Análise Funcional
Curso de Verão 2019
Primeira Lista de Exercícios

February 4, 2019

1. Seja (V, d) um espaço métrico e seja $A \subset V$ um conjunto não vazio.

   Seja $u \in V$. Definimos a distância entre u e A, denotada por $D(u, A)$ por
   $$D(u, A) = \inf_{v \in A} d(u, v).$$
   Sejam $u, v \in V$. Mostre que
   $$|D(u, A) - D(v, A)| \leq d(u, v).$$

2. Seja (V, d) um espaço métrico. Mostre que
   $$\tilde{d}(u, v) = \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)},\ \forall u, v \in V$$
   é também uma métrica em V.

   Mostre que se (V, d) é completo, então $(V, \tilde{d})$ também o é.

3. Seja (V, d) um espaço métrico e sejam $A, B \subset V$ conjuntos limitados. Mostre que $A \cup B$ é limitado.

4. Seja
   $$B([a, b]) = \{u : [a, b] \to \mathbb{R}\ :\ \text{ existe } M \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } |u(x)| < M, \forall x \in [a, b]\}.$$
   Mostre que $B([a, b])$ não é separável.

5. Seja (V, d) um espaço vetorial e métrico onde d é uma métrica invariante, isto é,
   $$d(u, v) = d(u + w, v + w),\ \forall u, v, w \in V.$$
   Seja $u \in V$. Prove por indução que
   $$d(Nu, 0) \leq N d(u, 0),\ \forall N \in \mathbb{N}.$$

6. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Prove que as operações vetoriais são contínuas em relação à topologia gerada pela norma. Conclua que V é um espaço vetorial topológico.

7. Seja (V, d) um espaço métrico e seja $A \subset V$ um conjunto totalmente limitado. Aqui relembramos que A é totalmente limitado quando para cada $\varepsilon > 0$ podemos obter uma rede-ε finita relativa a A contida em V. Mostre que nesse caso para cada $\varepsilon > 0$ podemos obter uma rede-ε finita relativa a A contida em A.

8. Sejam $(V_1, \|\cdot\|_1)$ e $(V_2, \|\cdot\|_2)$ espaços normados. Prove que $V = V_1 \times V_2$ é um espaço normado com a norma
   $$\|u\|_V = \max(\|u_1\|_1, \|u_2\|_2).$$

9. Seja V um espaço de Banach. Seja $\{u_n\} \subset V$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_V < +\infty.$$

Prove que $\{s_n\}$ é convergente, onde $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

10. Dê exemplos de subespaços de l^∞ e l^2 que não são fechados.

11. Mostre que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ para o $\mathbb{R}^n$ são tais que

$$\frac{\|u\|_1}{\sqrt{n}} \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1.$$

12. Mostre que um espaço métrico V infinito com a métrica discreta não é compacto.

13. Seja (V, d) um espaço métrico compacto. Prove que V é localmente compacto.

14. Sejam (V_1, d_1) e (V_2, d_2) espaços métricos onde V_1 é compacto. Seja $T : V_1 \to V_2$ bijetivo e contínuo. Mostre que T^{-1} é contínuo.

15. Sejam V_1, V_2 espaços de Banach e seja $T : V_1 \to V_2$ um operador linear e injetivo. Suponha que $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset V_1$ um subconjunto linearmente independente. Mostre que $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subset V_2$ é também linearmente independente.

16. Seja V_1, V_2 espaços normados tais que $dim(V_1) = dim(V_2) = n < \infty$. Seja $T : V_1 \to V_2$ um operador linear. Mostre que $R(T) = V_2$ se, e somente se, T^{-1} existe.

17. Sejam V_1, V_2 espaços normados. Mostre que um operador linear $T : V_1 \to V_2$ é contínuo se, e somente se, T mapeia conjuntos limitados de V_1 em conjuntos limitados de V_2.

18. Seja $T \neq \mathbf{0}$ ($T : V_1 \to V_2$) um operador linear e contínuo. Mostre que para todo $u \in V_1$ tal que $\|u\|_{V_1} < 1$ temos que

$$\|T(u)\|_{V_2} < \|T\|.$$

19. Mostre que a imagem $R(T)$ de um operador linear e limitado $T : U \to V$ não precisa ser fechada em V.

20. Seja V, W espaços normados e seja $T : V \to W$ um operador linear, limitado e sobrejetivo. Suponha que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|T(u)\| \geq \alpha \|u\|, \ \forall u \in V.$$

Mostre que T^{-1} existe e é limitado.