Análise Funcional
Curso de Verão 2020
Segunda Lista de Exercícios

January 30, 2020

1. Mostre que dois funcionais lineares $f_1 \neq 0$ e $f_2 \neq 0$ definidos num mesmo espaço vetorial os quais tem o mesmo espaço nulo são proporcionais, isto é existe $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$ tal que $f_2 = \alpha f_1$.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Seja $f : V \to$ um funcional linear. Quais as possíveis dimensões para $N(f)$?

3. Sejam $U, V \neq \{0\}$ espaços normados onde $dim(U) = \infty$. Mostre que existe pelo menos um operador linear ilimitado $T : U \to V$.

4. Seja $M \neq \emptyset$ um subconjunto de um espaço normado V. O anulador M^a de M é definido por
$$M^a = \{f \in V' \quad f(u) = 0, \; \forall u \in M\} \subset V'.$$
Mostre que M^a é subespaço vetorial de V' e que é fechado. O que são V^a e $\{0\}^a$?

5. Seja V o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 definidos no intervalo $[a, b]$ com o produto interno
$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(t)v(t)\, dt.$$
Mostre que V é completo. Seja W o conjunto de todos os polinômios tais que $u(c) = 0$ onde $c \in [a, b]$. É W um subespaço vetorial de V?

   O conjunto de todos os polinômios de V de grau igual a 2 é um subsepaço de V? Justifique as sus respostas.

6. Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $\{u_n\} \subset H$, $u, v \in H$ tais que $\langle v, u_n\rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e
$$u_n \to u,$$
na norma de H. Mostre que
$$\langle v, u\rangle = 0.$$

7. Seja
$$V = C([a, b]) = \{u : [a, b] \to \mathbb{C}, \; : \; u \text{ é contínua em } [a, b]\}.$$
Seja $V_1 = (V, \|\cdot\|_\infty)$, onde
$$\|u\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}\{|u(x)|\},$$
e $V_2 = (V, \|\cdot\|_2)$ onde
$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

e onde

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\, dx.$$

Prove que a identidade $I : V_1 \to V_2$ é contínua onde

$$I(u) = u \in V_2,\ \forall u \in V_1.$$

8. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno.

   Suponha que $T : V \to V$ um operador linear limitado tal que

   $$\langle Tu, u\rangle = 0,\ \forall u \in V.$$

   Mostre que $T = \mathbf{0}$. Mostre também que o resultado não vale no caso de espaço vetorial real.

9. Seja H um espaço de Hilbert e seja $M \subset H$ um subconjunto convexo. Seja $\{u_n\} \subset M$ tal que

   $$\|u_n\| \to d = \inf_{u\in M}\{\|u\|\}.$$

   Mostre que $\{u_n\}$ é convergente em H.

10. Seja V um espaço vetorial com produto interno e sejam $A, B \subset V$ tais que $A \subset B$.

    Mostre que:

    (a)
    $$A \subset A^{\perp\perp},$$

    (b)
    $$B^{\perp} \subset A^{\perp},$$

    (c)
    $$A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}.$$

11. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Mostre que o complemento ortogonal $M^{\perp}$ de um conjunto $M \neq \emptyset$ é um subespaço fechado.

12. Seja H um espaço de Hilbert e seja V um subespaço de H. Mostre que V é fechado se, e somente se,

    $$V = V^{\perp\perp}.$$

13. Seja H um espaço de Hilbert e seja $M \neq \{0\}$ um subespaço de H. Mostre que $M^{\perp\perp}$ é o menor subespaço fechado de H que contém M. Isto é, mostre que se $W \supset M$ e W é subespaço fechado de H, então

    $$W \supset M^{\perp\perp}.$$

14. Seja V um espaço vetorial com produto interno se seja $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ uma sequência ortonormal.

    Seja $u \in V$ e seja $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, onde

    $$\alpha_k = \langle u, e_k\rangle,\ \forall k \in \{1, \cdots, n\}.$$

    Mostre que $u - v$ é ortogonal ao subespaço $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

15. Seja H um espaço de Hibert e seja $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência ortonormal.

    Seja $u \in V$ e seja $v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, onde

    $$\alpha_k = \langle u, e_k\rangle,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

    Mostre que $u - v$ é ortogonal a $e_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

16. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência ortonormal e seja M o subsepaço de H gerado por tal sequência. Seja $u \in H$. Mostre que $u \in \overline{M}$ se, e somente se,
$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$
, onde
$$\alpha_k = \langle u, e_k \rangle, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

17. Seja H um espaço de Hibert e seja $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ uma sequência ortonormal de H. Sejam $u, v \in H$ tais que
$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$
e
$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$
Mostre que
$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k},$$
onde esta última série é convergente.

18. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{u_n\} \subset H$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ é convergente. Mostre que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$
é convergente (em norma).

19. Seja H um espaço de Hibert e seja $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ uma sequência ortonormal de H. Sejam $u \in H$ tal que
$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$
Mostre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|u\|^2.$$

20. Seja
$$M = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_n) \ : \ \sum_{j=1}^{n} u_j = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^n.$$
Mostre que M é completo e convexo. Encontre o seu vetor de norma mínima.

21. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset H$ um conjunto ortonormal. Mostre que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ onde $\beta_j = \langle u, e_j \rangle$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ são tais que
$$\|u - v_0\| = \min_{v \in [e_1, \cdots, e_n]} \|u - v\|,$$
onde
$$v_0 = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n.$$

22. Seja H um espaço de Hilbert e seja

$$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

uma base ortonormal de H. Use a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2 = \|u\|^2, \ \forall \in H$$

para provar a relação de Parseval

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n\rangle \overline{\langle v, e_n\rangle}, \ \forall u, v \in H.$$

23. Seja H um espaço de Hilbert. Seja $M \subset H$ um conjunto total. Sejam $v, w \in H$. Mostre que se

$$\langle v - w, u\rangle = 0, \ \forall u \in M,$$

então $v = w$.

24. Seja H um espaço de Hilbert. Sejam $v, w \in H$. Suponha que se

$$\langle v - w, u\rangle = 0, \ \forall u \in M \subset H,$$

então

$$v = w.$$

Nesse caso mostre que M é total.

25. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Seja $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Mostre que existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(u) = \langle u, z\rangle_{\mathbb{R}^n}, \ \forall u \in V.$$

26. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja $z \in V$. Mostre que

$$f(u) = \langle u, z\rangle, \ \forall u \in V,$$

é um funcional linear em V com norma $\|z\|$.

Nesse contexo, assuma que o mapeamento de $J : V \to V'$ é sobrejetivo, onde $J(z) = f$. Mostre que nesse caso V é um espaço de Hilbert.

27. Mostre que todo funcional linear e contínuo em l^2 pode ser representado na forma

$$f(u) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \overline{z}_j,$$

para algum

$$z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l^2.$$

28. Seja H um espaço de Hilbert separável. Seja $\{e_n\} \subset H$ uma sequência ortonormal total para H. Defina o operador shift como o operador linear $T : H \to H$ onde $T(e_n) = e_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Obtenha a imagem, o núcleo e a norma de T. Obtenha também T^*.

29. Seja H um espaço de Hilbert se sejam $T_1, T_2, S_1, S_2 : H \to H$ operdores lineares, limitados e auto-adjuntos.

Suponha que

$$T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2.$$

Sob tais hipóteses, prove que $S_1 = T_1$ e $S_2 = T_2$.

30. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear, limitado e auto-adjunto tal que $T \neq \mathbf{0}$.

    (a) Prove que $T^n \neq \mathbf{0}$, para $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$

    (b) Prove que $T^n \neq \mathbf{0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

31. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \to H$ um operador isométrico.

    Prove que
$$T^*T = I,$$
    onde I denota o operador identidade.

32. Seja H um espaço de Hilbert. Seja $T : H \to H$ um operador isométrico o qual não é unitário. Mostre que T mapeia H num subespaço próprio de H.

33. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja $T : V \to V$ um operador isométrico onde $dim(V) < \infty$. Mostre que T é unitário.

34. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{T_n : H \to H\}$ uma sequência de operadores normais tais que
$$T_n \to T,$$
    em norma.

    Mostre que T é normal.

35. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja $T : H \to H$ um operador linear limitado.

    Mostre que T é normal se, e somente se,
$$\|T(u)\| = \|T^*(u)\|, \ \forall u \in H.$$
    Com tal resultado, mostre que se T é linear, limitado e normal, então
$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$