Análise Funcional
Curso de Verão 2020
Terceira Lista de Exercícios

January 23, 2020

1. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $H \subset V$ um hiperplano afim, isto é,

$$H = \{u \in V \ : \ \langle u, u^* \rangle_V = \alpha\},$$

para algum $u^* \in V^*$ tal que $u^* \neq \mathbf{0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $K \subset V$ um conjunto convexo, fechado e limitado tal que

$$K \cap H = \emptyset.$$

Defina a distância d entre H e K por,

$$d = \inf\{\|u - v\|_V \ : \ u \in H \text{ e } v \in K\}.$$

Mostre que existem $u_0 \in H$ e $v_0 \in K$ tais que

$$d = \|u_0 - v_0\|_V.$$

2. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \to \mathbb{R}$ um funcional convexo.

Defina o Epígrafo de F, denotado por $Epi(F)$ por,

$$Epi(F) = \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} \ : \ a \geq F(u)\}.$$

Mostre que $Epi(F)$ é convexo.

3. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \to \mathbb{R}$ um funcional convexo tal que $Epi(F)^\circ \neq \emptyset$.

Mostre que

$$F(u) = \sup_{(u^*, \alpha) \in V^* \times \mathbb{R}} \{\langle u, u^* \rangle_V + \alpha \ : \ \langle v, u^* \rangle_V + \alpha \leq F(v), \ \forall v \in V\}.$$

4. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $M \subset V$ um sub-espaço vetorial próprio e fechado de V tal que $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Seja $u \in V$. Mostre que existe $v_0 \in M$ tal que

$$\|u - v_0\|_V = \inf_{v \in M} \|u - v\|_V.$$

5. Seja V um espaço de Banach reflexivo e sejam $A, B \subset V$ conjuntos não vazios, convexos e fechados tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponha também que B é limitado. Defina a distância d entre A e B por,

$$d = \inf\{\|u - v\|_V \ : \ u \in A \text{ e } v \in B\}.$$

Mostre que existem $u_0 \in A$ e $v_0 \in B$ tais que

$$d = \|u_0 - v_0\|_V.$$

6. Seja V um espaço de Banach reflexivo e seja $F : V \to \mathbb{R}$ funcional limitado inferiormente e tal que

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u),$$

sempre que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \sigma(V, V^*)(\text{ fracamente }),$$

$\forall u \in V$.

Assuma também que

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = +\infty,$$

sempre que $\|u_n\|_V \to \infty$.

Prove que existe $u_0 \in V$ tal que

$$F(u_0) = \min_{u \in V} F(u).$$

7. Seja V um espaço de Banach reflexivo. Seja $u_0 \in V$. Defina $F : V \to \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \langle u, u_0 \rangle_V, \ \forall u \in V.$$

Seja $A \subset V$ um conjunto convexo, limitado e fechado.

Mostre que existe $u_1 \in A$ tal que

$$F(u_1) = \min_{u \in A} F(u).$$

8. Seja V um espaço de Banach reflexivo. Seja $u_0 \in V$. Defina $F : V \to \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \langle u, u_0 \rangle_V, \ \forall u \in V.$$

Seja $A \subset V$ um conjunto limitado e fechado.

Mostre que existe $u_1 \in Conv(A)$ tal que

$$F(u_1) = \inf_{u \in A} F(u).$$

9. Seja V um espaço de Banach e seja $F : V \to \mathbb{R}$ um funcional. Defina o funcional polar $F^* : V^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V}\{\langle u, u^* \rangle_V - F(u)\}.$$

Mostre que F^* é convexo.

Seja $V = \mathbb{R}^2$ e seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde

$$F(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{1}{2}u_2^2\right)^2.$$

Seja $(u_1^*, u_2^*) \in \mathbb{R}^2$. Obtenha

$$F^*(u_1^*, u_2^*).$$

10. Seja V um espaço de Banach. Seja $M \subset V$ um sub-espaço vetorial.

Defina

$$M^{\perp} = \{u^* \in V^* \ : \ \langle u, u^* \rangle_V = 0, \ \forall u \in M\},$$

e para $N \subset V^*$ defina

$$N^{\perp} = \{u \in V \ : \ \langle u, u^* \rangle_V = 0, \ \forall u^* \in N\}.$$

Mostre que

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

11. Seja V um espaço de Banach. Seja $u \in V$.

Defina

$$F_u = \{u^* \in V^* \ : \ \|u^*\|_{V^*} \leq \|u\|_V \text{ e } \langle u, u^* \rangle_V = \|u\|_V^2\}.$$

Mostre que F_u é não-vazio, fechado e convexo.

12. Seja $V = \{u \in C([0,1]) \ : \ u(0) = 0\}$, com a norma

$$\|u\|_V = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Seja $f : V \to \mathbb{R}$ onde

$$f(u) = \int_0^1 u(t) \ dt.$$

Mostre que f é limitado e obtenha $\|f\|_{V^*}$.

13. Seja $V = C([0,1])$ com a norma usual

$$\|u\|_V = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Seja

$$E = \left\{ u \in V \ : \ \int_0^1 |u(t)|^2 \ dt < 1 \right\}.$$

Mostre que E é convexo e ilimitado em V.

14. Seja V um espaço de Banach e seja $A \subset V$ um conjunto não vazio, próprio e fechado.

Defina

$$\phi(u) = d(u, A) = \inf_{v \in A} \|u - v\|_V.$$

Mostre que

$$|\phi(u) - \phi(v)| \leq \|u - v\|_V, \ \forall u, v \in V.$$

Assuma também que A é convexo. Prove que neste caso ϕ é convexa em V.

15. (Lema de Mazur) Seja V um espaço de Banach e seja $A = \{u_n\} \subset V$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

Prove que existe $\{v_n\} \subset Conv(A)$ tal que $v_n \to u$ em norma.

16. Seja V um espaço de Banach e seja $\{u_n\} \subset V$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

Seja

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Prove que também

$$v_n \rightharpoonup u, \text{ em } \sigma(V, V^*).$$

17. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja S um operador auto-adjunto tal que $(Su, u)_H = 0, \ \forall u \in H$.

Prove que $S = \mathbf{0}$. Repita o exercício assumindo qhe H é real.

18. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \to H$ uma isometria linear. Prove que

$$T^*T = I,$$

onde I denota o operador identidade.

19. Seja H um espaço de Hilbert e seja $T : H \to H$ uma isometria linear. Prove que se T não é unitário então T mapeia H em um sub-espaço próprio fechado de H.

20. Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $T : V \to V$ uma isometria linear.

Assuma que $dim(V) = n < \infty$. Mostre que nesse caso T é unitário.

21. Seja H um espaço de Hilbert. Suponha que $\{T_n : H \to H\}$ seja uma sequência de operadores normais e que

$$T_n \to T$$

em norma.

Mostre que T é normal.

22. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Mostre que um operador linear e limitado $T : H \to H$ é normal se, e somente se,

$$\|T^*(u)\|_H = \|T(u)\|_H, \ \forall u \in H.$$

23. Seja V um espaço vetorial. Seja $p : V \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear.

Mostre que

$$p(\mathbf{0}) = 0$$

e

$$p(-u) \geq -p(u), \ \forall u \in V.$$

24. Seja V um espaço vetorial normado. Seja $p : V \to \mathbb{R}$ um funcional sub-aditivo.

Suponha que p é contínuo em $\mathbf{0}$ e tal que $p(\mathbf{0}) = 0$. Prove que p é contínuo em V.

25. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \to \mathbb{R}$ um funcional sub-linear.

Seja $f : Z \to \mathbb{R}$ onde

$$Z = \{u = \alpha u_0, \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

para algum fixo $u_0 \neq 0$, $u_0 \in V$ e onde

$$f(u = \alpha u_0) = \alpha p(u_0).$$

Prove que f é linear em Z e que

$$f(u) \leq p(u), \ \forall u \in Z.$$

26. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \to \mathbb{R}$ um funcional sub-linear. Mostre que existe um funcional linear $g : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$-p(-u) \leq g(u) \leq p(u), \forall u \in V.$$

27. Seja V um espaço vetorial real e seja $p : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v) \text{ e } p(\alpha u) = |\alpha| p(u), \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Seja $u_0 \in V$. Mostre que existe um funcional linear $g : V \to \mathbb{R}$ tal que $g(u_0) = p(u_0)$ e

$$|g(u)| \leq p(u), \ \forall u \in V.$$

28. Seja V um espaço de Banach complexo e seja $T \in L(V)$.

Defina

$$r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Prove que

$$r_\sigma(\alpha T) = |\alpha| r_\sigma(T), \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

e que

$$r_\sigma(T^n) = (r_\sigma(T))^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

29. Seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência real tal que

$$\lambda_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Seja $T : l^2 \to l^2$ onde

$$T(\{u_n\}) = \{\lambda_n u_n\}.$$

Mostre que T é compacto.

30. Sejam U e Y espaços de Banach. Denotemos por $L(U, Y)$ o conjuntos dos operadores lineares e limitados $A : U \to Y$.

Mostre que $L(U, Y)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|A\| = \sup_{u \in U}\{\|Au\|_Y \ : \ \|u\|_U = 1\}.$$

31. Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $V = C^m([a, b])$ o espaço das funções contínuas e com derivadas de ordem até m contínuas em $[a, b]$. Mostre que V é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_V = \max_{x \in [a,b]} \left\{ |f(x)| + \sum_{k=1}^{m} |f^{(k)}(x)| \right\}.$$

32. Seja V um espaço de Banach reflexivo e sejam $K, F \subset V$ tais que K é compacto, F é fechado e convexo e

$$K \cap F = \emptyset.$$

Defina a distância entre K e F, denotada por $d(K, F)$, como

$$d(K, F) = \inf\{\|u - v\|_U \ : \ u \in K \text{ e } v \in F\}.$$

Prove que existem $u_0 \in K$ e $v_0 \in F$ tais que

$$d(K, F) = \|u_0 - v_0\|_U.$$

33. Seja H um espaço de Hilbert separável com uma base ortonormal $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Prove $u_n \rightharpoonup \mathbf{0}$ fracamente em H.

34. Seja V um espaço de Banach e seja $K \subset V$ um conjunto compacto. Suponha que $K \subset W$ onde W é aberto. Prove que existe $W_1 \subset V$ aberto tal que

$$K \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W.$$

35. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^*, mediante uma forma bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \to \mathbb{R}.$$

Seja $\{u_n^*\} \subset U^*$ um conjunto denso em B_{U^*}.

Defina uma métrica $d : U \times U \to \mathbb{R}^+$ para U por

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle u-v, u_k^*\rangle_U|}{1+|\langle u-v, u_k^*\rangle_U|}.$$

(a) Prove que de fato d é uma métrica.

(b) Em B_U prove que a topologia relativa a tal métrica corresponde ao traço da topologia $\sigma(U, U^*)$ sobre B_U.

36. Seja V um espaço de Banach e seja M um sub-espaço vetorial fechado de V.

Defina o espaço quociente

$$V/M = \{\overline{u} \;:\; u \in V\},$$

onde

$$\overline{u} = \{u + v \;:\; v \in M\}.$$

Defina a norma $\|\cdot\|_{V/M} : V/M \to \mathbb{R}^+$ por

$$\|\overline{u}\|_{V/M} = \inf_{v\in M} \|u+v\|_V.$$

(a) Prove que $\|\cdot\|_{V/M}$ de fato é uma norma.

(b) Prove que V/M é um espaço de Banach com tal norma.

37. Seja H um espaço de Hilbert e suponha que $A : H \to H$ é um operador linear tal que

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H, \; \forall u, v \in H.$$

Prove que A é limitado.

Dica: Prove que o gráfico de A é fechado.

38. (B.L.T. Theorem) Seja $A : V_1 \to V_2$ um operador linear e limitado onde $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ é um espaço normado e $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ é um espaço de Banach. Prove que A pode ser estendido a um único $\tilde{A} : \overline{V}_1 \to V_2$ linear e limitado e tal que

$$\|\tilde{A}\| \leq \|A\|.$$

39. Seja U um espaço de Banach cujo dual topológico é identificado com o espaço U^*, mediante uma forma bilinear

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U^* \to \mathbb{R}.$$

Prove que uma net $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converge para $u_0 \in U$ em $\sigma(U, U^*)$ se, e somente se,

$$\langle u_\alpha, u^*\rangle_U \to \langle u_0, u^*\rangle_U, \; \forall u^* \in U^*.$$

40. Seja V um espaço vetorial normado complexo e seja $A : V \to V$ um operador linear.

    Sejam $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que

$$A(u_j) = \lambda_j u_j,$$

    onde $\lambda_j \neq \lambda_k$ se $j \neq k$.

    Mostre que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é linearmente independente.

    Sugestão: Use indução.

41. Seja V um espaço de Banach e seja W um subespaço fechado de V. Seja $u_0^* \in V^*$.

    Defina

$$a = \sup_{u \in W} \{|\langle u, u_0^* \rangle_V| \ : \ \|u\|_V \leq 1\}$$

    e

$$b = \inf\{\|u^* - u_0^*\|_V \ : \ u^* \in W^\perp\}.$$

    (a) Prove que $a \leq b$.

    (b) Assuma que V é um espaço de Hilbert. Mostre que nesse caso $a = b$.

42. Sejam U um espaço de Hilbert. Seja $A \in L(U)$ um operador auto adjunto tal que tal que $A(U) = U$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $B \in L(U)$ e $\|B - A\| < \delta$, então $B(U) = U$.

43. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in L(H)$ um operador auto-adjunto.

    Prove que $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\|u_n\|_H = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \to \infty} \|Au_n - \lambda u_n\|_H = 0.$$

    Prove o resultado acima assumindo que A é um operador normal e não necessariamente auto-adjunto.

44. Seja $V = C[0, 1]$ e defina $T : V \to V$ por

$$Tx = vx,$$

    onde $v \in V$.

    Obtenha $\sigma(T)$.

45. Ache um operador linear $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ tal que $\sigma(T) = [a, b]$.

46. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por $y = Tx$, onde $x = \{x_n\}$ e $y = \{\alpha_n x_n\}$, onde $\{\alpha_n\}$ é denso em $[0, 1]$. Obtenha $\sigma_p(T)$ e $\sigma(T)$.

47. No último problema mostre que se $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma(T)$, então $R_\lambda(T)$ é ilimitado.

48. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por $y = Tx$, onde $x = \{x_n\}$ e $y = \{\alpha_n x_n\}$, onde $\{\alpha_n\}$ é denso em um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Obtenha $\sigma_p(T)$ e $\sigma(T)$.

49. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $T \in L(H, H)$. Mostre que

$$\|R_\lambda(T)\| \to \infty$$

    quando $\lambda \to \infty$.

50. Seja $V = C[0, \pi]$. Defina $T : D \to V$ por

$$Tu = u'',$$

    onde

$$D = \{u \in V \ : \ u', u'' \in V, \ u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

    Mostre que $\sigma(T)$ não é compacto.

51. Seja $T : l^\infty \to l^\infty$ onde

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots),$$

e onde $x = \{x_n\} \in l^\infty$.

(a) Se

$$|\lambda| > 1,$$

mostre que $\lambda \in \rho(T)$.

(b) Se

$$|\lambda| \leq 1,$$

mostre que λ é auto-valor e obtenha o auto-espaço Y correspondente.

52. Seja $T : l^p \to l^p$ $(1 \leq p < \infty)$ onde

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots),$$

e onde $x = \{x_n\} \in l^p$. Se $|\lambda| = 1$ verifique se tal λ é ou não um auto-valor de T.

53. Sejam U, V espaços vetoriais normados. Assuma que

$$T_1, T_2 : U \to V$$

sejam operadores lineares e compactos.

Mostre que $T = T_1 + T_2$ é também linear e compacto. Mostre também que o conjunto dos operadores lineares e compactos $C(U, V)$ é um subespaço de $L(U, V)$.

Se V é um espaço de Banach, mostre que $C(U, V)$ é um espaço de Banach.

54. Seja V um espaço de Banach e seja $f \in V^*$. Seja $z \in V$. Mostre que $T : V \to V$ é compacto, onde

$$Tu = \langle u, f \rangle_V z, \ \forall u \in V.$$

55. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja $M \subset V$ um subespaço de M de dimensão finita n.

Seja $P : V \to M$ a projeção ortogonal sobre M.

Mostre que P é compacto.

56. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \{x_n/2^n\}.$$

Mostre que T é compacto.

57. Seja $T : l^p \to l^p$, onde $1 \leq p < +\infty$, definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \{x_n/n\}.$$

Mostre que T é compacto.

58. Seja $T : l^\infty \to l^\infty$, definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \{x_n/n\}.$$

Mostre que T é compacto.

59. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \left\{ y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k \right\},$$

onde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}|^2 < +\infty.$$

Mostre que T é compacto.

60. Seja $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\lambda_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \{\lambda_n x_n\}.$$

Mostre que T é compacto.

61. Sejam U, V, W espaços vetoriais normados. Suponha que $T_1 : U \to V$ é um operador linear compacto e $T_2 : V \to W$ operador linear e limitado.

Mostre que $T_2 T_1 : U \to W$ é compacto.

62. Seja H um espaço de Hilbert complexo. Seja $T : H \to H$ um operador linear.

Mostre que T é compacto, se e somente se, $T^* T$ é compacto.

63. Seja V um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Seja $T : V \to V$ um operador linear e compacto o qual tem uma inversa definida em todo V. Mostre que tal inversa não pode ser limitada.

64. Seja V um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Seja $T : V \to V$ um operador linear e compacto.

Mostre que nesse caso

$$0 \in \sigma(T).$$

65. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por

$$Tx = y$$

onde

$$x = \{x_n\} \in l^2$$

e

$$y = \{\alpha_n x_n\},$$

onde $\{\alpha_n\}$ é denso em $[0, 1]$.

Mostre que T não é compacto.