Análise Funcional
Curso de Verão - 2020
Primeira Avaliação

February 18, 2020

- Nome: ....
- Calculadoras não são permitidas.
- Celulares devem estar desligados e não podem ser acessados durante a prova.
- Apenas 4 das 5 questões são obrigatórias. Escolha 4 questões para serem avaliadas.
  Questões escolhidas:..

1. Sejam (V_1, σ_1), (V_2, σ_2) espaços topológicos. Seja $f : V_1 \to V_2$ uma função.

   Seja $u \in V_1$.

   Assuma que para cada net $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $u_\alpha \to u \in V_1$ em σ_1 temos que

   $$f(u_\alpha) \to f(u) \text{ em } \sigma_2.$$

   Mostre que f é contínua em u, isto é, mostre que para cada $W \in \sigma_2$ tal que $f(u) \in W$, existe $U \in \sigma_1$ tal que $u \in U$ e

   $$f(U) \subset W.$$

   Sugestão: Negue que f é contínua em u e obtenha uma contradição.

2. Seja $V = C([a, b]) = \{u : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \ u \text{ é contínua em } [a, b]\}$ com a norma

   $$\|u\|_V = \max_{x \in [a,b]} |u(x)|.$$

   Seja $u_0 \in V$ e seja $T : V \to V$ onde

   $$T(u) = \int_a^x u_0(t) u(t) \, dt.$$

   Mostre que T é linear e contínuo.

3. Seja (V, d) o espaço métrico onde $V = C([a, b])$ com a métrica

$$d(u, v) = \int_a^b |u(x) - v(x)|\, dx.$$

Prove que V não é completo.

4. Sejam V_1 e V_2 espaços de Banach e seja $L(V_1, V_2)$ o conjunto dos operadores lineares e contínuos $T : V_1 \to V_2$, com a norma

$$\|T\|_L = \sup_{u \in V_1} \{\|T(u)\|_{V_2} \; : \; \|u\|_{V_1} \leq 1\}.$$

Seja $\{T_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L(V_1, V_2)$.

(a) Mostre que para cada $u \in V_1$, $\{T_n(u)\}$ é uma sequência de Cauchy em V_2.

(b) Defina para cada $u \in V_1$, $T(u) = \lim_{n\to\infty} T_n(u)$ (em norma). Prove que T é linear e limitado.

(c) Mostre que

$$\|T_n - T\|_L \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

e conclua que $L(V_1, V_2)$ é um espaço de Banach.

5. Seja V o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 1 definidos no intervalo $[0, 1]$ com a norma

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^1 u(x)^2\, dx}.$$

Denotemos então

$$V = \{u : [0, 1] \to \mathbb{R} \; : \; u(x) = a_0 + a_1 x, \; \text{onde } a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Mostre que V é completo e prove que

$$W = \{u \in V \; : \; u(1/2) = u(3/4)\}$$

é um sub-espaço vetorial de V.

(b) Seja $u_0 \in C([0, 1]$. Prove que existe $v_0 \in V$ tal que

$$\|v_0 - u_0\|_2 = \min_{v \in V} \|v - u_0\|_2.$$

(c) Obtenha v_0 para o caso em que

$$u_0(x) = x^2, \; \forall x \in [0, 1].$$

Sugestão: Ache a_0, a_1 os quais minimizam

$$F(a_0, a_1) = \|x^2 - (a_0 + a_1 x)\|_2^2.$$