Análise Funcional
Curso de Verão - 2019
Primeira Avaliação

February 12, 2019

- Nome: ....
- Calculadoras não são permitidas.
- Celulares devem estar desligados e não podem ser acessados durante a prova.
- Respostas sem o devido desenvolvimento não serão consideradas.

1. Sejam V_1 e V_2 espaços de Banach e seja $L(V_1, V_2)$ o conjunto dos operadores lineares e contínuos $T : V_1 \to V_2$, com a norma

$$\|T\|_L = \sup_{u \in V_1} \{\|T(u)\|_{V_2} \ : \ \|u\|_{V_1} \leq 1\}.$$

Seja $\{T_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L(V_1, V_2)$.

(a) Mostre que para cada $u \in V_1$, $\{T_n(u)\}$ é uma sequência de Cauchy em V_2.

(b) Defina para cada $u \in V_1$, $T(u) = \lim_{n\to\infty} T_n(u)$ (em norma). Prove que T é linear e limitado.

(c) Mostre que

$$\|T_n - T\|_L \to 0, \ \text{ quando } n \to \infty,$$

e conclua que $L(V_1, V_2)$ é um espaço de Banach.

2. Seja H um espaço de Hilbert real e seja $V \subset H$ um subespaço próprio de H de dimensão finita tal que $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Seja $u_0 \in H$ tal que $u_0 \neq \mathbf{0}$.

Defina $f : H \to \mathbb{R}$ por

$$f(u) = (u, u_0)_H, \ \forall u \in H.$$

Defina também,

$$B_H = \{u \in H \ : \ \|u\|_H \leq 1\}.$$

Prove que existe $u_1 \in B_H \cap V$ tal que

$$f(u_1) = \min_{u \in B_H \cap V} f(u).$$

3. Seja $T : l^\infty \to l^2$ tal que

$$T(\{u_n\}) = \left\{ \frac{u_n}{n} \right\}, \ \forall \{u_n\} \in l^\infty.$$

Prove que T é contínua e obtenha $\|T\|$.

Dica: Fixe $v \in l^\infty$ e prove que se $v_k \to v$ em l^∞, então $T(v_k) \to T(v)$ em l^2.

4. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{u_n\} \subset H$ uma base ortonormal de H.

Seja $d : H \times H \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(u - v, u_n)_H|}{(1 + |(u - v, u_n)_H|)}.$$

Mostre que d é uma métrica em H.

5. Seja H um espaço de Hilbert real e seja $\{u_n\} \subset H$ uma sequência tal que

$$\|u_n\|_H \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $K \in \mathbb{R}^+$.

Defina $f : H \to \mathbb{R}$, por

$$f(u) = \limsup_{n \to \infty} |(u_n, u)_H|.$$

Mostre que f é um funcional convexo em H.