Análise Funcional
Curso de Verão - 2019
Segunda Avaliação

March 1, 2019

- Nome: ....
- Calculadoras não são permitidas.
- Celulares devem estar desligados e não podem ser acessados durante a prova.
- Respostas sem o devido desenvolvimento não serão consideradas.

1. Seja V um espaço de Banach. Suponha que $\{u_n^*\} \subset V^*$ e $u^* \in V^*$ são tais que

$$u_n^* \rightharpoonup u^*, \text{ em } \sigma(V^*, V).$$

Mostre que

$$\|u^*\|_{V^*} \leq \liminf_{n \to \infty} \|u_n^*\|_{V^*}.$$

Dica: Observe que

$$|\langle u, u_n^* \rangle_V| \leq \|u\|_V \|u_n^*\|_{V^*}, \ \forall u \in V, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Seja V um espaço de Banach e seja M um sub-espaço de V.
Defina

$$M^\perp = \{u^* \in V^* \ : \ \langle u, u^* \rangle_V = 0, \ \forall u \in M\}.$$

(a) Mostre que $M^\perp$ é um sub-espaço vetorial fechado de V^*.

(b) Seja $u_0^* \in V^*$. Mostre que existe $v_0^* \in M^\perp$ tal que

$$\|v_0^* - u_0^*\|_{V^*} = \inf_{v^* \in M^\perp} \|v^* - u_0^*\|_{V^*}.$$

Dica: Use o Teorema de Banach-Alaoglu e o resultado da questão anterior.

3. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $B \subset V$ um conjunto limitado.

   Seja $F : V \to \mathbb{R}$ um funcional limitado inferiormente tal que

$$\liminf_{n \to \infty} F(u_n) \geq F(u),$$

   sempre que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

   Mostre que existe $u_0 \in \overline{Conv(B)}$ tal que

$$F(u_0) \leq \inf_{u \in B} F(u).$$

4. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in L(H)$ um operador auto-adjunto.

   Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Prove com todos os detalhes que $A - \lambda I$ não tem uma inversa limitada se, e somente se, existe $\{u_n\} \subset H$ tal que $\|u_n\|_H = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \to \infty} \|A(u_n) - \lambda u_n\|_H = 0.$$