

Análise Funcional

Curso de Verão 2019

Terceira Lista de Exercícios

March 2, 2019

1. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $H \subset V$ um hiperplano afim, isto é,

$$H = \{u \in V : \langle u, u^* \rangle_V = \alpha\},$$

para algum $u^* \in V^*$ tal que $u^* \neq \mathbf{0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $K \subset V$ um conjunto convexo, fechado e limitado tal que

$$K \cap H = \emptyset.$$

Defina a distância d entre H e K por,

$$d = \inf\{\|u - v\|_V : u \in H \text{ e } v \in K\}.$$

Mostre que existem $u_0 \in H$ e $v_0 \in K$ tais que

$$d = \|u_0 - v_0\|_V.$$

2. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo.

Defina o Epígrafo de F , denotado por $Epi(F)$ por,

$$Epi(F) = \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} : a \geq F(u)\}.$$

Mostre que $Epi(F)$ é convexo.

3. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo tal que $Epi(F)^\circ \neq \emptyset$.

Mostre que

$$F(u) = \sup_{(u^*, \alpha) \in V^* \times \mathbb{R}} \{\langle u, u^* \rangle_V + \alpha : \langle v, u^* \rangle_V + \alpha \leq F(v), \forall v \in V\}.$$

4. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $M \subset V$ um sub-espaço vetorial próprio e fechado de V tal que $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Seja $u \in V$. Mostre que existe $v_0 \in M$ tal que

$$\|u - v_0\|_V = \inf_{v \in M} \|u - v\|_V.$$

5. Seja V um espaço de Banach reflexivo e sejam $A, B \subset V$ conjuntos não vazios, convexos e fechados tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponha também que B é limitado. Defina a distância d entre A e B por,

$$d = \inf\{\|u - v\|_V : u \in A \text{ e } v \in B\}.$$

Mostre que existem $u_0 \in A$ e $v_0 \in B$ tais que

$$d = \|u_0 - v_0\|_V.$$

6. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional limitado inferiormente e tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u),$$

sempre que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \sigma(V, V^*) \text{ (fracamente)},$$

$\forall u \in V$.

Assuma também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = +\infty,$$

sempre que $\|u_n\|_V \rightarrow \infty$.

Prove que existe $u_0 \in V$ tal que

$$F(u_0) = \min_{u \in V} F(u).$$

7. Seja V um espaço de Banach reflexivo. Seja $u_0 \in V$. Defina $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \langle u, u_0 \rangle_V, \forall u \in V.$$

Seja $A \subset V$ um conjunto convexo, limitado e fechado.

Mostre que existe $u_1 \in A$ tal que

$$F(u_1) = \min_{u \in A} F(u).$$

8. Seja V um espaço de Banach reflexivo. Seja $u_0 \in V$. Defina $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \langle u, u_0 \rangle_V, \forall u \in V.$$

Seja $A \subset V$ um conjunto limitado e fechado.

Mostre que existe $u_1 \in \text{Conv}(A)$ tal que

$$F(u_1) = \inf_{u \in A} F(u).$$

9. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Defina o funcional polar $F^* : V^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle_V - F(u)\}.$$

Mostre que F^* é convexo.

Seja $V = \mathbb{R}^2$ e seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$F(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{1}{2} u_2^2 \right)^2.$$

Seja $(u_1^*, u_2^*) \in \mathbb{R}^2$. Obtenha

$$F^*(u_1^*, u_2^*).$$

10. Seja V um espaço de Banach. Seja $M \subset V$ um sub-espaço vetorial.

Defina

$$M^\perp = \{u^* \in V^* : \langle u, u^* \rangle_V = 0, \forall u \in M\},$$

e para $N \subset V^*$ defina

$$N^\perp = \{u \in V : \langle u, u^* \rangle_V = 0, \forall u^* \in N\}.$$

Mostre que

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}.$$

11. Seja V um espaço de Banach. Seja $u \in V$.

Defina

$$F_u = \{u^* \in V^* : \|u^*\|_{V^*} \leq \|u\|_V \text{ e } \langle u, u^* \rangle_V = \|u\|_V^2\}.$$

Mostre que F_u é não-vazio, fechado e convexo.

12. Seja $V = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = 0\}$, com a norma

$$\|u\|_V = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$f(u) = \int_0^1 u(t) dt.$$

Mostre que f é limitado e obtenha $\|f\|_{V^*}$.

13. Seja $V = C([0, 1])$ com a norma usual

$$\|u\|_V = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|.$$

Seja

$$E = \left\{ u \in V : \int_0^1 |u(t)|^2 dt < 1 \right\}.$$

Mostre que E é convexo e ilimitado em V .

14. Seja V um espaço de Banach e seja $A \subset V$ um conjunto não vazio, próprio e fechado.

Defina

$$\phi(u) = d(u, A) = \inf_{v \in A} \|u - v\|_V.$$

Mostre que

$$|\phi(u) - \phi(v)| \leq \|u - v\|_V, \forall u, v \in V.$$

Assuma também que A é convexo. Prove que neste caso ϕ é convexa em V .

15. (Lema de Mazur) Seja V um espaço de Banach e seja $A = \{u_n\} \subset V$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

Prove que existe $\{v_n\} \subset \text{Conv}(A)$ tal que $v_n \rightarrow u$ em norma.

16. Seja V um espaço de Banach e seja $\{u_n\} \subset V$ tal que

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

Seja

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Prove que também

$$v_n \rightarrow u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

17. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja S um operador auto-adjunto tal que $(Su, u)_H = 0, \forall u \in H$.

Prove que $S = \mathbf{0}$. Repita o exercício assumindo que H é real.

18. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \rightarrow H$ uma isometria linear. Prove que

$$T^*T = I,$$

onde I denota o operador identidade.

19. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \rightarrow H$ uma isometria linear. Prove que se T não é unitário então T mapeia H em um sub-espaço próprio fechado de H .

20. Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $T : V \rightarrow V$ uma isometria linear.

Assuma que $\dim(V) = n < \infty$. Mostre que nesse caso T é unitário.

21. Seja H um espaço de Hilbert. Suponha que $\{T_n : H \rightarrow H\}$ seja uma sequência de operadores normais e que

$$T_n \rightarrow T$$

em norma.

Mostre que T é normal.

22. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Mostre que um operador linear e limitado $T : H \rightarrow H$ é normal se, e somente se,

$$\|T^*(u)\|_H = \|T(u)\|_H, \forall u \in H.$$

23. Seja V um espaço vetorial. Seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear.

Mostre que

$$p(\mathbf{0}) = 0$$

e

$$p(-u) \geq -p(u), \forall u \in V.$$

24. Seja V um espaço vetorial normado. Seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sub-aditivo.

Suponha que p é contínuo em $\mathbf{0}$ e tal que $p(\mathbf{0}) = 0$. Prove que p é contínuo em V .

25. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sub-linear.

Seja $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$Z = \{u = \alpha u_0, : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

para algum fixo $u_0 \neq 0, u_0 \in V$ e onde

$$f(u = \alpha u_0) = \alpha p(u_0).$$

Prove que f é linear em Z e que

$$f(u) \leq p(u), \forall u \in Z.$$

26. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sub-linear. Mostre que existe um funcional linear $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$-p(-u) \leq g(u) \leq p(u), \forall u \in V.$$

27. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v) \text{ e } p(\alpha u) = |\alpha|p(u), \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Seja $u_0 \in V$. Mostre que existe um funcional linear $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(u_0) = p(u_0)$ e

$$|g(u)| \leq p(u), \forall u \in V.$$

28. Seja V um espaço de Banach complexo e seja $T \in L(V)$.

Defina

$$r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Prove que

$$r_\sigma(\alpha T) = |\alpha|r_\sigma(T), \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

e que

$$r_\sigma(T^n) = (r_\sigma(T))^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

29. Seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência real tal que

$$\lambda_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $T : l^2 \rightarrow l^2$ onde

$$T(\{u_n\}) = \{\lambda_n u_n\}.$$

Mostre que T é compacto.

30. Sejam U e Y espaços de Banach. Denotemos por $L(U, Y)$ o conjunto dos operadores lineares e limitados $A : U \rightarrow Y$.

Mostre que $L(U, Y)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|A\| = \sup_{u \in U} \{\|Au\|_Y : \|u\|_U = 1\}.$$

31. Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $V = C^m([a, b])$ o espaço das funções contínuas e com derivadas de ordem até m contínuas em $[a, b]$. Mostre que V é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_V = \max_{x \in [a, b]} \left\{ |f(x)| + \sum_{k=1}^m |f^{(k)}(x)| \right\}.$$

32. Seja V um espaço de Banach reflexivo e sejam $K, F \subset V$ tais que K é compacto, F é fechado e convexo e

$$K \cap F = \emptyset.$$

Defina a distância entre K e F , denotada por $d(K, F)$, como

$$d(K, F) = \inf\{\|u - v\|_U : u \in K \text{ e } v \in F\}.$$

Prove que existem $u_0 \in K$ e $v_0 \in F$ tais que

$$d(K, F) = \|u_0 - v_0\|_U.$$

33. Seja H um espaço de Hilbert separável com uma base ortonormal $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prove $u_n \rightarrow \mathbf{0}$ fracamente em H .

34. Seja V um espaço de Banach e seja $K \subset V$ um conjunto compacto. Suponha que $K \subset W$ onde W é aberto.

Prove que existe $W_1 \subset V$ aberto tal que

$$K \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W.$$

35. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^* , mediante uma forma bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

Seja $\{u_n^*\} \subset U^*$ um conjunto denso em B_{U^*} .

Defina uma métrica $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ para U por

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle u - v, u_k^* \rangle_U|}{1 + |\langle u - v, u_k^* \rangle_U|}.$$

(a) Prove que de fato d é uma métrica.

(b) Em B_U prove que a topologia relativa a tal métrica corresponde ao traço da topologia $\sigma(U, U^*)$ sobre B_U .

36. Seja V um espaço de Banach e seja M um sub-espaço vetorial fechado de V .

Defina o espaço quociente

$$V/M = \{\bar{u} : u \in V\},$$

onde

$$\bar{u} = \{u + v : v \in M\}.$$

Defina a norma $\|\cdot\|_{V/M} : V/M \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$\|\bar{u}\|_{V/M} = \inf_{v \in M} \|u + v\|_V.$$

(a) Prove que $\|\cdot\|_{V/M}$ de fato é uma norma.

(b) Prove que V/M é um espaço de Banach com tal norma.

37. Seja H um espaço de Hilbert e suponha que $A : H \rightarrow H$ é um operador linear tal que

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \quad \forall u, v \in H.$$

Prove que A é limitado.

Dica: Prove que o gráfico de A é fechado.

38. (B.L.T. Theorem) Seja $A : V_1 \rightarrow V_2$ um operador linear e limitado onde $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ é um espaço normado e $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ é um espaço de Banach. Prove que A pode ser estendido a um único $\tilde{A} : \overline{V_1} \rightarrow V_2$ linear e limitado e tal que

$$\|\tilde{A}\| \leq \|A\|.$$

39. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^* , mediante uma forma bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

Prove que uma net $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge para $u_0 \in U$ em $\sigma(U, U^*)$ se, e somente se,

$$\langle u_\alpha, u^* \rangle_U \rightarrow \langle u_0, u^* \rangle_U, \quad \forall u^* \in U^*.$$

40. Seja V um espaço vetorial normado complexo e seja $A : V \rightarrow V$ um operador linear.

Sejam $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que

$$A(u_j) = \lambda_j u_j,$$

onde $\lambda_j \neq \lambda_k$ se $j \neq k$.

Mostre que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é linearmente independente.

Sugestão: Use indução.

41. Seja V um espaço de Banach e seja W um subespaço fechado de V . Seja $u_0^* \in V^*$.

Defina

$$a = \sup_{u \in W} \{|\langle u, u_0^* \rangle_V| : \|u\|_V \leq 1\}$$

e

$$b = \inf\{\|u^* - u_0^*\|_V : u^* \in W^\perp\}.$$

(a) Prove que $a \leq b$.

(b) Assuma que V é um espaço de Hilbert. Mostre que nesse caso $a = b$.

42. Seja U um espaço de Hilbert. Seja $A \in L(U)$ um operador auto adjunto tal que $A(U) = U$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $B \in L(U)$ e $\|B - A\| < \delta$, então $B(U) = U$.

43. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in L(H)$ um operador auto-adjunto.

Prove que $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\|u_n\|_H = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - \lambda u_n\|_H = 0.$$

Prove o resultado acima assumindo que A é um operador normal e não necessariamente auto-adjunto.