Análise Funcional
Curso de Verão - 2020
Segunda Avaliação

February 21, 2020

- Nome: ....
- Calculadoras não são permitidas.
- Celulares devem estar desligados e não podem ser acessados durante a prova.
- Apenas 4 das 6 questões são obrigatórias. Escolha 4 questões para serem avaliadas.
  Questões escolhidas:...

1. Seja V um espaço de Banach reflexivo.

   Sejam $A, B \subset V$ onde A é compacto, B é limitado e $A \cap B = \emptyset$.

   Defina a distância entre A e B, denotada por d, como

   $$d = \inf\{\|u - v\|_V \ : \ u \in A \text{ e } v \in B\}.$$

   Prove que existem $u_0 \in A$ e $v_0 \in \overline{Conv(B)}$ tais que

   $$d \geq \|u_0 - v_0\|_V.$$

2. Seja V um espaço de Banach relexivo. Sejam $u_0^* \in V^*$ e $v_0 \in V$ e seja $A : V \to V$ onde

   $$A(u) = \langle u, u_0^* \rangle_V \ v_0, \ \forall u \in V.$$

   Mostre que A é compacto.

   Sugestão: Prove que dada uma sequência limitada $\{u_n\} \subset V$, $\{A(u_n)\}$ tem uma subsequência convergente.

3. Seja V um espaço de Banach. Seja $\{u_n^*\} \subset V^*$ tal que

$$u_n^* \rightharpoonup u_0^* \in V^*, \text{ em } \sigma(V^*, V).$$

Mostre que

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n^*\|_{V^*} \geq \|u_0^*\|_{V^*}.$$

Sugestão: Observe que

$$|\langle u, u^* \rangle_V| \leq \|u\|_V \|u^*\|_{V^*}, \ \forall u \in V, v^* \in V^*$$

e

$$\|u^*\|_{V^*} = \sup_{u \in V}\{|\langle u, u^* \rangle_V| \ : \ \|u\|_V = 1\}.$$

4. Seja V um espaço de Banach e seja M um sub-espaço próprio fechado de V^*.

   Seja $u_0^* \in V^*$. Prove que existe $v_0^* \in M$ tal que

$$\|v_0^* - u_0^*\|_{V^*} = \inf_{v^* \in M} \|v^* - u_0^*\|_{V^*}.$$

Sugestão: Use o resultado da questão anterior.

5. Seja $V = l^2$. Seja $T : V \to V$ onde

$$T(\{u_n\}) = \{u_n/n\}, \ \forall \{u_n\} \in l^2.$$

Prove que T é compacto.

6. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $A \in L(H)$ um operador normal. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostre com todos os detalhes que $A - \lambda I$ não tem uma inversa limitada se, e somente se,

$$\lambda \in \sigma(A).$$

Sugestão: Observe que A sendo normal temos que $\sigma(A) = \pi(A)$.