGOMERY, S.: "Crossed Product and Inner Actions of Hopf Algebras". Trans. Amer. Math. Soc. 298 (2) 671-711 (1986).

[5] BOURBAKI, N.: "Commutative Algebra". Addison-Wesley, 1972.

[6] CARTIER, P.: "An Introduction to Quantum Groups". Proc. Symp. Pure Math. 56 (Part 2), 19-42 (1994).

[7] CASTRO, G. G.: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica. "Geometria de fibrados não-comutativos". Flo-

rianópolis, SC, 2005. viii, 157 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-graduação em Matemática e Computação Científica.

[8] DABROWSKI, L.; HAJAC, P. M.; SINISCALCO, P.: "Explicit Hopf-Galois Description of $SL_{e^{2i\pi/3}}$-Induced Frobenius Homomorphisms". 1997. (arXiv:q-alg/9708031v2)

[9] DASCALESCU, S., NASTASESCU, C., RAIANU, S. "Hopf Algebras: An Introduction", Marcel Dekker Inc. (2001).

[10] DOI, Y.; MASOUKA, A.: "Generalization of Cleft Comodule Algebras". Comm. Alg. 20, 3703-3721 (1992).

[11] DOI, Y., TAKEUCHI, M. "Cleft comodule algebras for a bialgebra". Comm. in Algebra 14 (1986), 801-817.

[12] DOI, Y.; TAKEUCHI, M.: "Hopf-Galois extensions of Algebras, the Miyashita-Ulbrich Action, and Azumaya Algebras". J. Algebra, 121, 488-516 (1989).

[13] DRINFELD, V.G.: "Quantum Groups". Proc. Int. Cong. Math, Berkeley, 1, 789-820, (1986).

[14] HAJAC, P.M.: "Strong Connections on Quantum Principal Bundles". Commun. Math. Phys. 182 (3) 579-617 (1996).

[15] HAZZAN, S.: "Fundamentos da Matemática Elementar", Volume 5, Editora Atual.

[16] KAC, V.; CHEUNG, P.: "Quantum Calculus". Springer-Verlag, 2002.

[17] KASSEL, Ch.: "Quantum Groups". Springer-Verlag, 1995.

[18] KLIMYK, A.; SCHMÜDGEN, K.: "Quantum Groups and Their Representations". Springer-Verlag, 1998.

[19] KREIMER, F.H.; TAKEUCHI, M.: "Hopf Algebras and Galois Extension of an Algebra". Indiana Math. J. 30, 675-692 (1981)

[20] LAM, T.Y.: "Lectures on Modules and Rings". Springer-Verlag, 1998.

[21] MAJID, S.: "Foundations of Quantum Group Theory". Cambridge University Press, 1995.

[22] MANIN, Yu. I.: "Topics in Noncommutative Geometry". Princeton, N.J., Princeton University Press, 1991.

[23] MASUDA, T.; MIMACHI, K.; NAKAGAMI, Y.; NOUMI, M.; UENO, K.: "Representations of the Quantum Group $SU_q(2)$ and the Little q-Jacobi Polynomials". J. Funct. Anal. 99, 357-387 (1991).

[24] MASUOKA, A.: "Quotient Theory of Hopf Algebras". In: BERGEN, J., MONTGOMERY, S. (eds.) Advanced in Hopf Algebras. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 158, 107-134, Marcel Dekker, Inc., 1994.

[25] MONTGOMERY, S. "Hopf algebras and Their Actions on Rings", AMS (1993).

[26] MONTGOMERY, S.; SCHNEIDER, H.J.: "Prime Ideals in Hopf-Galois Extensions". Israel J. Math. 112, 187-235 (1999).

[27] MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P., FERNANDEZ, P.: "Análise Combinatória e Probabilidade", Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[28] PARSHALL, B.; WANG, J.: "Quantum Linear Groups". American Mathematical Society Memoirs no.439, Providence, R.I., American Mathematical Society (AMS), 1991.

[29] RADFORD, D.E.: "The Order of the Antipode of a Finite Dimensional Hopf Algebra is Finite". American Journal of Mathematics, Vol. 98, No. 2 (Summer, 1976), 333-355.

[30] SCHAUENBURG, P.: "Hopf Bimodules over Hopf-Galois Extensions, Miyashita-Ulbrich Actions, and Monoidal Center Constructions". Comm. in Alg. 24 (1996), 143-163.

[31] SCHAUENBURG, P. "A bialgebra that admits a Hopf-Galois algebra extension is a Hopf algebra". Proceedings of the American Mathematical Society 125, number 1 (1997), 83-85.

[32] SCHNEIDER, H.J.: "Representation Theory of Hopf-Galois Extension". Israel J. of Math. 72, 196-231 (1990).

[33] SCHNEIDER, H.J.: "Normal Basis and Transitivity of Crossed Product for Hopf Algebras". J. Alg. 152 (2), 289-312 (1992).

[34] SCHNEIDER, H.J.: "Some Remarks on Exact Sequences of Quantum Groups". Comm. Alg. 21 (9), 3337-3357 (1993).

[35] SCHNEIDER, H.J.: "Hopf Galois Extensions, Crossed Products, and Clifford Theory". In: BERGEN, J., MONTGOMERY, S. (eds.) Advanced in Hopf Algebras. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 158, 267-297, Marcel Dekker, Inc., 1994.

[36] TAKEUCHI, M.: "Some Topics on $GL_q(n)$". J. Alg. 147, 379-410 (1992).