Análise Funcional Aplicada - 2018-1
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

June 29, 2018

1. Sejam U e Y espaços de Banach. Denotemos por $L(U,Y)$ o conjuntos dos operadores lineares e limitados $A : U \to Y$.

   Mostre que $L(U,Y)$ é um espaço de Banach com a norma
   $$\|A\| = \sup_{u \in U}\{\|Au\|_Y \ : \ \|u\|_U = 1\}.$$

2. Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $V = C^m([a,b])$ o espaço das funções contínuas e com derivadas de ordem até m contínuas em $[a,b]$. Mostre que V é um espaço de Banach com a norma
   $$\|f\|_V = \max_{x \in [a,b]}\left\{|f(x)| + \sum_{k=1}^{m}|f^{(k)}(x)|\right\}.$$

3. Seja V um espaço de Banach reflexivo e sejam $K, F \subset V$ tais que K é compacto, F é fechado e convexo e
   $$K \cap F = \emptyset.$$
   Defina a distância entre K e F, denotada por $d(K,F)$, como
   $$d(K,F) = \inf\{\|u - v\|_U \ : \ u \in K \text{ e } v \in F\}.$$
   Prove que existem $u_0 \in K$ e $v_0 \in F$ tais que
   $$d(K,F) = \|u_0 - v_0\|_U.$$

4. Seja H um espaço de Hilbert separável com uma base ortonormal $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prove $u_n \rightharpoonup \mathbf{0}$ fracamente em H.

5. Seja V um espaço de Banach e seja $K \subset V$ um conjunto compacto. Suponha que $K \subset W$ onde W é aberto.

   Prove que existe $W_1 \subset V$ aberto tal que
   $$K \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W.$$

6. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^*, mediante uma forma bilinear
   $$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \to \mathbb{R}.$$
   Seja $\{u_n^*\} \subset U^*$ um conjunto denso em B_{U^*}.

   Defina uma métrica $d : U \times U \to \mathbb{R}^+$ para U por
   $$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle u - v, u_k^* \rangle_U|}{1 + |\langle u - v, u_k^* \rangle_U|}.$$

(a) Prove que de fato d é uma métrica.

(b) Em B_U prove que a topologia relativa a tal métrica corresponde ao traço da topologia $\sigma(U, U^*)$ sobre B_U.

7. Seja V um espaço de Banach e seja M um sub-espaço vetorial fechado de V.

   Defina o espaço quociente
$$V/M = \{\overline{u} \ : \ u \in V\},$$
   onde
$$\overline{u} = \{u + v \ : \ v \in M\}.$$
   Defina a norma $\|\cdot\|_{V/M} : V/M \to \mathbb{R}^+$ por
$$\|\overline{u}\|_{V/M} = \inf_{v \in M} \|u + v\|_V.$$
   (a) Prove que $\|\cdot\|_{V/M}$ de fato é uma norma.

   (b) Prove que V/M é um espaço de Banach com tal norma.

8. Seja H um espaço de Hilbert e suponha que $A : H \to H$ é um operador linear tal que
$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \ \forall u, v \in H.$$
   Prove que A é limitado.

   Dica: Prove que o gráfico de A é fechado.

9. (B.L.T. Theorem) Seja $A : V_1 \to V_2$ um operador linear e limitado onde $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ é um espaço normado e $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ é um espaço de Banach. Prove que A pode ser estendido a um único $\tilde{A} : \overline{V}_1 \to V_2$ linear e limitado e tal que
$$\|\tilde{A}\| \leq \|A\|.$$

10. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^*, mediante uma forma bilinear
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \to \mathbb{R}.$$
    Prove que uma net $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge para $u_0 \in U$ em $\sigma(U, U^*)$ se, e somente se,
$$\langle u_\alpha, u^* \rangle_U \to \langle u_0, u^* \rangle_U, \ \forall u^* \in U^*.$$

11. Seja V um espaço de Banach. Seja $\{u_n\} \subset V$ tal que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_V < \infty.$$
    Prove que $\{u_n\}$ é convergente.

12. Seja V um espaço de Banach e seja W um subespaço fechado de V. Seja $u_0^* \in V^*$.

    Defina
$$a = \sup_{u \in W} \{|\langle u, u_0^* \rangle_V| \ : \ \|u\|_V \leq 1\}$$
    e
$$b = \inf\{\|u^* - u_0^*\|_V \ : \ u^* \in W^\perp\}.$$
    Prove que $a = b$.

13. Sejam U um espaço de Hilbert. Seja $A \in L(U)$ um operador auto adjunto tal que tal que $A(U) = U$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $B \in L(U)$ e $\|B - A\| < \delta$, então $B(U) = U$.

14. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in L(H)$ um operador auto-adjunto.

    Prove que $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\|u_n\|_H = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \to \infty} \|Au_n - \lambda u_n\|_H = 0.$$

    Prove o resultado acima assumindo que A é um operador normal e não necessariamente auto-adjunto.