

# Análise Funcional

## Curso de Verão 2019

### Segunda Lista de Exercícios

February 4, 2019

1. Mostre que dois funcionais lineares  $f_1 \neq 0$  e  $f_2 \neq 0$  definidos num mesmo espaço vetorial os quais tem o mesmo espaço nulo são proporcionais, isto é existe  $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$  tal que  $f_2 = \alpha f_1$ .
2. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Seja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Quais as possíveis dimensões para  $N(f)$ ?
3. Sejam  $U, V \neq \{0\}$  espaços normados onde  $\dim(U) = \infty$ . Mostre que existe pelo menos um operador linear ilimitado  $T : U \rightarrow V$ .
4. Seja  $M \neq \emptyset$  um subconjunto de um espaço normado  $V$ . O anulador  $M^\perp$  de  $M$  é definido por

$$M^\perp = \{f \in V' \mid f(u) = 0, \forall u \in M\} \subset V'.$$

Mostre que  $M^\perp$  é subespaço vetorial de  $V'$  e que é fechado. O que são  $V^\perp$  e  $\{0\}^\perp$ ?

5. Seja  $V$  o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 definidos no intervalo  $[a, b]$  com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(t)v(t) dt.$$

Mostre que  $V$  é completo. Seja  $W$  o conjunto de todos os polinômios tais que  $u(c) = 0$  onde  $c \in [a, b]$ . É  $W$  um subespaço vetorial de  $V$ ?

O conjunto de todos os polinômios de  $V$  de grau igual a 2 é um subespaço de  $V$ ? Justifique as suas respostas.

6. Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Sejam  $\{u_n\} \subset H$ ,  $u, v \in H$  tais que  $\langle v, u_n \rangle = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e

$$u_n \rightarrow u,$$

na norma de  $H$ . Mostre que

$$\langle v, u \rangle = 0.$$

7. Seja

$$V = C([a, b]) = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, : u \text{ é contínua em } [a, b]\}.$$

Seja  $V_1 = (V, \|\cdot\|_\infty)$ , onde

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \{|u(x)|\},$$

e  $V_2 = (V, \|\cdot\|_2)$  onde

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

e onde

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Prove que a identidade  $I : V_1 \rightarrow V_2$  é contínua onde

$$I(u) = u \in V_2, \forall u \in V_1.$$

8. Seja  $V$  um espaço vetorial complexo com produto interno.

Suponha que  $T : V \rightarrow V$  um operador linear limitado tal que

$$\langle Tu, u \rangle = 0, \forall u \in V.$$

Mostre que  $T = \mathbf{0}$ . Mostre também que o resultado não vale no caso de espaço vetorial real.

9. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $M \subset H$  um subconjunto convexo. Seja  $\{u_n\} \subset M$  tal que

$$\|u_n\| \rightarrow d = \inf_{u \in M} \{\|u\|\}.$$

Mostre que  $\{u_n\}$  é convergente em  $H$ .

10. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno e sejam  $A, B \subset V$  tais que  $A \subset B$ .

Mostre que:

(a) 
$$A \subset A^{\perp\perp},$$

(b) 
$$B^\perp \subset A^\perp,$$

(c) 
$$A^{\perp\perp\perp} = A^\perp.$$

11. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno. Mostre que o complemento ortogonal  $M^\perp$  de um conjunto  $M \neq \emptyset$  é um subespaço fechado.

12. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $V$  um subespaço de  $H$ . Mostre que  $V$  é fechado se, e somente se,

$$V = V^{\perp\perp}.$$

13. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $M \neq \{0\}$  um subespaço de  $H$ . Mostre que  $M^{\perp\perp}$  é o menor subespaço fechado de  $H$  que contém  $M$ . Isto é, mostre que se  $W \supset M$  e  $W$  é subespaço fechado de  $H$ , então

$$W \supset M^{\perp\perp}.$$

14. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno se seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  uma sequência ortonormal.

Seja  $u \in V$  e seja  $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ , onde

$$\alpha_k = \langle u, e_k \rangle, \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Mostre que  $u - v$  é ortogonal ao subespaço  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

15. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  uma sequência ortonormal.

Seja  $u \in V$  e seja  $v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ , onde

$$\alpha_k = \langle u, e_k \rangle, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mostre que  $u - v$  é ortogonal a  $e_k, \forall k \in \mathbb{N}$ .

16. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  uma sequência ortonormal e seja  $M$  o subespaço de  $H$  gerado por tal sequência. Seja  $u \in H$ . Mostre que  $u \in \overline{M}$  se, e somente se,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

, onde

$$\alpha_k = \langle u, e_k \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

17. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  uma sequência ortonormal de  $H$ . Sejam  $u, v \in H$  tais que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

e

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$

Mostre que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k},$$

onde esta última série é convergente.

18. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{u_n\} \subset H$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$  é convergente. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

é convergente (em norma).

19. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  uma sequência ortonormal de  $H$ . Sejam  $u \in H$  tal que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|u\|^2.$$

20. Seja

$$M = \left\{ u = (u_1, \dots, u_n) : \sum_{j=1}^n u_j = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Mostre que  $M$  é completo e convexo. Encontre o seu vetor de norma mínima.

21. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$  um conjunto ortonormal. Mostre que  $\beta_1, \dots, \beta_n$  onde  $\beta_j = \langle u, e_j \rangle, \forall j \in \{1, \dots, n\}$  são tais que

$$\|u - v_0\| = \min_{v \in [e_1, \dots, e_n]} \|u - v\|,$$

onde

$$v_0 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

22. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

uma base ortonormal de  $H$ . Use a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 = \|u\|^2, \quad \forall u \in H$$

para provar a relação de Parseval

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}, \quad \forall u, v \in H.$$

23. Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Seja  $M \subset H$  um conjunto total. Sejam  $v, w \in H$ . Mostre que se

$$\langle v - w, u \rangle = 0, \quad \text{for all } u \in M,$$

então  $v = w$ .

24. Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Sejam  $v, w \in H$ . Suponha que se

$$\langle v - w, u \rangle = 0, \quad \forall u \in M \subset H,$$

então

$$v = w.$$

Nesse caso mostre que  $M$  é total.

25. Seja  $V = \mathbb{R}^n$ . Seja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Mostre que existe  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(u) = \langle u, z \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall u \in V.$$

26. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno. Seja  $z \in V$ . Mostre que

$$f(u) = \langle u, z \rangle, \quad \forall u \in V,$$

é um funcional linear em  $V$  com norma  $\|z\|$ .

Nesse contexto, assuma que o mapeamento de  $J : V \rightarrow V'$  é sobrejetivo, onde  $J(z) = f$ . Mostre que nesse caso  $V$  é um espaço de Hilbert.

27. Mostre que todo funcional linear e contínuo em  $l^2$  pode ser representado na forma

$$f(u) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \bar{z}_j,$$

para algum

$$z = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in l^2.$$

28. Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável. Seja  $\{e_n\} \subset H$  uma sequência ortonormal total para  $H$ . Defina o operador shift como o operador linear  $T : H \rightarrow H$  onde  $T(e_n) = e_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Obtenha a imagem, o núcleo e a norma de  $T$ . Obtenha também  $T^*$ .

29. Seja  $H$  um espaço de Hilbert se sejam  $T_1, T_2, S_1, S_2 : H \rightarrow H$  operadores lineares, limitados e auto-adjuntos.

Suponha que

$$T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2.$$

Sob tais hipóteses, prove que  $S_1 = T_1$  e  $S_2 = T_2$ .

30. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $T : H \rightarrow H$  um operador linear, limitado e auto-adjunto tal que  $T \neq \mathbf{0}$ .

(a) Prove que  $T^n \neq \mathbf{0}$ , para  $n = 2, 4, 6, 8, \dots$

(b) Prove que  $T^n \neq \mathbf{0}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

31. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $T : H \rightarrow H$  um operador isométrico.

Prove que

$$T^*T = I,$$

onde  $I$  denota o operador identidade.

32. Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Seja  $T : H \rightarrow H$  um operador isométrico o qual não é unitário. Mostre que  $T$  mapeia  $H$  num subespaço próprio de  $H$ .

33. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno. Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador isométrico onde  $\dim(V) < \infty$ . Mostre que  $T$  é unitário.

34. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $\{T_n : H \rightarrow H\}$  uma sequência de operadores normais tais que

$$T_n \rightarrow T,$$

em norma.

Mostre que  $T$  é normal.

35. Seja  $H$  um espaço de Hilbert complexo. Seja  $T : H \rightarrow H$  um operador linear limitado.

Mostre que  $T$  é normal se, e somente se,

$$\|T(u)\| = \|T^*(u)\|, \forall u \in H.$$

Com tal resultado, mostre que se  $T$  é linear, limitado e normal, então

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$