

B - Cálculo III - Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

July 31, 2017

1. Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $A' \subset B'$.

2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Prove que

$$A' \cup B' = (A \cup B)'$$

3. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que E' é fechado.

4. Sejam B_1, B_2, \dots subconjuntos do \mathbb{R}^n .

(a) Mostre que se

$$B_n = \cup_{i=1}^n B_i, \text{ então } \overline{B}_n = \cup_{i=1}^n \overline{B}_i.$$

(b) Mostre que se

$$B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i, \text{ então } \overline{B} \supset \cup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i.$$

5. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Relembramos que o interior de E , denotado por E° , é definido como o conjunto de todos os pontos interiores de E .

(a) Mostre que E° é aberto.

(b) Mostre que E é aberto se, e somente se, $E = E^\circ$.

(c) Mostre que se $G \subset E$ e G é aberto, então $G \subset E^\circ$.

(d) Prove que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

(e) Têm E e \overline{E} sempre o mesmo interior? Se não, apresente um contra-exemplo.

(f) Têm E e E^0 sempre o mesmo fecho? Se não, apresente um contra-exemplo.

6. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\mathbf{x} + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in B\}$$

é aberto.

7. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Mostre que

$$A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A \text{ e } \mathbf{y} \in B\},$$

é aberto.

8. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$. Mostre que

$$x \cdot B = \{x \cdot y \mid y \in B\}$$

é aberto.

9. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que

(a)

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$

(b)

$$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ,$$

e dê um exemplo no qual a inclusão é própria.

10. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $\mathbf{a} \in A$. Prove que $A \setminus \{\mathbf{a}\}$ é aberto.

11. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Prove que:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, e dê um exemplo no qual a inclusão é própria.

12. Mostre que A é denso em \mathbb{R}^n se, e somente se, A^c tem interior vazio.

13. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e seja $\mathbf{x} \in F$. Mostre que \mathbf{x} é um ponto isolado de F se, e somente se, $F \setminus \{\mathbf{x}\}$ é fechado.

14. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Assuma $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in A$.

Prove que $A \setminus \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ é aberto.

15. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado.

Mostre que $A \setminus F$ é aberto e $F \setminus A$ é fechado.